

## Duffing 型方程式の不規則遷移振動に関する数値解析

早大理工 大石進一

奥村康行

### 1. はじめに

最近、理工学の広い分野において、周期振動や概周期振動よりも更に複雑な振舞いをする非周期振動がカオスと呼ばれ、盛んに研究されるようになってきている。<sup>[1]</sup>このような非周期振動が、非線形電気回路においても生じることは古くから知られており、例えば Cartwright Littlewood (C.L.) 方程式や、Duffing 型方程式で記述される非線形回路に、適当な条件の下でカオスと呼んでもおかしくないような、非常に複雑な非周期振動の生じることが知られている。C.L. 方程式は、van der Pol 方程式に強制項を加えたもので、その方程式に生じる非周期振動解の族については、Cartwright と Littlewood による詳細な研究<sup>[2]</sup>があるが、非常に議論が複雑である。これに対し、Levinson<sup>[3]</sup>は、C.L. 方程式を適当に折れ線近似した方程式にも、同様な非周期解が発生することを証明し、その解の族

の振舞いを現在の Lorentz Plot<sup>†</sup> に対応するようなものを考えて特徴づけることに成功している。Levinson の研究は、C.L. 方程式そのものに対する研究ではないが、C.L. 方程式に非周期解の生じる本質的なメカニズムを明らかにしており、後に Smale<sup>[4]</sup> によって horse-shoe model として抽象化され、horse-shoe model で記述されるような Poincaré 写像をもつような非線形力学系には、C.L. 方程式と同様の非周期解が生じることが明らかにされている。

さて、Duffing 型方程式に生じる非周期解は、いろいろなものが知られているが、本稿では文献[5]で報告されているような次の形の Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = b \sin t \quad (1.1)$$

において、パラメータの値を、例えば  $k=0.1$  のとき  $b=9.9 \sim 13.3$  と取り、適当な初期条件を与えたときに得られる図1のような非周期解の族について調べる。この方程式は、強制項として sine 項をもつので、自然な形で Poincaré 写像が定義で

<sup>†</sup> Lorentz Plot とは、Poincaré 写像の定義域内の一点に、Poincaré 写像を次々と作用させて得られる点を、その定義域上に書きこんで得られる図のことを言う。

き、実験的に Lorentz Plot が得られている<sup>[5]</sup>が、それは図2のようになり、点が無数に平行するように並んでいる点で horse-shoe model によって得られる Lorentz Plot に似ているが、無数に折れ曲がり点を持つ点で horse-shoe model では説明することのできない、より複雑なものである。本稿では、Levinson の手法に従い、式(1.1)を折れ線近似した方程式を取り扱い、(1)折れ線近似した方程式にも、式(1.1)に現われる非周期解と同様な解の族が存在することを数値的に確かめ (2)その解の族によって与えられる Poincaré 写像を数値的に求め、horse-shoe model に対応する S 字 model を導入して、このような非周期解の族の特徴づけを与えている。

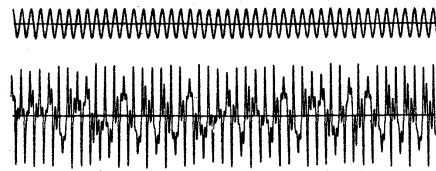


図1 式(1.1)で記述される系に生じる非周期定常振動波形 (文献[5]より転載)

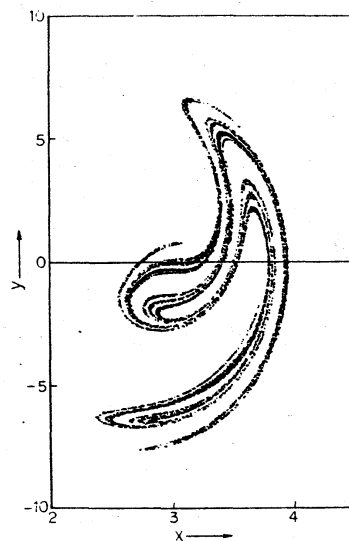


図2 式(1.1)の Lorentz Plot (文献[5]より転載)

## 2. 非周期定常振動波形に対する考察

1. で述べたように、本稿では Duffing 方程式 (1.1) を次のように折れ線近似した方程式を考える：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = b \sin t \quad (2.1)$$

但し

$$f(x) = \begin{cases} \beta x - 0.7(\beta - \alpha) & x \geq 0.7 \\ \alpha x & |x| < 0.7 \\ \beta x + 0.7(\beta - \alpha) & x \leq -0.7 \end{cases} \quad (2.2)$$

で、 $\alpha$  は 0.2、 $\beta$  は 12 とする。また、 $k = 0.1$ 、 $b = 12$  とする。式 (2.1) の解は、領域  $|x| \geq 0.7$  及び  $|x| < 0.7$  では厳密に求めることができ

$$x(t) = a_1 e^{-\frac{k}{2}t} \sin \omega_1(t + \phi_1) + h_1 \sin(t + \theta_1) \pm 0.7 \frac{\beta - \alpha}{\beta} \quad \text{for } |x| \geq 0.7 \quad (2.3)$$

$$x(t) = a_2 e^{-\frac{k}{2}t} \sin \omega_2(t + \phi_2) + h_2 \sin(t + \theta_2) \quad \text{for } |x| < 0.7 \quad (2.4)$$

但し

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sqrt{4\beta - k^2}}{2} & \omega_2 &= \frac{\sqrt{4\alpha - k^2}}{2} \\ \theta_1 &= \text{Arctan} \frac{k}{1 - \beta} & \theta_2 &= \text{Arctan} \frac{k}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h_1 = \frac{b}{\sqrt{k^2 + (\beta - 1)^2}} \quad h_2 = \frac{b}{\sqrt{k^2 + (\alpha - 1)^2}}$$

となる。本稿では、この二つの領域での解を数値的に接続してゆくことによって、式(2.1)を積分する方法を用いている。このような方法によって、式(2.1)の解を数値的に求めてみると、式(2.1)にも、式(1.1)の図1に示されているような非周期解と同様な解が現われることがわかる。図3に、そのような式(2.1)の非周期解の例を示す。

この図を見ると、解はほぼ外力と同期しているので、 $\alpha=0$ のレベルで解を接断すると、非周期解は図4に示されているようなa, b二種類の波形が、非周期的に接続されて得られることがわかる。正確には、a形及びb形の切断された波形とは、各々、三つの山を

もつものと、一つ又は二つの山をもつもの、というように定める。本節では、これらの二種類の波形が、どのように作られるかを考える。そのために、各パラメータの値を、式(2.3)と式(2.4)に代入すると

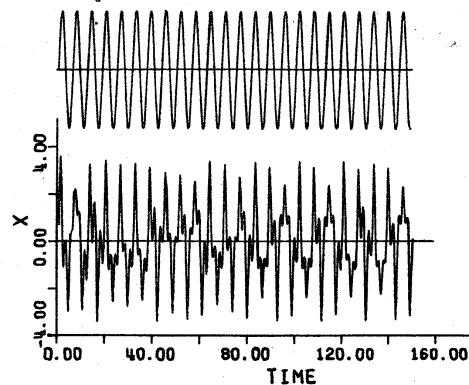


図3 式(2.1)で記述される系に生じる非周期定常振動波形

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{-0.05t} \sin 3.464(t + \phi_1) \\ &\quad + 1.09 \sin(t + 0.0003\pi) \pm 0.6883 \quad |x| \geq 0.7 \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_2 e^{-0.05t} \sin 0.4444(t + \phi_2) \\ &\quad + 14.88 \sin(t - 0.960\pi) \quad |x| < 0.7 \quad (2.7) \end{aligned}$$

となる。  $|x| > 0.7$  の場合(式(3.1))、第二項は外力の応答を表わし、それに対して第一項は初期条件によって振幅  $a_1$  も位相  $\phi_1$  も自由にとって重ね合わせることできる固有振動項である。また、固有振動項は、外部励振の応答の三倍強に当る周波数をもっている。これは、 $\beta = 12$  と選んだことが効いており、このことにより、外力の応答の波形に対して三倍強の周波数の波形を重ね合わせる事ができる。従

って、a形の波形の場合は、図4(a)のように、外力の応答の波形に対し、固有振動の波形は山と山が重なるような位相になり、振幅は外力の応答の半分程度しか持たないような場合

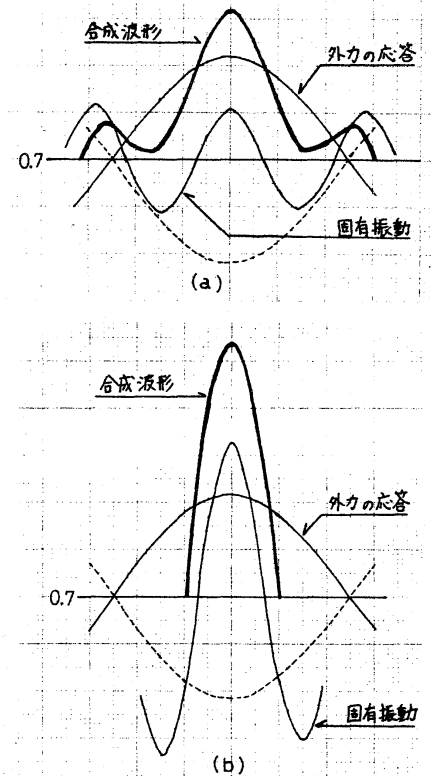


図4 a形波形とb形  
波形の作られ方

に作られる。一方、b形波形の場合も、外力の応答の波形に対し、固有振動波形の位相は、a形波形の場合と同様に両者の山がほぼ重なるようになる。しかし、振幅に関しては、固有振動の方は、外力の応答のそれに対し、1.5倍程度と大きいので、重ねあわせた波形はb形の急峻な波形となる。

また、文献[5]に、方程式

(1.1)で規定される系には、

周期定常振動が生じることも報告されている(図5参照)

。この波形の作られ方は、非周期振動波形と違って、外力の応答波形の山に対して、固有振動の谷が重なるような位相となる。振幅に

関しては、固有振動の方は、外力の応答の0.8倍程度と考えられる。

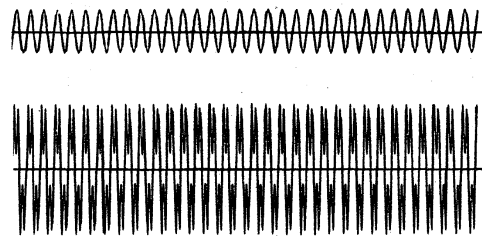


図5 式(1.1)で記述される系に生じる周期定常振動波形(文献[5]より転載)

### 3. 新しい写像による考察

次に、図3で示された式(2.1)の解の波形は、上述のa形とb形の波形の連結したもののなので、このことを利用して、次の二つのパラメータ $t_r$ 及び $|\dot{x}_r|$ を導入する。即ち、 $t_r$ は切断

された波形が  $|x| < 0.7$  の領域から、 $|x| > 0.7$  の領域へ向かうために初めてレベル  $|x| = 0.7$  を横切る時刻とし、 $|x_r| \equiv |x(t_r)|$  とする。但し、 $t_r$  は外力の半周期  $\pi$  で規格化しておく。これは、時間が  $\pi$  だけ経過するごとに、外力の絶対値の相が同じになることから可能である。図6に、a及びb形の各々の波形に対応する、パラメータ  $t_r$  と  $|x_r|$  の領域を示した。このような領域を、以下、各々a及びb領域と呼ぶことにする。この二つのパラメータを用いて、非周期定常解がどのようにして生じるかを考察する。その為に、領域a、bの値を初期値にもつ切断された波形の次に来る波形のパラメータ  $t_r$  及び  $|x_r|$  が、どのようになるかを数値的に調べた。図7が、その結果である。図7(a)、(b)は、各々a及びb領域の像を示している。この結果から、一度a及びb領域の合併に入った解は、定常的になることがわかる。実際、図7(a)は、a形波形の次には必ずb形波形が来ることを示し、図7(b)は、b形波形の次には、a又はb形波形が来るこ

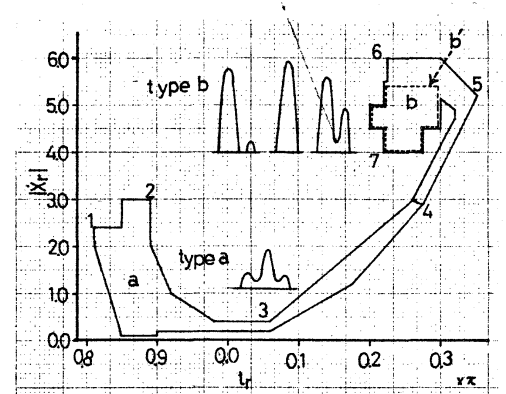


図6 a形波形とb形波形に対応する、二つのパラメータ  $t_r$  と  $|x_r|$  の領域



とを示しているからである。  
 また、図7(c)は、図6に於いて、破線で囲んだ領域 $b'$ の像を示している。この領域 $b'$ は、 $b$ 領域の一部であり、図7(a)の $a$ 領域の像を含みながら、なるべく小さくしたものである。従って、上述のような解は、非周期的となることが予想される。それは、例えば式(2.1)の解が一たん $a$ 領域に入った場合を考えると、次には必ず図6の $b$ 領域内に入るが、この領域 $b$ は次には図7(c)のように $a$ 領域と $b$ 領域の両方にまたがって写像される。従って、引きつき条件が $b$ 領域内であっても、その微小な差によって、次に $a$ 形になるか $b$ 形になるが異なってくることもある。別の例とし

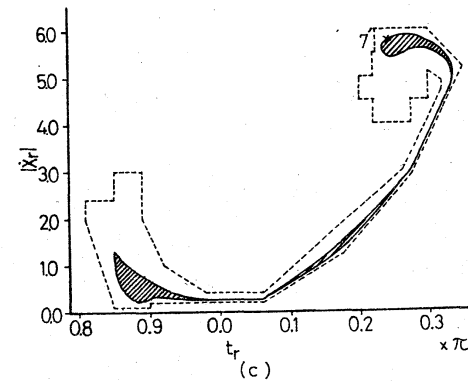
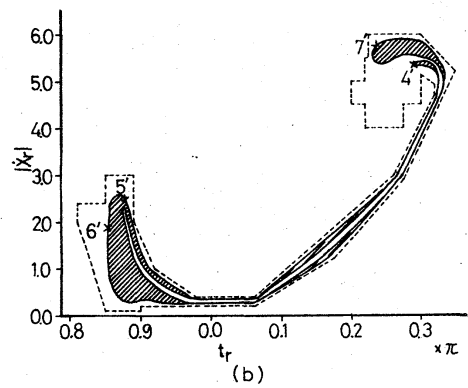
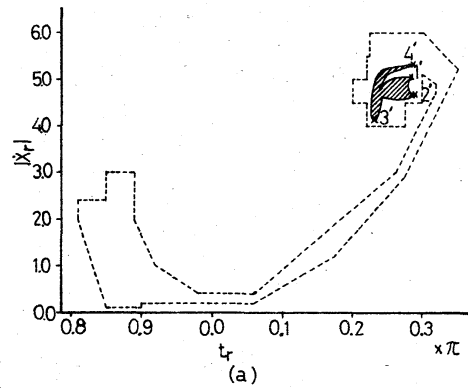


図7 解の引きつき条件によって定義される写像による、 $a$ ,  $b$ 及び $b'$ 領域の像

て、式(2.1)の解が**b**領域内に入った場合を考えても、図7(b)のように**b**領域は、その次に**a**領域と**b**領域にまたがって写像されるので、前と同様に引きつき条件が微妙に異なるだけで、次に**a**形波形が来るか**b**形波形が来るかが変わってしまう場合がある。以上のように、引きつき条件の微妙な差によって、次に現われる波形が全く違ってしまうことがあるので、式(2.1)に生じた図3のような解は非周期的となることが予想される。尚、本章で述べたような、方程式の非線形性を折れ線近似して、解の引きつき条件を調べることによって、その方程式に非周期解が存在することを示すという方法は、Levinson が文献[3]で、C.L.方程式に適用している。そこでは、数学的に厳密に非周期解の存在を証明している。しかし、式(2.1)の場合は、図6のように引きつき条件の領域の大域的な構造によって非周期解が生じている。従って、本報告では、数値的な方法でしか説明できなかったが、これを厳密に議論することは、今後の問題として残す。

#### 4. 離散力学系モデル

文献[5]では、Lorentz Plot により  $t_n = t_0 + 2n\pi$  ( $0 \leq t_0 < 2\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ごとに、解がどのように移りかわるかが報告されている。即ち、 $(x, \dot{x})$  という位相面上に、非周期的な定常

解  $x(t)$  に対応して、 $(x(t_n), \dot{x}(t_n))$  という点を、 $t_n$  ごとに書きこんでゆく。すると、その点の作る軌道は、図2のように非常に多くの折れ曲がり点をもつ、一次元多様体状の軌道となることが示されている。本章では、離散力学系モデルを構成して、なぜそのような軌道が現われるかを考察する。

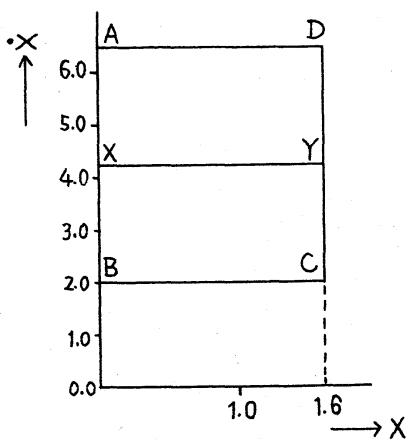


図8 領域X

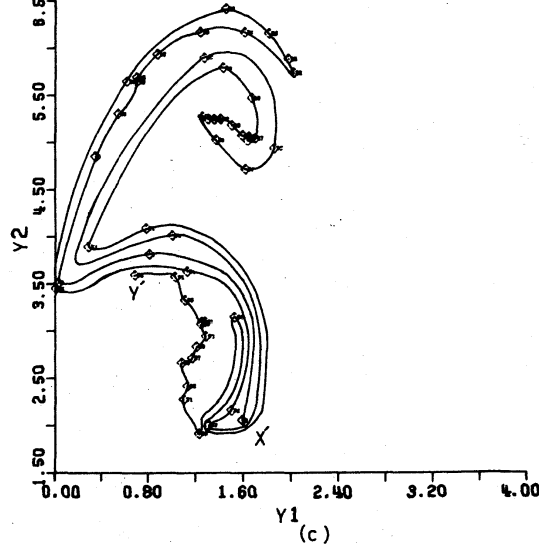
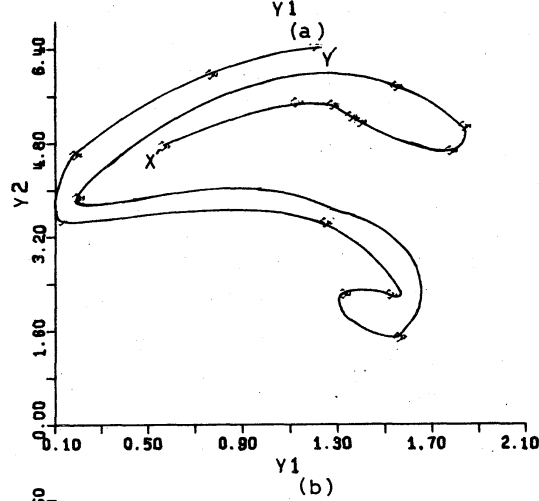
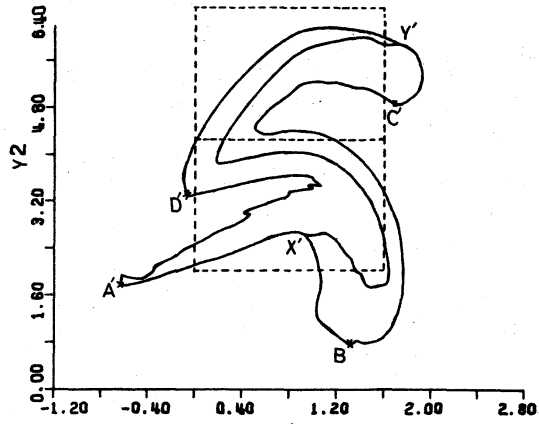


図9 領域Xの写像P, P<sup>2</sup>及びP<sup>3</sup>による像

前章での結果から、時刻  $t_0 = 0.3\pi$  に於いて式(2.1)に生じる非周期的な解  $x(t)$  は、位相平面上の領域  $X = \{(x, \dot{x}); 0 \leq x \leq 1.6, 2.0 \leq \dot{x} \leq 6.5\}$  を通ることがわかる。この領域  $X$  上に、次のような写像  $P$  を定める。即ち、式(2.1)の解  $x(t)$  を用いて、 $P$  は  $x_0 = (x(t_0), \dot{x}(t_0)) \in X$  を、 $y = (y_1, y_2)$  に、 $y_1 = -x(t_0 + \pi)$ 、 $y_2 = -\dot{x}(t_0 + \pi)$  となるように写像するものと定義する。明らかに、 $P^2$  がいわゆる Poincaré 写像である。数値計算によって調べたところ、図8の領域  $X$  は、写像  $P$  によって、図9(a)のような領域へ写されることがわかった。また、同図(b)、(c)は、各々、領域  $X$  の  $P^2$  及び  $P^3$  による像である。但し、図8と図9では、各々の代表的な点に付した記号は、写像  $P$  あるいは  $P^2$ 、 $P^3$  によって対応している。また、図9(b)、(c)では、図が見にくくなるのを避けるため、領域  $X$  中の直線  $XY$  の  $P^2$  及び  $P^3$  による像だけを示した。これらの図を見ると、 $X$  という長方形の領域は、写像  $P$  によって、S字形の領域に写像されることがわかる。また、折れ曲がり点が無数に現われることも予想される。一方、式(2.1)のパラメータ  $k$  を  $0.3 \sim 0.1$ 、 $b$  を  $12 \sim 9$  と変化させると、領域  $X$  の写像  $P$  による像も、図10のように変化する。全体的な傾向として、ダンピングタームの係数  $k$  が増すと、点  $A'$  が右へ移動して、S字の左下の部分が退化する。また、外力の振幅が減ると、 $A'$  と  $D'$  が近づく。

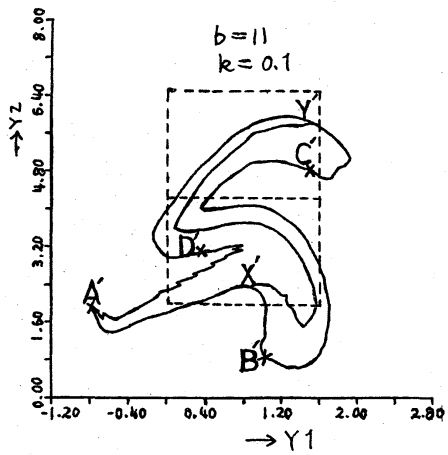
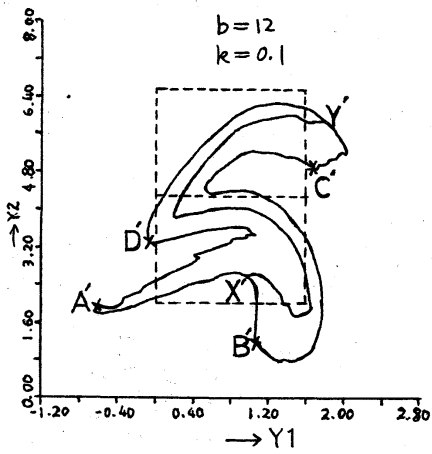
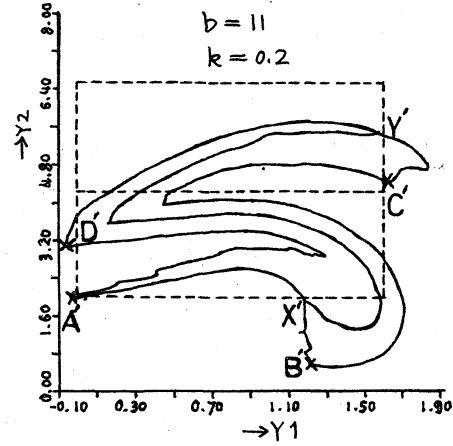
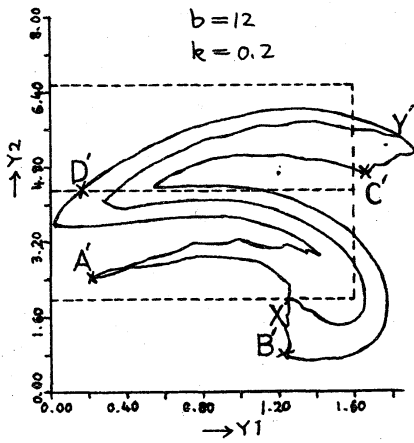
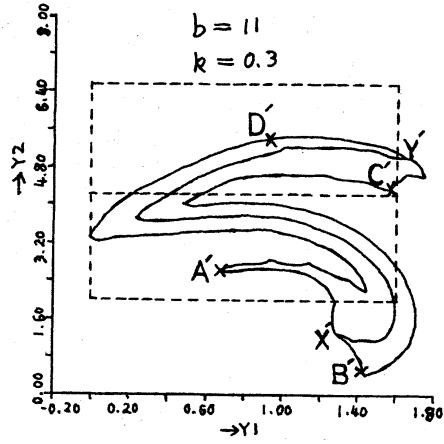
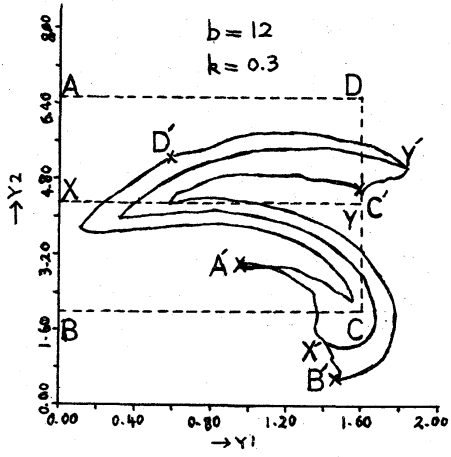


図10 その1

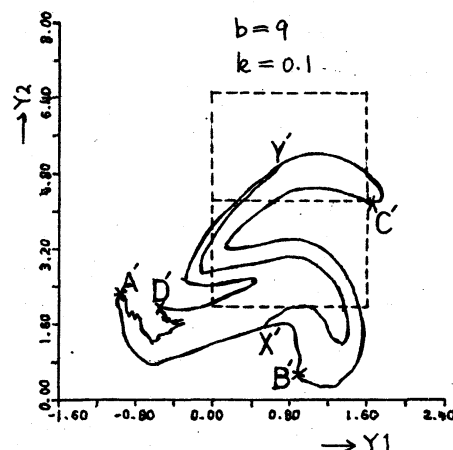
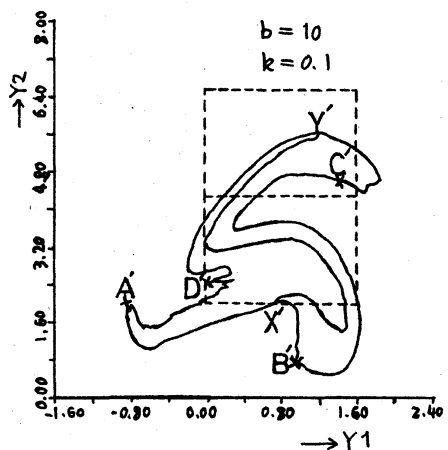
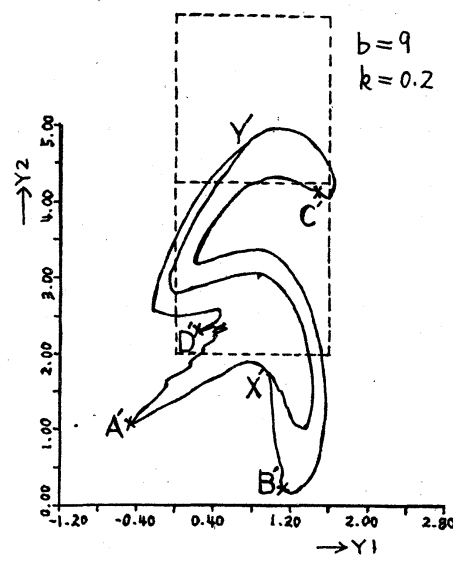
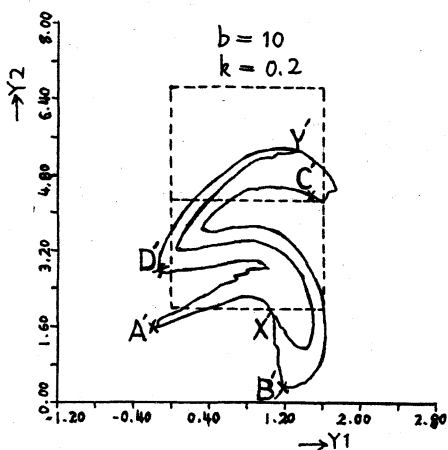
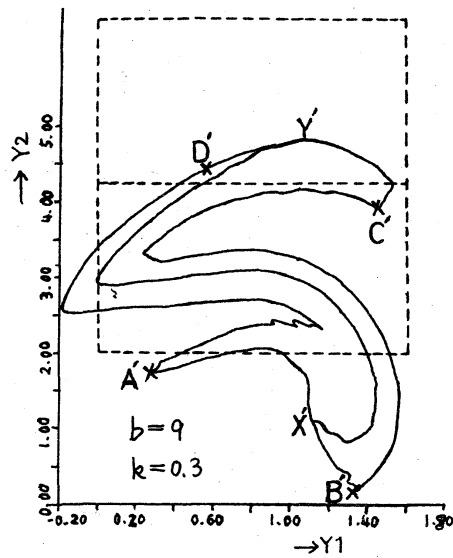
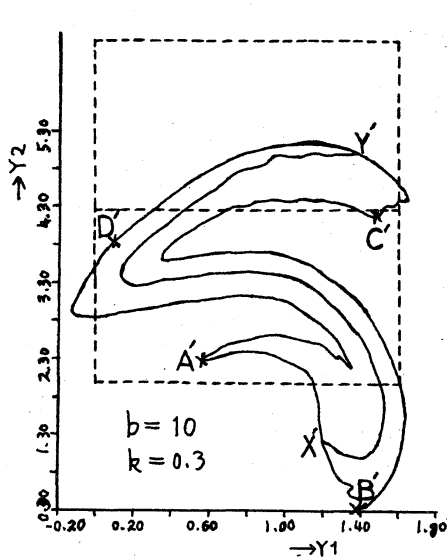


図10 その2 領域Xの写像Pによる像

次に、実験で得られた図9 (a)の図形を単純化して、モデルを作ってみる。この図形がS字形であることを強調して、図11(a)の正方形を、横方向に引きのばして、折りたたみ

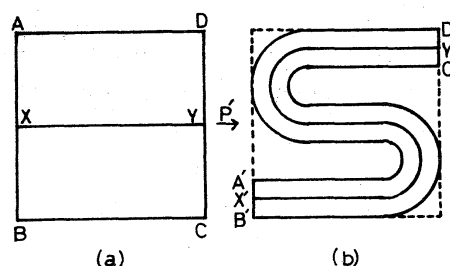


図11 離散力学系モデル

、同図(b)の図形に写すような写像 $P'$ を考える。簡単のため、これをS字写像と名づける。但し、図11(a)の点Aは、同図(b)の点 $A'$ へ、というように(a)の点が(b)の点に写像されている。すると、図11(a)の図形に写像 $P'$ を何回も作用させると、図9 (b)(c)と同様に、図2のような非常に多くの折れまがり点をもつ、一次元多様体状の軌道が作れることが予想される。

## 謝辞

日頃、御指導頂く、本学の堀内和夫教授に、深謝致します。

## REFERENCES

- [1] D.Ruelle, F.Takens: Commun. Math. Phys. 20 ('71) 167-192
- [2] M.L.Cartwright, J.E.Littlewood: J. London Math. Soc. 20 ('45) 180-189
- [3] N.Levinson: Ann. of Math. (2) 50 ('49) 127-153
- [4] S.Smale: Bull. Amer. Math. Soc. 73 ('67) 747-817
- [5] 上田: 電学論A 53-A 22 ('78) 47-53
- [6] T.Y.Li, J.A.Yorké: Amer. Math. Monthly 82 ('75) 985-992