数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 162-169

例外領域上の theta 関数について

北大 理学部 長岡昇勇

複素27次元空間$\mathbb{C}^{27}$内の例外型 tube 領域$\mathfrak{T}$上の保型形式は W.L. Baily, Jr. によって，研究された[1]. 彼は，この論文の中で上記の領域$\mathfrak{T}$に推移的に作用するE_7型の代数群$\mathfrak{G}$のある算術的部分群Γの性質を調べ，Γに関するEisenstein級数のFourier 展開係数の有理性を証明している.

一方，Jordan 代数に対するtheta関数の一般論は H.L. Resnikoff によって研究がなされている[3]. ここでの目的は，Resnikoff の idea に従って 例外領域$\mathfrak{T}$上のtheta関数を定義し，Γに関する保型形式を実際に構成することにある.

1. 例外領域$\mathfrak{T}$

まず，$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$を実数体$\mathbb{R}$上の Cayley 代数とし，その標準的な basis を $e_0, e_1, \cdots, e_7$で表わす. non associative な

$\mathbb{Q}$-多元環 $\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}e_0 + \mathbb{Q}e_1 + \cdots + \mathbb{Q}e_7$ の中の integral Cayley 数のなす maximal order を，$\mathfrak{O}$ で表わす．$M_3(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}})$ を $\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}$ 上の 3×3 行列全体のなす集合とし，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}} = \{X \in M_3(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}) \mid {}^t\bar{X} = X\}$ とおく．明らかに $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{J}_{\mathbb{R}} = 27$．$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}$ の元 X，Y に対して，$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ と積を定義することにより，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}$ は例外型の単純 Jordan 代数となる．$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}$ 上には多項式関数 det が定義されていることに注意しておく．

$\mathfrak{K} = \{X \circ X \mid X \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}\}$ とおく．さらに $\mathfrak{K}$ の部分集合 $\mathfrak{K}^+$ を $\mathfrak{K}^+ = \{Y \in \mathfrak{K} \mid \det Y \neq 0\}$ で定義する．$\mathfrak{K}^+$ は既約な自己双役等質 cone の一例となっている．

$\mathbb{C}^{27}$ を $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{J}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同一視し $\mathfrak{T}$ をこの中の tube 領域

$$\mathfrak{T} = \{Z = X + iY \mid X \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}},\ Y \in \mathfrak{K}^+\},$$

で定義する．$\mathfrak{T}$ は non compact 型の Hermite 対称空間で例外領域と呼ばれる．

2. 例外領域 $\mathfrak{T}$ 上の theta 関数

まず，次の様な記号を導入する．

$X \in M_{3\times m}(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}})$，$Z \in \mathfrak{J}_{\mathbb{C}}$ に対して $Z\langle X\rangle = \frac{1}{2}\{{}^t\bar{X}(ZX) + ({}^t\bar{X}Z)X\}$

$X, Y \in M_{n\times m}(\mathfrak{C}_{\mathbb{C}})$，$\mathfrak{C}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{C}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ に対して $\mathrm{tr}(X, Y) = \mathrm{trace}\left[\frac{1}{2}({}^t\bar{Y}X + {}^t\bar{X}Y)\right]$．

$M_{3\times m}(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^{24m}$ 内の lattice $\mathfrak{L}$ と $M_m(\mathbb{R}) \subset M_m(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}})$

と見たとき，$V \in M_m(\mathbb{R})$ で ${}^tV = V > 0$（正定値）なる行列 Vを考える．そこで，$\mathcal{L}$とVに付随する，theta関数を

$$\theta_{\mathcal{L}}(Z;V) = (\mathrm{vol}\,\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \sum_{M\in\mathcal{L}} \exp[\pi i\, \mathrm{tr}(Z\langle M\rangle, V)],$$

で定義する．

ここで $Z \in \mathfrak{T}$，$\mathrm{vol}\,\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ の基本領域の，$M_{3\times m}(\mathcal{J}_{\mathbb{R}})$ 上の標準的Haar測度に関する体積を表わす．

主結果の一つは次の様に述べられる．

<u>定理2.1</u>　関数 $\theta_{\mathcal{L}}(Z;V)$ は $\mathfrak{T}$上の正則関数であり，次の変換則を満たす．

$$\theta_{\hat{\mathcal{L}}}(-Z^{-1};V^{-1}) = |-iZ|^{\frac{m}{2}\times 8}\,|V|^{\frac{3}{2}\times 8}\cdot\theta_{\mathcal{L}}(Z;V),$$

ここで $\hat{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の dual lattice，Z^{-1} は Z の Jordan代数として Z の inverse，$|Z| = \det(Z)$.

関数 $f: M_{3\times m}(\mathcal{J}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(X) = \exp[-\pi\,\mathrm{tr}(S\langle X\rangle, V)],$$

で定義する．ここで $S\in \mathfrak{K}^{+}$，Vは上で定義したものとする．

すると，$f(X)$ の Fourier変換は

$$\hat{f}(Y) = \int_{M_{3\times m}(\mathcal{J}_{\mathbb{R}})} \exp[-\pi\,\mathrm{tr}(S\langle X\rangle,V)]\exp[-2\pi i\,\mathrm{tr}(X,Y)]\,dX,$$

ここで dX は $M_{3\times m}(\mathcal{J}_{\mathbb{R}})$上の Haar測度．

定理 2.1 は，次の命題から証明される．

<u>命題 2.2</u>　S と V を上の様にとる．すると，次式が成立する．

$$\hat{f}(Y) = \exp[-\pi \operatorname{tr}(S^{-1}\langle Y\rangle, V^{-1})] \cdot |S|^{-\frac{m}{2}\times 8} |V|^{-\frac{3}{2}\times 8}.$$

<u>命題 2.3</u>　同様の仮定のもとで次式を得る．

$$(\mathrm{vol}\,\mathcal{L}) \sum_{M\in\mathcal{L}} \exp[-\pi \operatorname{tr}(S\langle M\rangle, V)]$$
$$= |S|^{-\frac{m}{2}\times 8} |V|^{-\frac{3}{2}\times 8} \sum_{N\in\hat{\mathcal{L}}} \exp[-\pi \operatorname{tr}(S^{-1}\langle N\rangle, V^{-1})]$$

命題 2.3 は，Poisson 和公式を命題 2.2 に適用して得られる．また，その式は，定理 2.1 の式が，純虚なる $Z \in \mathcal{T}$ 全体に対して成立することを主張しているから，解析関数の性質から定理 2.1 が証明されるわけである．

注意．$m \leq 3$ なる条件のときは，定理 2.1 は $V \in \mathcal{R}^+$ としても成立する．

3．theta関数と保型形式

lattice $\mathcal{L}$ を，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m = M_{3\times m}(\mathfrak{O})$，$\mathfrak{O}$ は integral Cayley 数のなす環，とおいて以下の議論において固定して考える．

次の補題が成立する．

補題 3.1　(1) $\hat{\mathcal{L}}_m = 2\mathcal{L}_m$.

(2) $\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_m = (1/2^4)^{3m}$.

(3) $\theta_{\hat{\mathcal{L}}_m}(Z;V) = (\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_m)^{-1}\,\theta_{\mathcal{L}_m}(Z;4V)$.

前節の定理 2.1 と上の補題 3.1 を組合わせて

$$\theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1};4V^{-1}) = (\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_m)\,\theta_{\hat{\mathcal{L}}_m}(-Z^{-1};V^{-1})$$
$$= (\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_m)\,|-iZ|^{\frac{m}{2}\times 8}\,|V|^{\frac{3}{2}\times 8}\,\theta_{\mathcal{L}_m}(Z;V)$$

を得る．ここで $V = 2E^{(m)}$，$E^{(m)}$：m 次単位行列，と置いてみる．すると，再び補題 3.1 より

(i) $(\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_m)\cdot|V|^{\frac{3}{2}\times 8} = 1$；

(ii) $4V^{-1} = V$.

これより，最終的に．

$$\theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1};4V^{-1}) = \theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1};V) = |Z|^{4m}\,\theta_{\mathcal{L}_m}(Z;V).$$

定理 3.2　$\theta_{\mathcal{L}_m}(Z;2E^{(m)}) = \theta_m(Z)$　と置く．すると

(1) $\theta_m(-Z^{-1}) = |Z|^{4m}\,\theta_m(Z)$

(2) $\theta_m(Z+B) = \theta_m(Z)$　for any　$B \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}} = \{X \in M_3(\mathfrak{o}) \mid {}^t\bar{X} = X\}$.

(2)の結果は定義にもどって　$\exp[\pi i\,\mathrm{tr}(B\langle N\rangle, V)] = 1$ を

確かめればよい

4.例外モジュラー群Γ

前記の例外領域$\mathfrak{T}$の解析的自己同型群は，Freudenthalによって記述された[2].

$$\mathbb{W} = \mathbb{X} \oplus \Xi \oplus \mathbb{X}' \oplus \Xi'$$

$\mathbb{X}$と$\mathbb{X}'$は$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}$と同型なる$\mathbb{R}$-vector空間，$\Xi$と$\Xi'$は一次元$\mathbb{R}$-vector空間，とする

E_7型の代数群$\mathcal{G}$は，$\mathbb{W}$のある quartic form Qと，skew-symmetric bilinear form $\{,\}$を不変にする$GL(\mathbb{W})$の元のなす群として定義される．(詳細は，[1]参照)．すると，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$は例外群E_7の real form $E_{7(-25)}$である．さらに，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$は$\mathfrak{T}$上に推移的に作用し，$\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$をその center $\{\pm id.\}$で割ったものは，$\mathfrak{T}$の解析的自己同型群 $Hol(\mathfrak{T})$に同型である．

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}} / \{\pm id.\} \cong Hol(\mathfrak{T}).$$

$\mathbb{W}$の lattice $\mathbb{W}_{\mathfrak{o}}$を次の様に定義する．

$$\mathbb{W}_{\mathfrak{o}} = \mathbb{X}_{\mathfrak{o}} \oplus \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{X}'_{\mathfrak{o}} \oplus \mathbb{Z}e',$$

$\mathbb{X}_{\mathfrak{o}} = \mathbb{X}'_{\mathfrak{o}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}$，　$e = (0,1,0,0)$　$e' = (0,0,0,1)$.

そこで

$$\Gamma = \{\, g \in \mathcal{G} \mid g\mathbb{W}_{\mathfrak{o}} = \mathbb{W}_{\mathfrak{o}} \,\} \qquad \text{とおく.}$$

Γは例外モジュラー群と呼ばれ，その性質は Baily によって詳しく調べられている．

定理 4.1 (Baily) i) 群Γは，その部分群$P^+_{\mathfrak{o}}=\{P'_B\in\mathcal{G}\mid B\in\mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}\}$と$\iota\in\mathcal{G}$によって生成される．

ただし P'_Bとιは，$\mathcal{T}$の元Zに，$Z\cdot P'_B=Z+B$ (translation)，$Z\cdot\iota=-Z^{-1}$ (Z^{-1}は Jordan algebra inverse)，と作用する．

ii) 群Γは$\mathcal{G}$の maximal discrete な部分群である．

$g\in\mathcal{G}$と$Z\in\mathcal{T}$に対して，$J(Z,g)$を変換gのZにおける函数行列式とする．$J(Z,P'_B)=1$，$J(Z,\iota)=\det(Z)^{-18}=|Z|^{-18}$が確かめられる．そこで偶整数$m>0$について$j(Z,g)^{18m}=J(Z,g)$を満たす保型因子$j(Z,g)$を固定する．例外領域$\mathcal{T}$上の正則関数$f(Z)$が$\Gamma$に関する重さが$l$の保型形式であるとは，

偶整数$l>0$について　$f(Z\cdot\gamma)\,j(Z,\gamma)^l=f(Z)$,

$Z\in\mathcal{T}$，$\gamma\in\Gamma$,

を満たしているときを言う．

これだけの準備のもとに 定理 3.2 は次の様に言い換えられる．

定理 3.2 の系　$\theta_{\mathfrak{L}_m}(Z;\ 2E^{(m)}) = \theta_m(Z)$ は，Γ に関する重さが，$4m$ の保型形式である．

注意．$\theta_m(Z)$ の Fourier 展開の公式も最近得られた．これを使うと，例外領域 $\mathfrak{T}$ 上の singular modular form の例が得られる．

文献

[1] W.L. Baily, Jr., An exceptional arithmetic group and its Eisenstein series, Ann. Math., 91 (1970)

[2] H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I, Proc. Konkl. ned. Akad. Wet., Series A, 57 (1954)

[3] H.L. Resnikoff, Theta functions for Jordan algebras, Invent. Math., 31 (1975)

[4] ――――, Automorphic forms of singular weight are singular forms, Math. Ann., 215 (1975).