

## 回路モデルに関連した不変閉曲線の計算

徳島大工 川上博

### 0. 問題の提起

発振器に周期的外力を加えた系の状態方程式は外力のある van der Pol 方程式などで記述されるが、このような系ではしばしば概周期解のみられることがある。この概周期解は系の方程式から導き出される Poincaré 写像の不変閉曲線が対応する。現在のところ有効に概周期解を求める方法はあまり知られていないようであるが、1 方法として Poincaré 写像の不動点か Hopf 分岐、不変閉曲線が生じる場合、分岐の直後においては不動点の近傍で Poincaré 写像を多項式近似し、得られた差分モデルの不変閉曲線を計算することが考えられる。他方簡単な非線形（たとえば 2 次あるいは 3 次の多項式）特性を持つ差分モデルの中にも不動点の Hopf 分岐、生じた不変閉曲線の複雑な分岐を経てカオス状態に至るといった過程の存在することが実験的に観察されている<sup>(1)</sup>。これらのことから差分モデルの不変閉曲線とその安定性（分岐）の検討が問題となってくる。

ここでは自律系差分方程式：

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (0.1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が不変閉曲線を持つとき、これを三角多項式で近似することを考えた。この方法は常微分方程式の周期解を計算する占部・カレルキン法と同じである<sup>(2)</sup>。計算の結果不変閉曲線が比較的なめらかなパラメータではうまく計算できるが、なめらかさが失われ始めると Fourier 級数の高次の係数が大きくなって計算が困難となった。これらの数学的問題は未解決であり、また方法自身の検討も十分行っていない。以下では問題提起の意味で数値例をあげておいた。<sup>(3)</sup>

## 1. 不変閉曲線の Galerkin 近似

今 (0.1) が不変閉曲線を持つと仮定し、これを Fourier 級数

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \quad (1.1)$$

で近似することを考える。(1.1) で  $\omega$  は未知であり、これが無理数のとき軌道は閉曲線となる。時間スケールを  $\tau = \omega t$  と変換し

$$x(\tau + \omega) = f(x(\tau)) \quad (1.2)$$

$$x(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau \quad (1.3)$$

で表わされる式 (1.2) の解 (1.3) を考える。式 (1.2) は自律系であり、解 (1.3) が存在するとすれば時間シフトが自由なのでこれを固定するため閉曲線に横断的な 1 つの cross section を定める。これを

$$l(x(\tau)) = 0 \quad (1.4)$$

とね。  $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  はたとえは"適当な座標軸への射影"とする。 また具体的な計算では式(1.3)を  $m$  次で打ち切った  $m$  次近似解:

$$x_m(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau \quad (1.5)$$

を計算することにする。

$$\text{式(1.5)を式(1.2)に代入し } x_m(\tau+\omega) = P_m f(x_m(\tau))$$

( $P_m$  は  $m$  次高調波までへの射影) より, 定数項,  $\sin$ ,  $\cos$  の各係数と比較し,  $m$  次の Galerkin 決定方程式:

$$\begin{aligned} F_{c0}(a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m, \omega) &= 0 \\ F_{c i}( \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad ) &= 0 \\ F_{s i}( \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad ) &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.6)$$

を得る。式(1.6)および式(1.4)を未知数  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m, \omega$  について Newton 法により解き式(1.2)の閉曲線の近似を得る。  $f$  が多項式非線形の場合にはこれらの一連の計算は容易に行うことができる<sup>(3)</sup>。残差として

$$r = f(x_m(\tau)) - P_m f(x_m(\tau)) \quad (1.7)$$

が考えられ, 常微分方程式の周期解の計算では  $r$  が十分に小さい場合,  $\text{sup norm}$  で  $r$  と同じ order の近傍に真の解が存在することが<sup>(4)</sup>言えるが, この問題ではこれらの検討が困難である。

## 2. 計算例

2階スカラー方程式(1):

$$x(t+2) - ax(t+1) + (b - cx^2(t))x(t) = 0 \quad (2.1)$$

に与えられる不変閉曲線の計算例をあげる。図1の斜線領域で不変

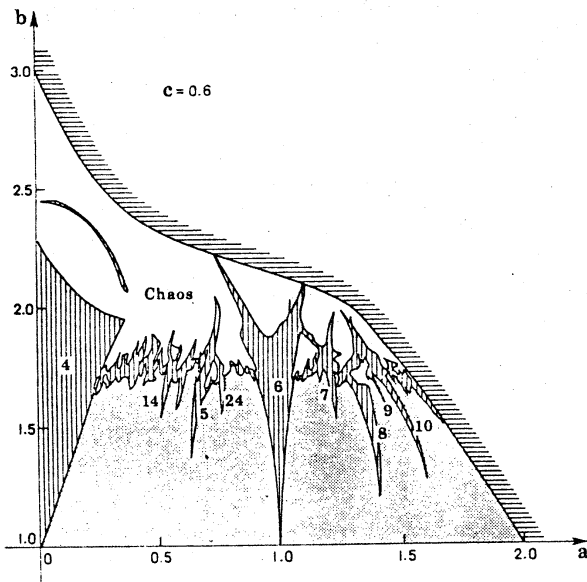


図1. 式(2.1)で不変閉曲線の存在する領域.  
斜線領域で不変閉曲線が与えられる.  
数字は周期数と周期を表わす.

閉曲線が存在すること直接計算により観察されている。

今  $T = \omega t$  と変換し、解(1.5)と計算する。cross sectionとして

$$x(\omega) = 0 \quad (2.2)$$

を選んだ。なお式(1.6)を解く際Newton法の近似解としては  $m=1$  とした  $q_0, q_1, \omega$  を用いた。

### (a) 計算例 (その1).

$a=0.5, b=1.2, c=0.6$  の

場合:  $m=20$  として計算

した結果は表1の通りである。

k	$a_k$	$b_k$
1	.639390	-.145618
3	.023721	.005996
5	.003957	.000820
7	.000418	-.000137
9	.000061	-.000134
11	-.000021	-.000018
13	.000006	-.000002
15	.000003	.000001

Omega = 1.321193

表1. 式(2.1)の解のFourier係数と周期 $\omega$ .  
 $m=20$  とした。記入のない成分は.000000  
である。(単精度計算による).

この例では決定方程式の求根誤差:  $r_1 = |F_{c0}| + \sum_{k=1}^m |F_{ck}| + |F_{sk}| \cong .456 \times 10^6$ ,  
 打ち切り誤差:  $r_2 = \sum_{k \geq m+1} |F_{ck}| + |F_{sk}| \cong .515 \times 10^{-7}$  程度であり,  $m=20$  で  
 十分良い結果が得られた。

(b) 計算例(例2) :  $a=0.5, b=1.7, c=0.6$  の場合.

$m=20$  として計算した結果は  
 表2の通りである。この例では  
 $r_1 \cong .885 \times 10^{-6}$   
 $r_2 \cong .103 \times 10^{-1}$

程度であり, 決定方程式は  
 求根できているが, 打ち切り  
 誤差が大き,  $m=20$  では不十分  
 である。ところが表2の近似  
 解でもある程度の近似となっ  
 ていることは不変閉曲線を描  
 いてみるとわかる。これを図2,  
 図3に示した。図2は(2.1)  
 より直接計算した曲線と表2  
 図3は表2の近似解から求めた  
 曲線を示している。

表2. 計算例(例2)のFourier係数.

k	$a_k$	$b_k$
1	1.169048	-.038191
3	.007800	.141621
5	-.131524	.057977
7	-.068179	.004765
9	-.065097	.003782
11	-.026935	.010995
13	-.032822	.012216
15	-.000709	.001960
17	-.001672	.011434
19	-.003380	.014335

$\Omega = 1.368761$

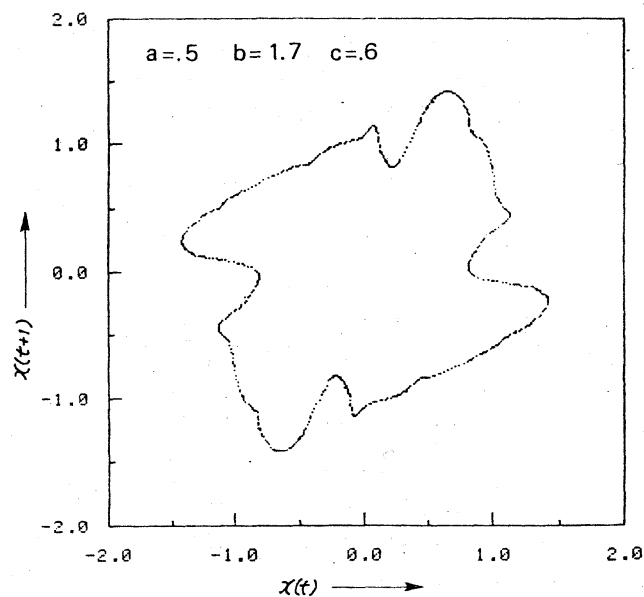


図2. 計算例(例2)の不変閉曲線.  
 式(2.1)から直接計算した結果.

更に  $a=0.5, b=2.0, c=0.6$  とした場合には図3のようなカオスがみられる。この場合には  $M=20$  程度では決定方程式も求根できなかった。これは方程式にすでに不変閉曲線が存在しないためか、初期近似値の与え方が悪いのか、その他  $\alpha$  要因等が考えられるが未検討である。

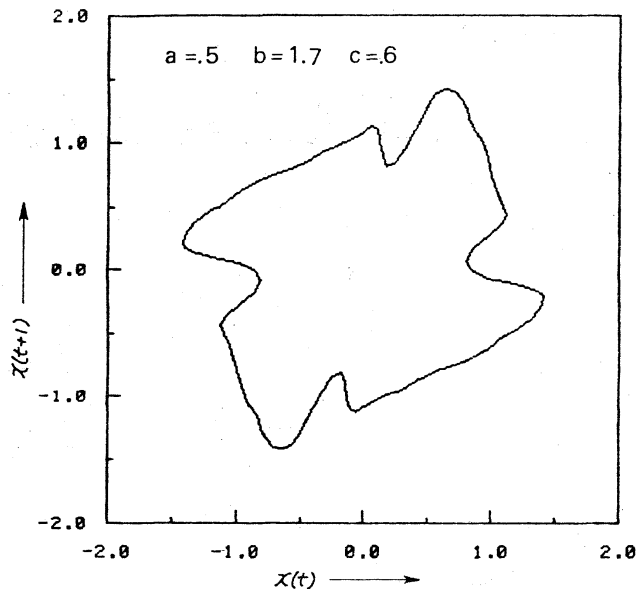


図3. 不変閉曲線の近似曲線、表2の近似解による。

文献

- (1) 川上博: 回路モデルにみられる strange attractor の例. 数理研講究録 370.
- (2) 占部実: 非線形振動の数値解析的研究. 数理研講究録 216.
- (3) 川上博, 小林邦博: 占部カレキソ法による周期解の計算法, 電子通信学会非線形問題研究会資料 NLP 80-8 (1980).
- (4) A. Stokes: On the approximation of Nonlinear Oscillators, J. Diff. Equations, Vol. 12, 535-558 (1972).

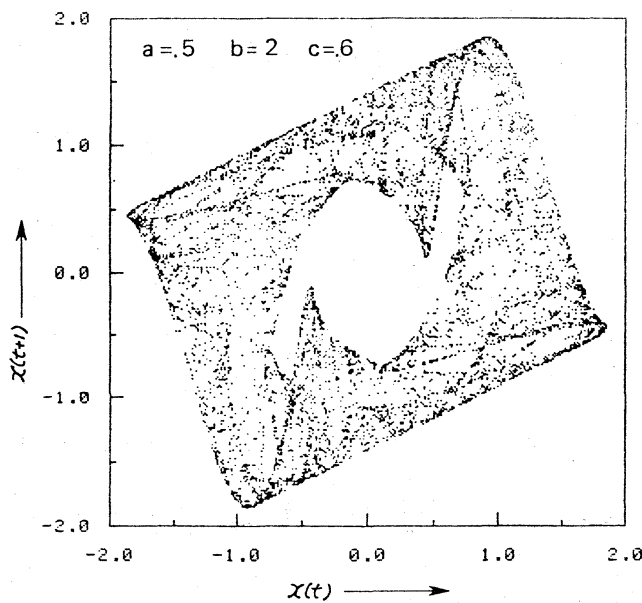


図4. 式(2.1)にみられるカオスの例。