数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 142-161

Class Number Relations

東大 教養 片岡 俊孝

§0. Introduction.

ここにいう class number relation とは、次のような問題のことである。

Class number relation の問題 I

$k_1, k_2, \cdots k_r$ を有限次代数体 ($r \geq 1$, integer), $a_1, a_2, \cdots, a_r$ を有理整数とする。

(0.1)
$$\prod_{i=1}^{r} \zeta_{k_i}(s)^{a_i} = 1$$

が成り立つとき、

(0.2)
$$\prod_{i=1}^{r} h_{k_i}^{a_i}$$

をもとめよ。

ただし、有限次代数体 k に対して、$\zeta_k(s)$, h_k でそれぞれ k の Dedekind ζ-函数、類数をあらわす。

まず、この問題に対して、知られていることをまとめておこう。

1. 対応するDedekind ζ-函数の $s=1$ での residue よりもとめる方法。

(a) R. Brauer は、(0.1) の仮定のもとで、(0.2) の単数群の index の積による表示を与え、(0.2) は、単数群の Galois module structure のみに依存することを示した。しかし、index の中にあらわれる単数からなる群は、Galois module として、存在が、保証されているだけで、具体的に与えられているわけではない。相対的な場合（以下の II の (0.3) の仮定のもとで）には、C. D. Walter [23] が、R. Brauer [1] より出発して、類似の表示を与えた。また、その論文の中で、R. Brauer [1] の短い証明を与えている。

(b) その Galois 群が、elementary abelian group (i.e. $(l, \cdots, l)$ 型のアーベル群、l は素数）である有限次代数体の Galois 拡大 K/k に対して、k，K，及び K/k の極小な部分体間に、(0.1) のような自明でない (i.e. a_i の中に 0 でないものが存在する）関係が、一般には、唯一つ存在するが、S. Kuroda [15] は、そのようなものに対して、(0.2) を具体的に求めた。その表示の中の主要項は、K の単数群と、すべての極小な部分体の単数より生成される群との index である。C. D. Walter [24] は、これを多少一般化した。

(c) 1970 年代に、R. Brauer [1] より出発して、いくつか

の場合に、(0.2) の具体的な表示が求められた (N. Moser [16], [17], [18], F. Halter-Koch and N. Moser [9], W. Jehne [10], C. D. Walter [22])。この中で C. D. Walter が、最も一般的であるので、それを述べる。K/k を、有限次代数体の Frobenius 拡大 (i.e. Galois 拡大であって、その Galois 群が、Frobenius 部分群をふくむもの)，M，L をそれぞれ Frobenius 部分群，その normal complement に対応する体とする。k，M，L，K の間に、(0.1) のような自明でない関係は、一般には、唯一つ存在する。そのようなものに対して、(0.2) の具体的な表示を、$Gal(K/k)$ が maximal type，あるいは metacyclic の場合に与えた。その表示の中の主要項は、K の単数群と、M の単数の k 上の共役すべて及びしの単数で生成される群との index である。

__2.__ 代数的方法.

(a) K を $\mathbb{Q}$ 上の bicyclic biquadratic extension (i.e. アーベル拡大であって、その Galois 群が (2, 2) 型)、K_1, K_2, K_3 を K にふくまれる相異なる 2 次体とする。このとき、(0.1) の関係

$$\zeta_K(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{i=1}^{3}(\zeta_{K_i}(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s))$$

が成立し、これに対する (0.2) の S. Kuroda [15] と同じ表示を、代数的方法で、T. Kubota [13], [14] (のちに F. Halter-Koch [6])

は、与えた。

(ロ) K/kを有限次代数体の Frobenius 拡大とする。$k=\mathbb{Q}$, $Gal(K/k)\simeq S_3$ のとき、T. Callahan [2], [3], $k=\mathbb{Q}$, $Gal(K/\mathbb{Q})\simeq D_{2l}$ (i.e. 位数$2l$の二面体群, lは奇数) のとき、F. Halter-Koch [7] が、1(c) で述べたのと同一の表示を代数的方法によって与えた。また、kが任意の有限次代数体、$Gal(K/k)$の normal complement が奇素数巾の位数をもつとき 1(c) で得られた表示と同一のものを、J.-F. Jaulent が、純代数的に得たらしい (Zbl., 416・12003 (1980), F. Halter-Koch [7] の G. Gras による review)。

次に基礎体が、任意の有限次代数体のときの class number relation の問題の別の formulation を与える。

以後、

$$\begin{cases} k\text{; 有限次代数体,} \\ K\text{; } k \text{ 上の有限次 Galois 拡大,} \\ G = Gal(K/k) \text{: } K/k \text{ の Galois 群,} \\ p\text{: 素数,} \end{cases}$$

であるとする。

Class number relation の問題 II

$$(0.3)\qquad \sum_H a_H 1_H^G = 0$$

が成り立つとする。Hは、Gの部分群の共役類の代表系をわ

たり、a_H は整数、1_H^G は、H の単位指標より induce された G の指標である。このとき、

(0,4) $$\prod_H h_{K^H}{}^{a_H}$$

をもとめよ。

Remark. "$\sum_H a_H 1_H^G = 0 \Rightarrow \prod_H \zeta_{K^H}(s)^{a_H} = 1$" が成り立ち、$k=\mathbb{Q}$ のとき、2つの条件は同値である。

§1 では、Galois群の作用を有効に利用して、イデアル類群相互の関係を調べる方法を与える。また、ある種の自明でない (0,3) ような関係が成り立てば、常に $\prod_H h_{K^H}{}^{a_H} = 1$ であることを示す。

§2 では、$G = S_4$ のとき Galois群の作用を用いて得られることを、いくつか述べる。

§3 では、cohomology 的方法により、metacyclic な Frobenius 拡大に対して、1(c) で述べた4つの体の類数間の relation を与える。これは、1(c) での表示とことなり、主要項は、単数群の cohomology 群の積である。これは、1(c) で得られたものと比較して、(0,2)（あるいは (0,4)）のとりうる値の範囲の評価を考えるとき、よりよいものを与えている。

§1. Galois action.

<u>記号</u>：有限次代数体 k, 素数 p に対して、$C_k(p)$, $h_k(p)$ で

k の p-class group，B びその位数をあらわす。

p-class groups に対して，次のような一種の interpolation が成り立つ。

<u>定理 1.</u> abelian category $\mathbb{Z}_pG$-mod から、有限アーベル群のなす abelian category への covariant additive functor F で，

$$F(\mathbb{Z}_pG\underline{H}) \simeq C_{k^H}^{(p)}$$

がすべての G の部分群 H に対して成り立つものが存在する。

ただし、

$\mathbb{Z}_pG$-mod.；有限生成 left $\mathbb{Z}_pG$-modules のなす abelian category,

$\mathbb{Z}_pG\underline{H}$ ；$\underline{H} = \sum_{\sigma \in H} \sigma$ $(\in \mathbb{Z}_pG)$ より生成される $\mathbb{Z}_pG$ の left ideal

である。

<u>定理 1′.</u> abelian category $\mathbb{Z}_pG$-mod. から有限アーベル群のなす abelian category への covariant additive functor F' で，

$$F'(\mathbb{Z}_pG\underline{H}) \simeq \mathrm{Ker}\,(C_{k^H}^{(p)} \longrightarrow C_k^{(p)})$$

がすべての G の部分群 H に対して成り立つものが存在する。

Remark 1. 一般に、abelian categories A，B に対して，A から B への functor F が additive であるとは，任意の A の objects X, Y に対して，F の induce する $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ から $\mathrm{Hom}_B(F(X), F(Y))$ への map が，アーベル群としての homomorphism になっていることである。また，F が additive であれば，つねに，$F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$ が成り立つ。

Remark 2. 定理1'で、$\mathrm{Ker}(C_{K^H}^{(p)} \to C_K^{(p)})$は、拡大$K/K^H$で単項化する$K^H$のイデアル類のなすアーベル群のp-Sylow groupに他ならないから、$F'(\mathbb{Z}_pG) \simeq \mathrm{Ker}(C_{K^H}^{(p)} \to C_K^{(p)}) = 0$である。Remark 1に注意すれば、有限生成projective module Pに対して、$F'(P) = 0$であることが、Pが有限個の$\mathbb{Z}_pG$の直和の直和因子であることよりわかる。

Remark 3. $\mathbb{Z}_pG$-modでは、Krull-Remak-Schmidtの定理が成り立つ。すなわち、有限生成$\mathbb{Z}_pG$-moduleは、直既約な有限生成$\mathbb{Z}_pG$-moduleの直和にかけ、しかもそれは一意的である(C. Curtis-I. Reiner [5]、あるいはI. Reiner [19]をみよ)。

Remark 4. $p \nmid \#G$のときは、$\mathbb{Z}_pG$は$\mathbb{Q}_pG$のmaximal orderとなり、したがって、$\mathbb{Z}_p$-moduleとしてtorsion-freeな有限生成$\mathbb{Z}_pG$-module M, Nに対して、

$M \simeq N$ as $\mathbb{Z}_pG$-module $\Longleftrightarrow$ $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ as $\mathbb{Q}_pG$-module

が成り立つ(I. Reiner [19]をみよ)。

Remark 5. 応用上$\mathbb{Z}_pG\underline{H}$の直既約表現の直和への分解をもとめることが大事であるが、L. Scott [21]より、$\mathbb{F}_pG\underline{H}$のそれをもとめれば十分であることがわかっている。

定理の証明は、比較的容易である。証明は、定理1の場合のみ述べる。

<u>定理1の証明</u>

(a) functor F は次のように定める。

objects の対応； $M\in \mathbb{Z}_pG$-mod に対し，

$$F(M)=\frac{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,J_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,K^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)+\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,U_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)}$$

morphism は，自然に induce されるもの。

ただし，$M^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\mathbb{Z}_p)$ で，M^* は，自然に right $\mathbb{Z}_pG$-module とみなせる。J_K, $K^\times$, U_K は，それぞれ K の idele 群，乗法群，unit ideles の成す群である。また，$X=J_K$, $K^\times$, U_K に対して，$X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ は，X を乗法に関して $\mathbb{Z}$-module とみなしたものであり，演算は additive にかく。$K^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p\hookrightarrow J_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$，及び $U_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p\hookrightarrow J_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ により，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,K^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,U_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$ は，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*,J_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$ の部分群とみなせることに注意する。

(b) $M\in\mathbb{Z}_pG$-mod に対し，$F(M)$ が有限になることが，標準的方法で示せる。

(c) $F(\mathbb{Z}_pG\underline{H})\simeq C_{K^H}(p)$ は，次のよく知られた事実（たとえば，I. Reiner [19] を見よ）による。

① "$\mathrm{Hom}_{RG}(V\otimes_{\mathbb{Z}}R,M\otimes_{\mathbb{Z}}R)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(V,M)\otimes_{\mathbb{Z}}R$" が，$\mathbb{Z}$-flat commutative algebra R，有限生成 $\mathbb{Z}_pG$-module V，及び $\mathbb{Z}_pG$-module M に対して成立。

② $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{RG}(\underline{H}RG, M) & \simeq & M^H . \\ f & \longmapsto & f(\underline{H}) \\ (\underline{H}x \longmapsto mx) & \longleftarrow & m \end{array}$$

③ $(RG\underline{H})^* \simeq \underline{H}RG$ 。 $\square$

定理1を、class number relation へ応用するため、次の記号を導入する。

$a(G)$; Gの部分群の共役類を生成元とする free abelian group.

Gの部分群Hのふくまれる共役類の generator を$[H]$とかく。

$$b_p(G) = \{\textstyle\sum_H a_H[H] \in a(G) \mid \prod_{a_H>0} \mathbb{Z}_pG\underline{H}^{a_H} \simeq \prod_{a_H<0} \mathbb{Z}_pG^{-a_H},\ a_H \in \mathbb{Z}\}$$

; $a(G)$の部分群.

ただし、非負整数aに対して、M^aは、$a=0$のとき、0、$a>0$のときは、Mのa個の copy の直和をあらわす。

$$b_0(G) = \{\textstyle\sum_H a_H[H] \in a(G) \mid \sum_H a_H \left|\frac{G}{H}\right| = 0\}$$

$$b(G) = \bigcap_{\ell:\text{prime number}} b_\ell(G)$$

さて、簡単にわかることを述べておこう。

<u>命題1.1.</u> $\sum_H a_H[H] \in b_p(G)$ ならば、$\prod_H h_{K^H}(\varphi)^{a_H} = 1$ である。

<u>証明.</u> 実際、定理1と Remark1 より、$\prod_{a_H>0} C_{K^H}(\varphi)^{a_H} \simeq \prod_{a_H<0} C_{K^H}(\varphi)^{-a_H}$ が、成り立つ。

<u>命題1.2.</u> $b_p(G) \subset b_0(G)$。$p \nmid \#G$ のときは、$b_p(G) = b_0(G)$。

命題1.3. $\sum a_H[H] \in b(G)$ ならば、$\prod_H t_{KH}^{a_H} = 1$ である。

Gが、巾零群ならば、すべてのpに対して、$b_p(G)$が、簡単にわかる。そのことより、

命題1.4. Gが巾零群であるとする。

$b(G) \neq 0 \iff$ 2つ以上の素数lに対して、Gのl-Sylow subgroupがcyclicではない。

§2. $G = S_4$.

$G = S_4$とし、このとき、定理1及び定理1′より得られることのいくつかの例をあげる。

最初に$\mathbb{Z}_p G/H$の直既約表現の直和への分解を決定しよう。$G = S_4$を、4つの文字a, b, c, dのautomorphism全体と同一視する。Gの部分群の共役類は、11ケあり、その代表系は、次の通りである。

$\{1\}$, $\langle (ab) \rangle$, $\langle (ab)(cd) \rangle$, $\langle (abcd) \rangle$, $\langle (ab), (cd) \rangle$, $H = \{1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)\}$, $\langle H, (ab) \rangle$, $\langle (abc) \rangle$, $\langle (ab), (abc) \rangle$, A_4, G.

$p \neq 2, 3$のとき、$\mathbb{Z}_p$上の直既約表現は、$\mathbb{Q}_p$上の既約表現と同じであるから、$p = 2, 3$のときを求めれば十分である。

$\mathbb{Z}_p G/H$の直既表現の直和への分解は、以下の表の通りである。

$H \backslash p$	3	2
$\{1\}$	$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3^3 \oplus P_4^3$	$P_1^2 \oplus P_0$
$\langle (ab) \rangle$	$P_1 \oplus P_3^2 \oplus P_4$	$P_1 \oplus Q_4$
$\langle (ab)(cd) \rangle$	$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$	Q_7
$\langle (abcd) \rangle$	$P_1 \oplus P_4$	P_0
$\langle (ab), (cd) \rangle$	$P_1 \oplus P_3$	Q_6
H	$P_1 \oplus P_2$	Q_5
$\langle H, (ab) \rangle$	P_1	$Q_3^2 \oplus Q_2$
$\langle (abc) \rangle$	$P_3 \oplus P_4 \oplus Q_1 \oplus Q_2$	Q_4
$\langle (ab), (abc) \rangle$	$P_3 \oplus Q_1$	$Q_3 \oplus Q_1$
A_4	$Q_1 \oplus Q_2$	Q_2
G	Q_1	Q_1

ただし，この表の中の P_*, Q_* は，次のようなものである。

$p=3$ のとき，

$P_1 \sim P_4$; 相異なる projective indecomposable modules,

Q_1, Q_2 ; 相異なる non-projective indecomposable modules.

$p=2$ のとき，

P_0, P_1 ; 相異なる projective indecomposable modules,

$Q_1 \sim Q_7$; 相異なる non-projective indecomposable modules.

Remark. $p \nmid \# H$ のときは，modular 表現よりわかる（たとえば，J. P. Serre [20]）。直既約表現への分解を決定するには，modular

表現に関する事実を利用した。

この表より、

<u>命題2.1.</u>

$$\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_0(G)=6, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_3(G)=5, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_2(G)=2, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h(G)=1. \end{cases}$$

とくに、$h(G)$ の generator として、次のようなものがとれる。

<u>命題2.2.</u> $h(G) = \mathbb{Z}\cdot([\{1\}] + 2[\langle(ab),(abc)\rangle] + 2[\langle H,(ab)\rangle] + [A_4] - 2[\langle(ab)\rangle] - [\langle(abc)\rangle] - [H] - 2[G])$。

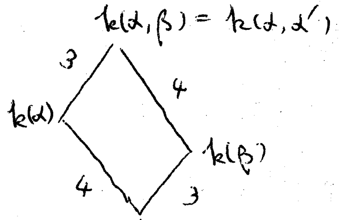
したがって、k と互いに共役ではない8ケの体のイデアル類群の間に、次のようなabel群としての同型が成り立つ。

<u>命題2.3.</u>

$$C_K \oplus C^2_{K^{\langle(ab),(abc)\rangle}} \oplus C^2_{K^{\langle H,(ab)\rangle}} \oplus C_{K^{A_4}} \simeq C^2_{K^{\langle(ab)\rangle}} \oplus C_{K^{\langle(abc)\rangle}} \oplus C_{K^H} \oplus C_k^{\,2}.$$

定理1′及びRemark 2に注意すると、単項化に関して、次のことがわかる。

<u>命題2.4.</u> $\alpha, \beta \in K$ を、$k(\alpha) = K^{\langle(ab),(abc)\rangle}$, $k(\beta) = K^{\langle H,(ab)\rangle}$ となるようにとる。



このとき、

$\mathrm{Ker}(C_k \to C_{k(\beta)}) = \mathrm{Ker}(C_{k(\alpha)} \to C_{k(\alpha,\beta)})$。

ただし、α' は α のある k 上の共役である。

イデアル類群の exponents, divisivilities に関して、たとえ

ば、次のことがわかる。

<u>命題2.5.</u> $p \neq 2$ とする。

(1) C_K の p-exponent $=$ $C_{K^{\langle\langle ab\rangle\langle cd\rangle\rangle}}$ の p-exponent,

(2) $p \mid h_K \Leftrightarrow p \mid h_{K^{\langle\langle ab\rangle\langle cd\rangle\rangle}}$.

§3. $G =$ metacyclic Frobenius group.

この§では、定理1より直ちにわからない場合のclass number relationの一つについて考える。Gに、次のような部分群H, Nが存在すると仮定する。

$G = H \ltimes N$; H, N は cyclic subgroup, N は normal subgroup, H は G の Frobenius 部分群 (i.e. $\forall \sigma \in G \backslash H$, $\sigma^{-1} H \sigma \cap H = \{1\}$), $H \neq \{1\}$, $N \neq \{1\}$.

$a(G)$ の元 $[\{1\}], [H], [N], [G]$ の $\mathbb{Z}$ 係数線型結合で、$b_0(G)$ に属するものは、$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G]$ で生成されている。<u>以下、この元に対応するclass number relationを求める。</u>

<u>命題3.1.</u> (1) $p \nmid \#N$ のとき、

$$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G] \in b_p(G),$$

(2) $p \mid \#N$ のとき、

$$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G] \notin b_p(G).$$

したがって、$p \mid \#N$ のとき、$h_K h_k^{\#H} / h_{KN} h_{KH}^{\#H}$ の p-part,
あるいは $h_K(p) h_k(p)^{\#H} / h_{KN}(p) h_{KH}(p)^{\#H}$ をもとめればよい。ところで、これは、Nの位数が、pの巾の case に還元できるから、以下、Nの位数は、pの巾であると仮定する。

定義 $X(H) = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}_p^{\times})$ ($\#H \mid p-1$ である).

$\chi \in X(H)$ に対して、

$$e_\chi = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi(h^{-1}) h \quad (\in \mathbb{Z}_p H),$$

$$P_\chi = \mathbb{Z}_p G e_\chi,$$

$$Q_\chi = \mathbb{Z}_p G \underline{N} \cdot e_\chi .$$

とおく。

仮定より p は奇素数であることを注意する。

命題 3.2. $0 \to Q_\chi \to P_\chi \to P_{\chi\eta} \to Q_{\chi\eta} \to 0$ (exact)。

ただし、η は、$h^{-1} x h = x^{\eta(h)}$, $x \in N$, $h \in H$ で定めた $X(H)$ の元である。

命題 3.3. right $\mathbb{Z}_p G$-module C に対して、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(Q_\chi^*, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(P_\chi^*, C) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(P_{\chi\eta}^*, C) \arrow[d, "\wr"] & \text{(exact)} \\
& & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} P_\chi \arrow[r] & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} P_{\chi\eta} \arrow[r] & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} Q_{\chi\eta} \arrow[r] & 0 \quad \text{(exact)}.
\end{tikzcd}$$

が成り立つ。ただし、水平方向の exact sequence は、命題 3.2 の exact sequence より induce されたものである。

$C_\chi = C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} P_\chi \quad (\chi \in X(H))$ とおく。まず、明らかに、

(a) $C_K(p) \simeq \prod_{\chi \in X(H)} C_\chi$.

また、$C = C_K(p)$ として、命題 3.3 を適用すると、任意の $\chi \in X(H)$ に対して、

(b) $\# C_\chi / \# C_{\chi\eta} = \# \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(Q_\chi^*, C_K(p)) / \# C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} Q_{\chi\eta}$.

さらに、cohomology の計算より、

(c) $\# \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(Q_\chi^*, C_K(p))$

$$= \frac{h_{K^N}(p,\chi) \cdot \# (E_{K^N} \cap N_{K/K^N}(K^\times) / N_{K/K^N}(E_K))^{e_{\chi\eta}} \times \prod_{\mathfrak{p} : \chi | D_\mathfrak{p} = 1} e_\mathfrak{p}}{\# H^1(N, E_K)^{e_\chi}},$$

(d) $$\# C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} Q_\chi = \frac{h_{K^N}(p,\chi) \cdot \prod_{\mathfrak{p} : \chi\eta^{-1} | D_\mathfrak{p} = 1} e_\mathfrak{p}}{(\# N)^{\delta_{\chi,\eta}} \cdot \# (E_{K^N} / E_{K^N} \cap N_{K/K^N}(K^\times))^{e_\chi}}$$

ただし、

$\delta_{\chi,\chi'}$ は、Kronecker の delta,
E_* は、$*$ の単数群,
$D_\mathfrak{p}$ は、$\mathfrak{p}$ の K^N/k での分解群,
$e_\mathfrak{p}$ は、K^N の $\mathfrak{p}$ 上の素イデアル の K/K^N での分岐指数,
$h_{K^N}(p,\chi) = \#(C_{K^N}(p))^{e_\chi}$,

で、積にあらわれる $\mathfrak{p}$ は、k の素イデアルをわたる。
簡単にわかるように、

(e) $h_{K^N}(p) = \prod_\chi h_{K^N}(p,\chi)$,

(f) $h_{K^N}(p, 1_H) = h_k(p)$.

(a)〜(f) より，class number relation の p-part がわかる。

Remark 1. P_χ, Q_χ を表面に出さなくとも，計算できる。

Remark 2. (c), (d) の証明は，多少，手間がかかる。

Remark 3. 片岡 [12] の定理 2 (2) の証明の中で，(c), (d) を使った。

$\mathbb{Z}_p G$-module として，$\mathbb{Z}_p G \cong \prod_\chi P_\chi$，$\mathbb{Z}_p G \underline{H} \simeq P_{1_H}$，$\mathbb{Z}_p G \underline{N} = \prod_\chi Q_\chi$，$\mathbb{Z}_p G \underline{G} = Q_{1_H}$ の分解が成立する。この Case では，P_χ，Q_χ 間の exact sequences を定理 1 の意味で対応する p-class groups 間の homomorphisms を induce させることによって，ある $h_p(G)$ に属さない $h_0(G)$ の元に対して，(0, 4) の p-part を計算することが出来たわけですが，他の case でも，$\mathbb{Z}_p G \underline{H}$ (H は G の部分群) の直和因子たちの間の関係をまとめ，それを induce させることによって，class number relation をまとめることが出来ればと思っています。しかし，たとえば，maximal type の Frobenius 拡大に対しては，同じ方法では証明することが出来ず，困難な問題であるようにも思われます。

文献

[1] R. Brauer; Beziehungen zwischen Klassenzahlen von

Teilkörpern eines galoisschen Körpers, Math. Nachr., 4, 158 – 174, 1951.

[2] T. Callahan ; The 3-class groups of non-Galois cubic fields I, Mathematika, 21, 72 – 89, 1974.

[3] 〃 ; 〃 II, Mathematika, 21, 168 – 188, 1974.

[4] 〃 ; Dihedral field extensions of order 2p whose class numbers are multiples of p, Canad. J. Math., 28, 429 – 439, 1976.

[5] C. Curtis and I. Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras, Intersc. Pub., New York, 1962.

[6] F. Halter-Koch ; Ein satz über die Geschlechter relativ-zyklischer Zahlkörper von primzahlgrad und seine Anwendung auf biquadratisch-bizyklishe Körper, J. Number Theory, 4, 144 – 156, 1972.

[7] 〃 ; Einheiten und Divisorenklassen in Galoisscher algebraischen Zahlkörpern mit Diedergruppe der ordnung 2 l für eine ungerade Primzahl l, Acta arith., 33, 353 – 364, 1977.

[8] 〃 ; Die struktur der Einheitengruppe für

eine Klasse metazyklischer Erweiterungen algebraischer Zahlkörper, J. reine angew. Math., 301, 147–160, 1978.

[9] F. Halter-Koch et N. Moser; Sur le nombre de classes de certaines extensions métacycliques sur Q ou sur un corps quadratique imaginaire, J. Math. Soc. Japan, 30, 237–248, 1978.

[10] W. Jehne; Über die Einheiten- und Divisorenklassengruppe von reellen Frobeniuskörpern von Maximaltyp, Math. Z., 152, 223–252, 1977.

[11] 片岡 俊孝; イデアル類群と直既約表現, 日本数学会代数分科会予稿集, 1979年10月。

[12] 片岡 俊孝; 岩沢類数公式の一般化, 数理研講究録378 整数論, 47–60, 1980.

[13] T. Kubota; Über die Beziehungen der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers, Nagoya Math. J. 6, 119–127, 1953.

[14] T. Kubota; Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper, Nagoya Math. J., 10, 65–85, 1956.

[15] S. Kuroda; Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper, Nagoya Math. J., 1, 1–10, 1950.

[16] N. Moser ; Unités et nombres de classes d'une extension diédrale de Q, Astérisque, 24-25, 29-35, 1975.

[17] " ; Unités et nombres de classes d'une extension Galoisienne diédrale d Q, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1, 54-75, 1979.

[18] " ; Sur les unités d'une extension galoisienne non abélienne de degré pq du corps de rationelle, p et q nombre premier impaires, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 29, 137-158, 1979.

[19] I. Reiner ; Maximal orders, Academic Press, London, 1975.

[20] J. P. Serre ; 有限群の線型表現，岩波，1974。

[21] L. Scott ; The modular theory of permutation representations, A. M. S. Proc. Sym., 21, 137-144, 1971.

[22] C. D. Walter ; A class number relation in Frobenius extensions of number fields, Mathematika, 24, 216-225, 1977.

[23] " ; Brauer's class number relation, Acta arith., 35, 33-40, 1979.

[24] " ; Kuroda's class number relation, Acta

arith., 35, 41-51, 1979.

追記；§1 の定理1及び1′の Remark の1つを忘れましたので、ここに記します。

Remark 6. H_1, H_2 を G の部分群とすると、double coset $H_1\sigma H_2$ $(\sigma\in G)$ に対して、自然な $C_{kH_1}^{(p)}$ から $C_{kH_2}^{(p)}$ への Galois action による homomorphism が定まる。すなわち、

$$
\begin{array}{rccc}
H_1\sigma H_2 \ ; & C_{kH_1}^{(p)} & \longrightarrow & C_{kH_2}^{(p)} . \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \mathfrak{a}\ (\mathrm{mod.\,principal}) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{\tau\in H_1\backslash H_1\sigma H_2} \mathfrak{a}^{\tau} \ (\mathrm{mod.\,principal})
\end{array}
$$

このようなもの全体が、$C_{kH_1}^{(p)}$ から $C_{kH_2}^{(p)}$ への Galois 群の作用による自然な写像のすべてであるように思われる。ところで、一般に、G の部分群を index とする $\mathbb{Z}_p$-modules の族 $\{C(H)\}_H$、及び任意の G の部分群 H_1, H_2 に対して、$C(H_1)$ から $C(H_2)$ への合成に関してうまくふるまうような $H_1\backslash G/H_2$ の元の作用が、与えられたとき、そのようなものの中で、$C(H)=\mathbb{Z}_pG\underline{H}$, $C(H_1)$ から $C(H_2)$ への作用として double coset の自然な作用を選んだとき、が universal であることを定理1は示しているように思われる。$\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}$ から $\mathbb{Z}_pG\underline{H_2}$ への $H_1\backslash G/H_2$ の元の自然な作用全体の生成する $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}, \mathbb{Z}_pG\underline{H_2})$ の submodule は、丁度 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}, \mathbb{Z}_pG\underline{H_2})$ に一致することに注意。