

## Wild horseshoe and topological entropy

東海大 情報数理 郡山 杉

東工大 情報科学 永頼輝男

### § 0. 序

この報告で、Wild horseshoe を定義し、その topological entropy を計算する。さらに、一つの応用として、compact mfd. 上の expansive homeo. の class の性質を調べる。 $M$  を compact  $m$ -mfd. とし、 $\text{Hom}(M)$  を  $M$  上の homeo. 全体の作る metric space とする。metric は、

$$d(f, g) = \sup \{ d(f(x), g(x)) ; x \in M \}.$$

$E(M)$ ,  $E^k(M)$ ,  $E^{ak}(M)$  によって、それぞれ expansive homeo. 全体, entropy-expansive homeo. 全体, asymptotically entropy-expansive homeo. 全体の集合とする。この時次の結果を得る。  
定理. wild horseshoe は asymptotically entropy-expansive ではない。従って、expansive ではない。

系.  $M$  を compact  $m$ -mfd ( $m > 1$ ,  $m \neq 4$ ) とする。  $E^k(M)$  も  $E^{ak}(M)$  も  $\text{Hom}(M)$  で interior point を持たない。

注意. 系に述べた結果は, [YN]の結果からも示せる.

### §1. 定義と記法.

エルゴード理論の基本的定理に関しては, [DGS]を参照. また,

PL-Topology に関しては, [HD]を参照.

$X = (X, d)$  を compact metric space,  $f: X \rightarrow X$  を homeo. とする.

$E$  および  $S$  を  $X$  の subset とする.  $n$  を正整数,  $\delta > 0$  とする.

$S$  が  $E$  を  $(n, \delta)$ -span するとは, 各  $y \in E$  に対して,  $x \in S$

が存在し,  $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta$  for all  $0 \leq k < n$

を満たすことである.  $r_n(E, \delta) = r_n(E, \delta, f)$  を,  $E$  を  $(n, \delta)$ -

span する集合の cardinality の最小値とする. compact set  $K$

に対して,  $\bar{r}_f(K, \delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(K, \delta)$ ,

$$h(f, K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{r}_f(K, \delta)$$

とおく.  $X$  が compact であるので  $h_{\text{top}}(f) = h(f, X)$  である.

ここに,  $h_{\text{top}}(f)$  は,  $f$  の topological entropy を表す.

各  $x \in X$  および  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n} B_\varepsilon(f^n(x)) = \{y \in X; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$h_f^*(\varepsilon) = \sup \{h(f, \Gamma_\varepsilon(x)); x \in X\}$$

とおく. ここに  $B_\varepsilon(\dots)$  は  $\varepsilon$ -近傍を表す.

$f$  は,  $h_f^*(\varepsilon) = 0$  for some  $\varepsilon > 0$  のとき, entropy-expansive,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_f^*(\varepsilon) = 0$  のとき, asymptotically entropy-expansive と呼

ばれる.

## §2. Wild horseshoe

2.1. 定義.  $B = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ ,  $W_k = [-1, 1] \times \{\frac{k}{n}\}$

$k = 0, 1, \dots, n$  とする.  $\eta_n: B \rightarrow B$  を次の様な homeo. とする. (1)  $\eta_n|_{\partial B} = \text{id}$ .

(2) 各  $k = 0, 1, \dots, n$  に対して,

$$\begin{cases} \eta_n(W_k) \subset [-1, 1] \times [-2, -1] & \text{if } k \text{ is even,} \\ \eta_n(W_k) \subset [-1, 1] \times [1, 2] & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

$\eta_n$  を type  $n$  の horseshoe と呼ぶ ([SS] 参照).

2.2. 補題.  $C$  を 2-cell,  $g: B \rightarrow C$  を homeo. とすると,  $h_{\text{top}}(g \circ \eta_n \circ g^{-1}) \geq \log n$  である.

証明. [YN] 参照.

2.3. 定義.  $B_n = [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \times [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$  とし,

$\xi_n: B \rightarrow B$  を次の様な affine map とする.

$$\xi_n(-2, 2) = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}), \quad \xi_n(2, 2) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$$

この時,  $\{B_n; n=1, 2, \dots\}$  は,  $B$  内の, 互に交わらぬ 2-cell の集合とする.  $\phi_0: B \rightarrow B$  を次の様な homeo. とする.

$$(1) \phi_0|_{B_n} = \xi_n \circ \eta_n \circ \xi_n^{-1}, \quad (2) \phi_0|_{(B - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)} = \text{id}.$$

この map  $\phi_0$  を,  $B$  上の wild horseshoe と呼ぶ.

2.4. 補題.  $\theta: B \rightarrow B$  を  $\theta(x, y) = (x, -y)$  で定義される reflection とする.  $h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0) \geq \log n$ , かつ,

$$h_{\text{top}}(\phi_0 \circ \theta) \geq \log n \quad \text{とする.}$$

(3)

証明.  $h_{\text{top}}(\eta_n \circ \theta) \geq \log n$ ,  $h_{\text{top}}(\theta \cdot \eta_n) \geq \log n$  は易し

い. 一方、 $B_n$  は、 $\theta$ -invariant. かつ、 $\phi_0$ -invariant であるから.

$$h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0) \geq h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0|_{B_n}) = h_{\text{top}}(\theta \cdot \eta_n) \geq \log n.$$

もう一方の式も同様に証明できる.

2.5. 系. 各自然数  $k$  に対して、 $C_k = [-1/2k, 1/2k] \times [-1/2k, 1/2k]$

とおくと、 $h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_k}) = \infty$ .

証明. 各  $n \geq k$  に対して、 $C_k \supset B_n$  より.

$$h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_k}) = h_{\text{top}}(\theta \circ \phi_0|_{C_k}) = h_{\text{top}}(\phi_0 \circ \theta|_{C_k}) = \infty.$$

$S(B)$  を  $B$  の suspension. 即ち、 $S(B) = B \times [-1, 1] / \{B \times (-1), B \times 1\}$

とする。  $B$  と  $B \times 0 \subset S(B)$  は自然に同相となるので、  $B$  を

$S(B)$  の subspace と考えることにする。 各  $n$  に対して、  $S^n(B)$

を  $S^{n-1}(B)$  の suspension とする。  $B \subset S(B) \subset \dots \subset S^n(B) \subset \dots$

である。

2.6. 定義.  $\phi_1 = S(\phi_0): S(B) \rightarrow S(B)$  を  $\phi_0$  の suspension

とする。 以下帰納的に、  $\phi_n: S^n(B) \rightarrow S^n(B)$  を

$$\phi_n = S(\phi_{n-1}): S(S^{n-1}(B)) \rightarrow S(S^{n-1}(B))$$

で定義する。

map  $\phi_n$  を  $S^n(B)$  上の wild horseshoe と呼ぶ。

2.7. 定理.  $\phi_n$  は、 asymptotically entropy-expansive ではない。

い.

証明.  $0$  を原典とする。 任意の  $\varepsilon > 0$  および  $1/2k < \varepsilon$  なる

自然数  $k$  をとる。  $B$  は  $S^n(B)$  の subspace であることに注意する。  $C_R$  は  $B_\varepsilon(0)$  に含まれ、かつ、  $\phi_n$ -invariant であるから、  $\Gamma_\varepsilon(0) \supset C_R$  とする。従って、

$$h(\phi_n, \Gamma_\varepsilon(0)) \geq h(\phi_n, C_R) = h_{\text{top}}(\phi_n|_{C_R}) = h_{\text{top}}(\phi_0|_{C_R}) = \infty.$$

故に、  $h_{\phi_n}^*(\varepsilon) = \infty$ 。よって、  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\phi_n}^*(\varepsilon) = \infty$ 。

§3. 系の証明.

First step.  $f: M \rightarrow M$  を任意の asymptotically entropy-expansive homeo. とする。  $M$  は compact  $T^2$  から、次の様な homeo.

$f_1: M \rightarrow M$  が存在する。(1)  $f_1$  は周期  $k$  の周期点  $x_0$  を持つ。  
(2)  $d(f_1, f) < \varepsilon/3$  である。

Second step. 次に  $f_1$  を、  $f_1^k$ -invariant な 2-cell  $D$  を持つ homeo.  $f_3$  で近似する。そのために、3つの場合に分ける。

Case 1.  $m \geq 6$  の場合。各  $i = 1, 2, \dots, k-1$  に対して、  $x_i = f_1^i(x_0)$  とする。次の様な  $\delta > 0$  がとれる。

(1)  $\delta < \varepsilon/3$  , かつ (2)  $\{f_1^i(B_\delta(x_0)); i=0, 1, \dots, k-1\}$  は互に交わらない  $m$ -cell の集合とする。

さて、  $m$ -cell  $B_\delta(x_0)$  の interior を  $N^m$  とする。実数  $\gamma < \delta$  が存在し、  $f_1^k(B_\gamma(x_0)) \subset N^m$  とする。ここで、  $B_\gamma(x_0)$  の interior

を  $m$ -dim. Euclidean space と考える。  $\zeta = f_1^k|_{\text{Int}(B_\gamma(x_0))}$  とおく。  $\Delta$  を 2-simplex,  $\psi: \Delta \rightarrow \text{Int}(B_\gamma(x_0))$  を  $x_0 \in \text{Int}(\Delta)$

とする linear embedding とする。

(5)

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot d(\zeta \cdot \Psi(\Delta), N - \zeta(\text{Int}(B_\gamma(x_0))))$  とおく.

Homma の定理 ([HM] 又は [RS] 参照) より、次の様で、

$N^m$  の isotopy  $\{h_t\}$  が存在する.

- (1)  $h_t|_{(N^m - f_1^R(B_\gamma(x_0)))} = \text{id}$ . かつ  
 (2)  $h_1 \circ f_1^R \circ \Psi$  は piecewise linear.

$f_2: M \rightarrow M$  を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{R-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

明らかに、 $f_2$  は homeo. また、 $\Psi(\Delta)$ ,  $f_2^R \circ \Psi(\Delta)$  は、PL mfd  $N^m$  内の polyhedra である。従って、次の様で、 $M$  の ambient isotopy  $\{j_t\}$  が存在する.

- (1)  $j_t|_{(M - N^m)} = \text{id}$ , かつ (2)  $j_1 \circ f_2^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id}$ .

そこで、 $f_3 = j_1 \circ f_2$  とおく。  $f_3: M \rightarrow M$  は homeo. で、

$$f_3^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id} \text{ を満たす。}$$

Case 2.  $m=3$  或  $5$  の場合.  $d, N, \gamma$  を Case 1 と同

様にとる。  $m=3$  或  $5$  では、Annulus conjecture が成立するから、

次の様で、 $N^m$  の ambient isotopy  $\{h_t\}$  が存在する.

- (1)  $h_t|_{\partial N} = \text{id}$ , かつ (2)  $h_1 \circ f_1^R(B_\gamma(x_0)) = B_\gamma(x_0)$ .

そこで  $f_2: M \rightarrow M$  を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{R-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(6)

$E^m$  を  $m$ -simplex とし、その重心を  $v_0$  とする。  $\Psi: E^m \rightarrow B_\delta(x_0)$  を、  $\Psi(v_0) = x_0$  なる homeo. とする。  $S^1$  を  $\partial E^m$  上の polygonal simple closed curve とし、  $\Delta$  を、  $S^1$  と  $v_0$  の join とする。  $\Psi^{-1} \circ f_2 \circ \Psi|_{\partial \Delta}: \partial \Delta \rightarrow \partial E^m$  は、 inclusion map  $\partial \Delta \hookrightarrow \partial E^m$  と ambient isotopic であるから、この  $\partial E^m$  の ambient isotopy を canonical に  $E^m$  へ拡張することにより次の様式、  $M$  の ambient isotopy  $\{f_t\}$  を得る。

- (1)  $f_t|_{(M - B_\delta(x_0))} = \text{id}$ , かつ (2)  $f_1 \circ f_2^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id}$ .  
 そこで、  $f_3 = f_1 \circ f_2$  とおくと、  $f_3: M \rightarrow M$  は homeo. で、  
 $f_3^R|_{\Psi(\Delta)} = \text{id}$  を満たす。

Case 3.  $m = 2$  の場合。この場合も Annulus Conj. の成立する。従って、  $f^R$  の orientation preserving なら、Case 2 と同じ。  $f^R$  の orientation reversing の場合、  $f_2$  を次の  $f_3$  で近似する。

- (1)  $f_3^R(\Psi(\Delta)) = \Psi(\Delta)$ , かつ  
 (2)  $\exists$  homeo.  $\xi: \Psi(\Delta) \rightarrow B$  s.t.  $\xi \circ f_3^R \circ \xi^{-1} = \theta$

実際、2-cell 上の2つの orientation reversing homeo. は ambient isotopic であるから、この事は可能である。

以上3つの場合をまとめると、  $f$  は次の様式  $f_3$  で近似できる。

$$(1) d(f, f_3) < 2\varepsilon/3,$$

(7)

(2)  $\exists$  flat embedding  $\Psi: \Delta \rightarrow B_D(x_0)$ ,  $\Delta$  is 2-simplex.

(3)  $\exists$  homeo.  $\xi: \Psi(\Delta) \rightarrow B$  s.t.

$$\xi \circ f_3^k \circ \xi^{-1} = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ and } f^k \text{ is orient. rever.} \\ \text{id} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Third step.  $\Psi(\Delta)$  is flat 2-cell  $D^2$  from. 次の様で.

embedding  $\Phi: S^{m-2}(B) \rightarrow B_D(x_0)$  が存在する.

(1)  $\Phi(B) = \Psi(\Delta)$ ,  $\circlearrowright$

(2)  $\Phi^{-1} \circ f_3^k \circ \Phi|_B = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ and } f^k \text{ is orient. rever.} \\ \text{id} & \text{otherwise.} \end{cases}$

$f_4: M \rightarrow M$  を次の様に定義する.

$$f_4(x) = \begin{cases} \Phi \circ \phi_n \circ \Phi^{-1} \circ f_3^k(x) & \text{if } x \in f_3^{-1} \circ \Phi(S^{m-2}(B)) \\ f_3(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

明らかに  $f_4 \notin E^{\text{or}}(M)$  である.

Reference

[DGS] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K.:  
Ergodic Theory on Compact Spaces, L.N. Math. 527.  
Springer 1976.

[HD] Hudson, J.F.P.: Piecewise Linear Topology, W. A.  
Benjamin Inc. 1969.

[HM] Homma, T.: On the embedding of polyhedra in  
manifolds, Yokohama Math. J. 10 (1962), 5-10.



- [SS] Smale, S. : Differentiable dynamical systems.  
Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747-817
- [YN] Yano, K. : A remark on the topological entropy  
of homeomorphisms. Inv. Math. 59 (1980), 215-220.