数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 69-76

p進L関数入門 VI
(Ferrero - Washington の仕事)

北大 理　森田康夫

p を素数とし, $p \neq 2$ の時は $q = p$, $p = 2$ の時は $q = 4$ とおく。m_0 を p と素な自然数とし, 整数 $n \geq 0$ に対し

$$q_n = m_0 q p^n$$

とおく。そこで

$k_n = \mathbb{Q}(\zeta_{q_n})$: $\mathbb{Q}$ 上 1 の原始 q_n 乗根 ζ_{q_n} の生成する体

とし, h_n で k_n の類数, p^{e_n} で h_n を割る p の最高巾をあらわす。この時 岩沢により次の結果が成り立つことが知られている。

<u>定理</u>. 負でない整数 μ, λ と, 整数 ν があり, n がある自然数 n_0 より大きい時

$$e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

なる公式が成り立つ。

ここに出て来た不変量 λ, μ, ν は、岩沢の理論において重要な量ですが、これについて岩沢は、

「$\mu = 0$ であろう」

と予想しました。この予想は、岩沢により同値ないくつかの命題の形に言い直されていましたが、最近、そのうちの一つの命題を証明することにより証明されました。そこで、以下、Ferrero と Washigton によるこの予想の証明を紹介します。

簡単のため以下 $m_0 = 1$ と仮定します。一般の m_0 に対しても、本質的には同じことをすることにより証明されますが、k_0 が有理数体でないため、整数論的に多少めんどうになります。

まず仮定より $k_n = \mathbb{Q}(\zeta_{qp^n})$ となっています。この場合 $p=2$ は regular prime なので $\mu = 0$ となることは良く知られています。よって $p \neq 2$ と仮定します。

一般に p 進整数 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対し、その p 進展開を

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(\alpha) p^m , \qquad 0 \leqq t_m(\alpha) \leqq p-1$$

とし、その部分和を

$$s_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} t_m(\alpha)\, p^m$$

とおきます。この時、岩沢により次のことが知られていまし

た。

命題1. 今の場合，$\mu \neq 0$ となるための必要十分条件は，$0 \leqq d \leqq p-3$ なるある奇数 d があり，

$$\sum_{\eta^{p-1}=1} t_m(\alpha\eta)\,\eta^d \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$$

なる合同式が，任意の $m \geqq 0$ なる整数と，任意の p 進整数 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ について成り立つことである。ここで和は，$\mathbb{Z}_p$ に入るすべての 1 の $p-1$ 乗根全体を動くものとする。

この命題を証明するため，次の様な概念を導入します。

定義. $\gamma_1, \cdots, \gamma_r \in \mathbb{Z}_p$ は，次の条件を満すとき *jointly normal* であるという。

任意の自然数 k と，任意の

$$C = (c_{ij}) \in M_{r,k}(\mathbb{Z}), \qquad 0 \leqq c_{ij} \leqq p-1$$

なる形の行列に対し，整数 $n \geqq -1$ で

$$t_{n+j}(\gamma_i) = c_{ij} \qquad (1 \leqq {}^{\forall}i \leqq r,\ 1 \leqq {}^{\forall}j \leqq k)$$

を満すものの密度が，ちょうど p^{-rk} である。

(注意) この定義は容易に

$\{p^{-n} s_{n-1}(\gamma_1), \cdots, p^{-n} s_{n-1}(\gamma_r)\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1)^r$ の中に uniformly distributed である

ということと同値であることがわかります。従って uniform distribution に関する Weyl の criterion を使うと，これはまた次のこととも同値となります。

$(t_1, \cdots, t_r)$ をすべては 0 でない整数 r 個の組とする時，この様な任意の組に対し，常に

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp\left\{2\pi i \sum_{l=0}^{r} p^{-n} s_{n-1}(\gamma_l) t_l\right\} = 0$$

が成り立つ。

以上の概念を使って，次の命題が得られます。

命題2．$\beta_1, \cdots, \beta_r$ が $\mathbb{Q}$ 上 linearly independent な p 進整数の組であるとする。この時，Haar measure が 0 の $\mathbb{Z}_p$ の部分集合 B があり，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_p$，$\alpha \notin B$ に対し

$\{\alpha\beta_1, \cdots, \alpha\beta_r\}$ は jointly normal

となる。

(証明)．上記の注意により，$\sigma = \sum_{l=1}^{r} \beta_l t_l$ とおく時，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp\{2\pi i\, p^{-n} s_{n-1}(\alpha\sigma)\} = 0$$

が a.a. α について成り立つことを示せば良い．

仮定より，$\beta_1, \cdots, \beta_r$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立で，$(t_1, \cdots, t_r) \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ だから $\sigma \neq 0$ である。よって

$$\mathbb{Z}_p \ni \alpha \longmapsto \exp\{2\pi i\, p^{-n} s_{n-1}(\alpha\sigma)\} \in \mathbb{C}^\times \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

は，互に相異る指標となる。よって

$$S(N,\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\{2\pi i\, p^{-n} s_{n-1}(\alpha\sigma)\}$$

とおくと．指標の直交関係より，

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |S(N,\alpha)|^2 d\alpha = \frac{1}{N}$$

となる。よって

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{Z}_p} |S(m^2,\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

となる。これより，$\mathbb{Z}_p$ の Haar measure $d\alpha$ に関し，a.a. α について

$$\lim_{m\to\infty} |S(m^2,\alpha)| = 0$$

が結論される。ところが　$m^2 \leqq N < (m+1)^2$ とすると

$$|S(N,\alpha)| \leqq |S(m^2,\alpha)| + \frac{2m}{N}$$

が成り立つから，　$S(N,\alpha) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$ となり．命題が証明された。

また jointly normal の定義より，次の命題が成り立つことが証明される．

<u>命題</u>3. $\{\beta_1, \cdots, \beta_R\} \subset \mathbb{Z}_p$ が

(a) $\beta_1, \cdots, \beta_r$ は jointly normal $(r \leq R)$。

(b) $\beta_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ji} \beta_i \quad (a_{ji} \in \mathbb{Z})$ が $r \lneqq j \leq R$ について成り立つ。

(c) $\beta_j / \beta_1 \notin \mathbb{Z} \quad (j = 2, 3, \cdots, R)$。

の三条件を満すとする。この時

$$t_m(\beta_1) = 1 ; \quad t_n(\beta_1) = 0$$

$$t_m(\beta_j) = t_n(\beta_j) \qquad (j = 2, 3, \cdots, R)$$

を満す自然数の組 m, n が無限個存在する。

(証明は略する)

以上三つの命題を使うと、岩沢の予想 $\mu = 0$ が次のようにして証明できます。

$\mu > 0$ であると仮定する。この時命題1より、ある $0 \leq d \leq p-3$ なる奇数に対し、任意の $m \geq 0$ と任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対し

$$\sum_{\eta^{p-1}=1} t_m(\alpha\eta)\, \eta^d \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ。

η を1の原始 $p-1$ 乗根とする。この時

$$\pm\eta, \pm\eta^2, \cdots, \pm\eta^R \qquad (R=(p-1)/2)$$

が 1 の $p-1$ 乗根全体となす。ところが

$$t_m(-\alpha\eta) = p-1-t_m(\alpha\eta) \qquad \text{for} \quad m \geqq 1+v_p(\alpha\eta)$$

となるから，m が十分大きい時，

$$0 \equiv \sum_{\eta} t_m(\alpha\eta)\eta^d = 2\sum_{j=1}^{R} t_m(\alpha\eta^j)\eta^{jd} - (p-1)\sum_{j=1}^{R}\eta^{jd} \pmod p$$

となる。ここで右辺第二項は m によらない定数である。

$\eta, \eta^2, \cdots, \eta^R$ のうち $\eta, \eta^2, \cdots, \eta^r$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとする。この時，命題2より，$\alpha \in \mathbb{Z}_p$ で

$$\alpha\eta, \alpha\eta^2, \cdots, \alpha\eta^r \quad \text{は jointly normal}$$

なるものが存在する。そうすると

$$\{\alpha\eta, \alpha\eta^2, \cdots, \alpha\eta^r, \cdots, \alpha\eta^R\}$$

は命題3の条件を満す。よって命題3のような m と n で，共に十分大きいものが取れる。そうすると

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{\eta} t_m(\alpha\eta)\eta^d - \sum_{\eta} t_n(\alpha\eta)\eta^d \pmod p \\ &= 2\sum_{j=1}^{R}\{t_m(\alpha\eta) - t_n(\alpha\eta)\}\eta^{jd} = 2\eta^d \end{aligned}$$

となる。$p \neq 2$，η は 1 の $p-1$ 乗根だから $2\eta^d \not\equiv 0 \pmod p$ であり，これは矛盾である。よって $\mu = 0$ となる。

（注意）同様の方法で次の定理が得られる。

定理 (Washington). k をアーベル体, K/k を cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension, k_n を $K \supseteq k_n \supseteq k$, $[k_n : k] = p^n$ なる中間体とする. l を p と相異る素数とし, k_n の類数を割る最大の l 巾を l^{e_n} とする。この時, e_n は十分大きい n に対しては一定となる。

なお Ferrero-Washington は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の λ-invariant の評価も得ている。

参考文献

1. B. Ferrero, L. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. Math., 109 (1979), 377-395.

2. L. Washington, The non-p-part of the class number in a cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension,