数理解析研究所講究録
第411巻 1981年 199-202

Chowlaの定理について

東大 教養学部　藤崎源二郎

S. Chowla [3]は次の定理を証明した.

<u>定理</u>　p, $p \equiv 3 \pmod 4$, を素数とするとき,

$$\cot(\pi a/p)\ ;\ a = 1, \cdots, (p-1)/2$$

は有理数体$\mathbb{Q}$上1次独立である.

この定理の別証明, 一般化がAyoub[1],[2], Hasse [4], Iwasawa[5], Okada[6]により与えられている.

ここでは, 上の定理と関連して, 次の定理がなりたつことを述べる.

<u>定理</u>　mを$(m, \varphi(m)) = 1$であるような奇数とする. 次の(1)～(6)はすべて互いに同値である.

(1)　$\cot(\pi a/m)\ ;\ 1 \leq a < m/2$, $(a, m) = 1$

は$\mathbb{Q}$上1次独立である.

(1′)　cを$(c, m) = 1$である整数としてこれを固定する

とき（とくに $c=2$）

$$\cot(c\pi a/m)\,;\ 1 \le a < m/2\,,\ (a,m)=1$$

は $\mathbb{Q}$ 上1次独立である．

（2） m を法として定義される任意の Dirichlet 指標 χ, $\chi(-1)=-1$, に対して

$$\sum_{a=1}^{m-1} \chi(a)a \neq 0\,.$$

（3） $\tan(\pi a/m)\,;\ 1 \le a < m/2\,,\ (a,m)=1$ は $\mathbb{Q}$ 上1次独立である．

（3'） c を $(c,m)=1$ である整数としてこれを固定するとき（とくに $c=2$）

$$\tan(c\pi a/m)\,;\ 1 \le a < m/2\,,\ (a,m)=1$$

は $\mathbb{Q}$ 上1次独立である．

（4） m を法として定義される任意の Dirichlet 指標 χ, $\chi(-1)=-1$, に対して

$$\sum_{a=1}^{m-1} (-1)^a \chi(a) \neq 0\,.$$

（5） $\sin(2\pi/m)$ が $\cot(2\pi a/m)\,;\ 1 \le a < m/2$, $(a,m)=1$, の有理係数の1次結合として表される．

（6） $\sin(2\pi/m)$ が $\tan(2\pi a/m)\,;\ 1 \le a < m/2$, $(a,m)=1$, の有理係数の1次結合として表される．

とくに，$m=p$ が奇素数のときには，上の (1) − (6) はさらに次の (7)，(8) に同値である．

(7) $(p-1)/2$ 次の行列

$$A = (2\overline{ab^{-1}} - p)$$

は正則行列である．ここで，$c = \overline{ab^{-1}} \Leftrightarrow a \equiv bc\ (p)$，かつ $1 \leq c < p$，であり，$a = 1, \cdots, (p-1)/2$ が行，$b = 1, \cdots, (p-1)/2$ が列を表す．

(8) $(p-1)/2$ 次の行列

$$B = ((-1)^{\overline{ab^{-1}}})$$

は正則行列である．ここで，$\overline{ab^{-1}}$ の意味は上に述べたとおりであり，$a = 1, \cdots, (p-1)/2$ が行，$b = 1, \cdots, (p-1)/2$ が列を表す．

文　献

[1] R. Ayoub: On a theorem of S. Chowla, J. Number Theory, 7 (1975), 105−107.

[2] R. Ayoub: On a theorem of Iwasawa, J. Number Theory, 7 (1975), 108−120.

[3] S. Chowla: The nonexistence of nontrivial linear relations between the roots of a certain irreducible equation, J. Number Theory, 2 (1970), 120−123

[4] H. Hasse: On a question of S. Chowla, Acta Arith. 18 (1971), 275–280

[5] K. Iwasawa: On a theorem of Chowla, 未発表.

[6] T. Okada: On a theorem of S. Chowla, Hokkaido Math. J. 6 (1977), 66–68.

文献[6]は，数理研における講演後に森田康夫氏に教えていただいた．