数理解析研究所講究録
第414巻 1981年 9-48

Isomonodromic Deformation の重力場理論への応用

京大 数理研 上野喜三雄

§0. Introduction and preliminaries

この小論は，定常軸対称な真空重力場方程式の厳密解構成に新しい視点を導入しようとしたものである。

[1], [2] において Belinsky-Zakharov (B-Z) は，次の metric に対する Einstein 方程式 (Ricci tensor: $R_{ij}=0$) の解の構成法を逆散乱法の観点から与えた。

(0.1) $$-ds^2 = f(d\rho^2+dz^2) + g_{ab}dx^a dx^b \quad (a,b=0,1)$$

ここで，f 及び g_{ab} は，ρ と z の函数であり，x^0, x^1 は各々座標 t 及び φ を表わすものとする。

さて，付加条件

(0.2) $$\det g = -\rho^2, \quad g=(g_{ab})$$

のもとで metric (0.1) に対する Einstein 方程式は，次の如くなる。

(0.3) $$\begin{cases} U_\rho + V_z = 0 \\ U_z - V_\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}[U,V] = 0 \end{cases}$$

(0.4) $$\begin{cases} (\log f)_\rho = -\rho^{-1} + (4\rho)^{-1}\,\mathrm{trace}(U^2-V^2) \\ (\log f)_z = (2\rho)^{-1}\,\mathrm{trace}(UV) \end{cases}$$

ここで，$U := \rho g_\rho g^{-1}$，$V := \rho g_z g^{-1}$ である。行列 g は対称行列となることに注意する。

さて，[2]に従って，B-Zによる解の構成法を振り返ってみることにしよう。彼らによれば，(0.3)は，(註：U, Vが求まれば，fは(0.4)式により得られるので(0.4)は今後，考慮しない。ただし，fは後述〈§3〉するように重要な意味をもつ函数である。）次の線型微分方程式系の積分可能条件として得られる。

$$
(0.5)\qquad \begin{cases} D_1 Y = \dfrac{\rho V - \lambda U}{\rho^2 + \lambda^2} Y \\[2ex] D_2 Y = \dfrac{\lambda V + \rho U}{\rho^2 + \lambda^2} Y \end{cases}
$$

ここで，$D_1 := \partial_z - \dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda$，$D_2 := \partial_\rho - \dfrac{2\lambda\rho}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda$ であって，λ は complex parameter（ρ, z に依存しない。）。(0.5)の基本解行列 $Y(\lambda) = Y(\lambda, \rho, z)$ で，その 0-value $Y(0) = Y(0, \rho, z)$ が対称となるようなものが見出されたとする。そのとき，g は，次の式で与えられる。

$$
(0.6)\qquad g = Y(0)
$$

(0.6)で与えられる g が，実際に4次元の Einstein 方程式の解となる為には，付加条件(0.2)及び g の実数値性を云わなければならないが，この点は後述するように（cf §2，或いは B-Z[2]にも注意されている。）容易に修正可能なことである。線型方

程式(0.5)から, (0.6)によって g を構成する際に我々が最も注意を傾けねばならないのは, 0-value $Y(0)$ の対称性である。

B-Zは, [1],[2]において, 上述の scheme に従って解 g を次の2通りの場合について構成している。

1° soliton type

2° より一般的に, non-soliton part を含む場合。(Riemann-Hilbert問題に帰着させ Fredholm型積分方程式を考察する。しかし explit な解の形は不明である。)

我々は, 彼らの到達点を踏まえつつ, Isomonodromic Deformation Theory を援用することで, 重力場方程式の厳密解(それも今迄に知られていない超越的な解)の構成に(ある意味で)成功したと言ってよい。

逆散乱問題で扱われるN-soliton解, Quasi-periodic解 etc を方程式論的に考えれば, それは, Lax-pair, AKNS pair に spectral parameter に関する線型方程式を適当に付加することを意味する。今の場合, それは(0.5)以外に次の複素領域($\mathbb{P}^1$)における Fuchs型方程式

$$(0.7)\qquad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{\lambda - \mu_j} Y$$

を加えて, (0.5), (0.7)を合わせて holonomic な方程式系を考察することに相当する。(0.5), (0.7)を同時に満たす解 $Y(\lambda, \rho, z)$ をとってくれば, それから重力場方程式の新たな特殊解をつく

ることは可能であろう。さらに，Isomonodromy Deformationの理論では，(0.5)よりもむしろ(0.7)の方が主役である。我々の厳密解構成の基本的方針を要約すれば次の如くなる。

：(0.7)の無限遠点で正規化された基本解行列（以下単に解と呼ぶ）$Y(\lambda)=Y(\lambda,\rho,z)$ の大域的モノドロミーが(ρ,z)によらないとする。（特異点 μ_j，$j=1,\cdots,n$ は，ρとzに依存して動く。）このとき 0-value $Y(0)$ が symmetric かつ real となる条件を大域的モノドロミーの言葉で表現せよ。：

モノドロミー保存ということより$Y(\lambda)$は，適当なポテンシャルU, V に対して(0.5)の形の方程式をみたし，従って，(0.6)によりその 0-value は Einstein 方程式の解となる，しかも超越的な!! 上記の大域的モノドロミーを実現する Riemann 問題は，佐藤-三輪-神保氏の "Holonomic Quantum Fields" の手法で解くことが出来るのであるから，結果として，

：我々の厳密解は，場の量子論の Clifford operators の真空期待値という形で表示される。：

ということがわかる。

ずいぶん前置きが長くなってしまった。本論に入ろう。

§1. Fundamental theorem and lemmata

§0で述べたscheme に従って，まず，主役となるべき方程式を設定しよう。

(1.1) $$\frac{dY}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{\lambda-\mu_j}Y$$

(1.1)は，$\mathbb{P}^1$上で定義されたFuchs型方程式で特異点μ_j $(j=1,\cdots,n)$は，次の2次方程式の根とする。

(1.2) $$\mu_j^2-2(w_j-z)\mu_j-\rho^2=0\ ,\quad w_j\in\mathbb{C},$$

即ち，μ_jは次の非線型方程式の解である。

(1.3) $$\frac{\partial\mu}{\partial z}=\frac{-2\mu^2}{\mu^2+\rho^2}\ ,\quad \frac{\partial\mu}{\partial\rho}=\frac{2\mu\rho}{\mu^2+\rho^2}$$

さて，(1.1)において，無限遠点で正規化された解$Y^{(\infty)}(\lambda)=Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z)$が存在すると仮定しよう。$Y^{(\infty)}(\lambda)$が無限遠点で正規化されているというのは，$\lambda\mapsto\infty$とするとき，

(1.4) $$Y^{(\infty)}(\lambda)=(1+\hat{Y}_1^{(\infty)}\lambda^{-1}+\cdots)(\lambda^{-1})^{L^{(\infty)}}$$

$L^{(\infty)}$: diagonal matrix

という局所展開をもつことを意味する。

最初に，(0.7)と(0.5)を結びつける為の定理を示そう。これは我々のschemeにおいて最も基本というべきものである。

<u>*Theorem 1.1.*</u> $Y^{(\infty)}(\lambda)$の大域的モノドロミーが，ρとzに依存しない，即ちIsomonodromicな変形を受けているとする。このとき，$Y^{(\infty)}(\lambda)$は，次の方程式も同時に満たす。

$$
(1.5)\qquad
\begin{cases}
D_1 Y^{(\infty)} = \dfrac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2} Y^{(\infty)} \\[2ex]
D_2 Y^{(\infty)} = \dfrac{\lambda V + \rho U}{\lambda^2+\rho^2} Y^{(\infty)}
\end{cases}
$$

ここで，ポテンシャルU, Vは，

$$
(1.6)\qquad U = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\rho^2 A_j}{\mu_j^2+\rho^2}, \quad V = -\sum_{j=1}^{n} \frac{2\rho\mu_j A_j}{\mu_j^2+\rho^2}
$$

で与えられる。

<u>*proof.*</u> 仮定が成立するとき，良く知られているように $Y^{(\infty)}(\lambda)$は次の方程式をみたす。

$$
(1.7)\qquad \frac{\partial Y^{(\infty)}}{\partial \mu_j} = -\frac{A_j}{\lambda-\mu_j} Y^{(\infty)} \quad \text{for any } j.
$$

従って $Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z)$ の (ρ,z) dependence は，次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(1.8)\qquad D_1 Y^{(\infty)} &= \sum_j \frac{\partial Y^{(\infty)}}{\partial \mu_j}\frac{\partial \mu_j}{\partial z} - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\frac{\partial Y^{(\infty)}}{\partial \lambda} \\
&= \sum_j \left(\frac{-A_j}{\lambda-\mu_j}\,\frac{-2\mu_j^2}{\mu_j^2+\rho^2} + \frac{A_j}{\lambda-\mu_j}\,\frac{-2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2} \right) Y^{(\infty)} \\
&= \frac{1}{\lambda^2+\rho^2}\left(\rho \sum_j \frac{-2\mu_j\rho}{\mu_j^2+\rho^2} A_j - \lambda \sum_j \frac{2\rho^2}{\mu_j^2+\rho^2} A_j \right) Y^{(\infty)}
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
(1.9)\qquad D_2 Y^{(\infty)} = \frac{1}{\lambda^2+\rho^2}\left(\lambda \sum_j \frac{-2\mu_j\rho}{\mu_j^2+\rho^2} A_j + \rho \sum_j \frac{2\rho^2}{\mu_j^2+\rho^2} A_j \right) Y^{(\infty)}
$$

を得る。　　　　　　　　q.e.d.

この定理は，大変強力なものであるが，これだけでは，0-value の対称性は保証され得ない。対称性の議論の key を握る命題は，後で示すとして，まずは，Th.1.1 を用いて，簡単

な例を計算してみる。

Example　まず，座標変換をする。偏長楕円体座標 (prolate spheroidal coordinate system) を次式で定義する。

(1.10) $\rho = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad z = xy$

また (1.1) の特異点として，

(1.11)
$$\mu_1 = (x-1)(1-y), \quad \mu_2 = -(x+1)(1+y)$$
$$\mu_3 = (x+1)(1-y) \quad \mu_4 = -(x-1)(1+y)$$

を選らぶ。これらは，(1.2) で，$w_j = \pm 1$ として得られる。次の方程式を考える。

(1.12)
$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{4} \frac{\begin{pmatrix} \alpha_j & \\ & \beta_j \end{pmatrix}}{\lambda - \mu_j} Y$$

(1.13)
$$Y(\lambda) = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{4} (\lambda-\mu_j)^{\alpha_j} & \\ & \prod_{j=1}^{4} (\lambda-\mu_j)^{\beta_j} \end{bmatrix}$$

α_j, β_j 達は，次の関係式を満すとせよ。

(1.14)
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad l_\alpha, l_\beta \in \mathbb{C}$$

このとき，簡単な計算で，$Y(0)$ は次のようになることがわかる。

(1.15)
$$g = Y(0) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{x+1} & 0 \\ 0 & (x+1)^2(1-y^2) \end{pmatrix}$$

これは，Schwarzshild 解と呼ばれるものである。

次に，0-value $Y(0)$ が対称となるべき条件を大域的モノドロミーで記述する為の key となる命題を述べよう。この命題は，京都大学の伊達先生に御教示頂いたものである。（しかし，B-Z [1]に本質的には書かれていると言ってよい。）

Lemma 1.2. (Date) $Y(\lambda)$ を (0.5) の解とする。$Y(0)$ が対称であるとき，次の条件を満すべき可逆な行列 $S(\lambda)=S(\lambda,\rho,z)$ が存在する。

$$D_1 S(\lambda)=D_2 S(\lambda)=0 \tag{1.16}$$

かつ

$$Y(0)=Y(-\tfrac{\rho^2}{\lambda})\,S(\lambda)\,{}^tY(\lambda) \tag{1.17}$$

ここで，$S(\lambda)$ の簡単にわかる性質をあげておく。w を

$$w=\tfrac{1}{2}(\lambda+2z-\tfrac{1}{\lambda}\rho) \tag{1.18}$$

で導入する。$S(\lambda)$ は w の函数：$S(\lambda)=S(w)$ である。(cf. [1]) また，μ を (1.2) の根とするとき，$S(\mu)$ は ρ と z に依らぬ定数行列となる。最後に，或る意味での対称性をもつ，即ち

$$S(\lambda)={}^tS(-\tfrac{\rho^2}{\lambda}) \tag{1.19}$$

が成立する。一般には，$S(\lambda)$ は超越的で，複雑で，λ について多価の，要するにわけのわからない函数である。そこで視点を変えよう。

：Example で考察したような対角型の解 $Y_0(\lambda)$ から出発して，

(1.20) $$S_0(\lambda) = Y_0(-\frac{\rho^2}{\lambda})^{-1} Y_0(0)\, {}^t Y_0(\lambda)^{-1}$$

によって$S_0(\lambda)$を導入する。この$S_0(\lambda)$に対して(1.17)を満す別の解$Y(\lambda)$はどの様に特徴付けられるか？：

上で述べた方針を数学的に定式化すれば，以下の如くなる。

Corollary 1.3. $Y(\lambda)$を(0.4)の解で，$Y_0(\lambda)Y(\lambda)^{-1}|_{\lambda=\infty} = 1$となるものとする。($Y_0(\lambda)$は対称な$Y_0(0)$をもつ(0.4)の解である。必ずしも対角型に限らない。) 今，$g := Y(-\frac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\,{}^tY(\lambda)$は，$\lambda$によらぬ函数であると仮定しよう。このとき

(1.21) $$Y(0) = Y(-\frac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\,{}^tY(\lambda)$$

であり，しかも$Y(0)$は対称である。

proof 仮定が正しいとすると，

(1.21) $$\begin{aligned} g &= Y(0)S_0(\lambda)\,{}^tY(\lambda)\big|_{\lambda=\infty} \\ &= Y(0)\,{}^tY_0(\lambda)^{-1}\,{}^tY(\lambda)\big|_{\lambda=\infty} \\ &= Y(0). \end{aligned}$$

そして，

(1.22) $$\begin{aligned} g &= Y(-\frac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\big|_{\lambda=0}\,{}^tY(0) \\ &= Y(-\frac{\rho^2}{\lambda})Y_0(-\frac{\rho^2}{\lambda})\big|_{\lambda=0}\,{}^tY(0) \\ &= {}^tY(0). \end{aligned}$$ q.e.d.

Remark. $Y(\lambda)$と$Y_0(\lambda)$の満す(0.4)のポテンシャルは，各々別個のものを考えている。

§2. main result.

この節では，0-value $Y(0)$の対称性及び実数値性が成り立つ為の十分条件を，§1の方針に沿って，$Y(\lambda)$の大域的モノドロミーの条件として記述する。そして最終的には，重力場方程式の解gをClifford operatorsの真空期待値で表示する。

我々は，考察の対象となるFuchs型方程式を次のものに限定する。

(2.1) $$\frac{dY}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_j}{\lambda-a_j}+\frac{B_j}{\lambda-b_j}\right)Y$$

ここで，a_jとb_jは，次の2次方程式の2根とする。

(2.2) $$\mu^2-2(w_j-z)\mu-\rho^2=0\ ,\qquad w_j\in\mathbb{C}$$

また，(2.1)に付随して

(2.3) $$\frac{dY}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_j^{(0)}}{\lambda-a_j}+\frac{B_j^{(0)}}{\lambda-b_j}\right)Y$$

を考える。$A_j^{(0)}$, $B_j^{(0)}$は定数対角行列であるとする。

(2.4) $$A_j^{(0)}=diag(\alpha_{j,1}^{(0)},\alpha_{j,2}^{(0)}),\quad B_j^{(0)}=diag(\beta_{j,1}^{(0)},\beta_{j,2}^{(0)})$$

(2.3)の解として次のものをひとつ固定しておく。

(2.5) $$Y_0'(0)=\begin{pmatrix}\prod_{j=1}^{n}(\lambda-a_j)^{\alpha_{j,1}^{(0)}}(\lambda-b_j)^{\beta_{j,1}^{(0)}} & 0\\ 0 & \prod_{j=1}^{n}(\lambda-a_j)^{\alpha_{j,2}^{(0)}}(\lambda-b_j)^{\beta_{j,2}^{(0)}}\end{pmatrix}$$

そして，$Y_0(\lambda)$, $S_0(\lambda)$を以下のように定義する。

(2.6) $$Y_0(\lambda)=PY_0'(\lambda)\,{}^tP$$

(2.7) $$S_0(\lambda)=Y_0\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^{-1}Y_0(0)\,{}^tY_0(\lambda)^{-1}$$

ここで，Pは定数可逆行列である。$Y_0(\lambda)$は無限遠点で正規化

されている解ではないが，その 0-value $Y_0(0)$ は対称であることに注意せよ。(2.7)で定義された$S_0(\lambda)$が§1 で述べた初等的な$S(\lambda)$-函数である。(2.1)は次の条件を満足する解$Y^{(\infty)}(\lambda)$を持つとする。

(2.8) $$Y_0(\lambda)\,Y^{(\infty)}(\lambda)^{-1}\Big|_{\lambda=\infty}=1$$

さらに，特異点a_j, b_jの近傍で，局所展開

(2.9) $$Y^{(\infty)}(\lambda) = G^{(\mu)}\hat{Y}^{(\mu)}(\lambda)(\lambda-\mu)^{L^{(\mu)}}C^{(\mu)}, \quad \mu=a_j, b_j$$

を持つとしよう。ここで，$G^{(\mu)}=G^{(\mu)}(s,z)$は可逆行列で，gauge matrixと呼ばれる。$Y^{(\infty)}(\lambda)=1+\sum_{l=1}^{\infty}\hat{Y}_l^{(\mu)}(\lambda-\mu)^l$は，$\lambda=\mu$の近傍で正則かつ可逆である。$L^{(\mu)}=diag(l_1^{(\mu)}, l_2^{(\mu)})$で，これはexponentsと呼ばれ，最後に$C^{(\mu)}$は可逆行列で，connection matrix(接続行列)と呼ばれている。(cf.[8])。

次の仮定をおく。exponents，及び接続行列はすべて定数とする。即ちモノドロミーは保存されているものとする。今，導入した$Y^{(\infty)}(\lambda)$は無限遠点で正規化されている解ではないが，$Y_0(\lambda)$の定義(2.7)及び(2.8)により，定理1がそのまま適用可能であることに注意しよう。従って，問題は，0-value $Y^{(\infty)}(0)$が，対称かつ実となる為の大域的モノドロミーの条件を決定することにある。まず，対称性の考察から始める。

次の2つの場合に分けて論じる。第一の場合は$Y_0'(\lambda)$がスカラーであり，第二の場合は，$Y_0'(\lambda)$がスカラーでないときである。

__オ一の場合__　このとき$Y_0(\lambda)$は，定数可逆対称行列Qを用いて

$$Y_0(\lambda)=y_0(\lambda)Q^{-1} \tag{2.10}$$

$$y_0(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-a_j)^{\alpha_j^{(0)}}(\lambda-b_j)^{\beta_j^{(0)}} \tag{2.11}$$

と書ける。定理の主張を述べる為に次の概念，記号を導入しよう。

$$M^{(\mu)}=C^{(\mu)-1}\exp(2\pi\sqrt{-1}L^{(\mu)})C^{(\mu)},\quad \mu=a_j,b_j,\ j=1,\cdots,n \tag{2.12}$$

これは，$\mu=a_j,b_j$における$Y^{(\infty)}(\lambda)$のモノドロミーと呼ばれる，

$$C^{(b_j,a_j)}=C^{(b_j)}Q\,{}^tC^{(a_j)}\qquad j=1,\cdots,n. \tag{2.13}$$

さて，主定理は以下の如くなる。

__Theorem 2.1.__　$L^{(\mu)}$の各成分は整数差異ならない；$l_1^{(\mu)}\not\equiv l_2^{(\mu)}$ mod $\mathbb{Z}$とする。このとき，$g=Y^{(\infty)}(-\frac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\,{}^tY^{(\infty)}(\lambda)$が$\lambda$に依らない為の条件は，各$j$について，次の二つの条件のうち，どちらか一方が成立することである。

(2.14)　$l_s^{(b_j)}+l_s^{(a_j)}=\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}$ for $s=1,2$，かつ
$C^{(b_j,a_j)}$は対角行列。

又は

(2.15)　$l_s^{(b_j)}+l_{s'}^{(a_j)}=\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}$ for $s,s'=1,2$，$s\neq s'$ かつ
$C^{(b_j,a_j)}$の対角成分はすべて0。

__proof__ 条件(2.14)，(2.15)の必要性のみを示す。証明の過程

より，条件の十分性は自ずと明らかになる。g が λ によらない可逆行列であるということは，次の様に言い換えられる。

：g は λ の函数として $\mathbb{P}^1$ 上一価正則で，$\det g$ は至る所 0 でない。：　----(＊)

そこで，そうなる為の必要性を見る。g の定義により，$\det g$ は，$\lambda=a_j, b_j$ $j=1,\cdots,n$ を除いて至る所正則かつ 0 でない。$\lambda=a_j$ の近傍では

(2.16)
$$\det g \sim (\text{a holomorphic function at } a_j) \times (\lambda-a_j)^{\operatorname{trace}(L^{(b_j)}+L^{(a_j)})-2(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)})} \quad \text{as } \lambda \mapsto a_j$$

という振舞いを示す。従って(＊)が成立しているときには，

(2.17)
$$\operatorname{trace}(L^{(b_j)}+L^{(a_j)}) = 2(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}) \quad \text{for } j=1,\cdots,n$$

でなければならない。g そのものは，$\lambda=a_j$ の近傍で次の挙動をもつ。

(2.18)
$$g \sim (\text{a holomorphic function at } a_j) \times (\lambda-a_j)^{L^{(b_j)}} \times C^{(b_j)} S_0(\lambda)\, {}^t C^{(a_j)} (\lambda-a_j)^{L^{(a_j)}} \times (\text{a holomorphic function at } a_j)$$

g は，a_j の近傍で1価でなければならないので，

(2.19)
$$\exp(-2\pi\sqrt{-1}(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}))M^{(b_j)} Q M^{(a_j)} = Q \quad 。$$

従って，$\exp(-2\pi\sqrt{-1}(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}))M^{(b_j)}$ の固有値と $QM^{(a_j)}Q$ のそれとが一致しなければならない。(2.12) により

(2.20)
$$l_s^{(b_j)}+l_s^{(a_j)}-(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}) = n_s^{(j)} \in \mathbb{Z} \quad \text{for } s=1,2$$

又は

(2.21) $$l_s^{(b_j)}+l_{s'}^{(a_j)}-(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)})=n_{ss'}^{(j)}\in\mathbb{Z}\quad \text{for } s,s'\ 1,2,\ s\neq s'$$

であることが必要となる。(2.17) を考慮すれば，

(2.22) $$n_1^{(j)}+n_2^{(j)}=0,\ \text{or}\ n_{12}^{(j)}+n_{21}^{(j)}=0$$

を得る。以後の考察を (2.20) の場合に限ろう。この様にしても一般性は失われない。(2.19) は，

(2.23) $$\exp 2\pi\sqrt{-1}(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)})C^{(b_j,a_j)}\exp(-2\pi\sqrt{-1}L^{(a_j)})$$
$$=\exp 2\pi\sqrt{-1}L^{(b_j)}\cdot C^{(b_j,a_j)}$$

従って

(2.24) $$\exp 2\pi\sqrt{-1}(\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}-l_s^{(b_j)}-l_{s'}^{(a_j)})C_{ss'}^{(b_j,a_j)}=0$$
$$\text{for } s,s'=1,2,\ s\neq s'$$

と同値である。$C_{ss'}^{(b_j,a_j)}\neq 0$ として矛盾を導く。例えば，$C_{12}^{(b_j,a_j)}\neq 0$ とすると (2.24) より $\beta_j^{(0)}+\alpha_j^{(0)}-l_1^{(b_j)}-l_2^{(a_j)}\equiv 0 \mod \mathbb{Z}$ となるが，この事実と (2.20) を合わせると $l_2^{(a_j)}\equiv l_1^{(a_j)} \mod\mathbb{Z}$ となって定理の仮定に反する。ゆえに，$C^{(b_j,a_j)}$ が対角行列であることがわかった。(同様に，(2.21) が成立しているときには，$C^{(b_j,a_j)}$ の対角成分は 0 であることが結論される。)

さて，$C^{(b_j,a_j)}$ が対角行列のときは，g は $\lambda=a_j$ の近傍で，

(2.25) $$g\sim(\#)\times\begin{bmatrix}(\lambda-a_j)^{n_1^{(j)}}d_1^{(j)} & \\ & (\lambda-a_j)^{n_2^{(j)}}d_2^{(j)}\end{bmatrix}\times(\#')$$

$(\#),(\#')$: holomorphic functions at a_j

$$C^{(b_j,a_j)} = diag\,(d_1^{(j)}, d_2^{(j)})$$

(2.22)より $n_1^{(j)} \geqq 0,\ n_2^{(j)} \leqq 0$ と仮定してもよい。$n_2^{(j)} < 0$ であるとして矛盾を導く。$n_2^{(j)} < 0$ とすると，g は $\lambda = a_j$ で正則であるから

(2.26) g の $\lambda = a_j$ における局所展開の $(\lambda - a_j)^{n_2^{(j)}}$ の係数

$$= (\#) \times G^{(b_j)} E_2 \, {}^tG^{(a_j)} = 0$$

(#): holomorphic, non-vanishing scalar function at a_j

$E_2 = diag\,(0, 1)$

ところで，$G^{(b_j)}, G^{(a_j)}$ は可逆であったから，これは矛盾。ゆえに $n_2^{(j)} = 0$。再び，(2.22)を用いて，$n_1^{(j)} = 0$ を得る。（(2.21)の場合は，同様の考察から $n_{12}^{(j)} = n_{21}^{(j)} = 0$ を得る。） q. e. d.

Remark　$L^{(\mu)}$ が，generic であるという仮定を落しても，定理の十分性は成立することに注意する。

Corollary 2.2.　定理 2.1 の情況において，

(2.27) $$g(\rho, z) = G^{(b_j)} \tilde{G}^{(b_j,a_j)}\, {}^tG^{(a_j)} \quad \text{for } j = 1, \cdots, n$$

ここで，
$$\tilde{G}^{(b_j,a_j)} = \left(-\frac{b_j}{a_j}\right)^{L^{(b_j)}} \prod_{k \neq j} [2(w_j - w_k)]^{-(\alpha_k^{(0)} + \beta_k^{(0)})} \times (a_j - b_j)^{-(\alpha_j^{(0)} + \beta_j^{(0)})} \times a_j^{\alpha_j^{(0)} + \beta_j^{(0)}} \times C^{(b_j,a_j)}$$

proof　(2.11)より，

(2.28) $$\mathcal{J}_0\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^{-1} \mathcal{J}_0(0)\, \mathcal{J}_0(\lambda)^{-1}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho^2}{\lambda b_k}\right)^{-\alpha_k^{(0)}} (\lambda - b_k)^{-\alpha_k^{(0)}} \left(\frac{\rho^2}{\lambda a_k}\right)^{-\beta_k^{(0)}} (\lambda - a_k)^{-\beta_k^{(0)}} (-a_k)^{-\alpha_k^{(0)}} (-b_k)^{-\beta_k^{(0)}}$$
$$\times (\lambda - a_k)^{-\alpha_k^{(0)}} (\lambda - b_k)^{-\beta_k^{(0)}}$$

$$\overset{\lambda\mapsto a_j}{\sim} \prod_{k=1}^{n} (-a_k)^{\alpha_k^{(0)}}(-b_k)^{\beta_k^{(0)}}\left(\frac{\rho^2}{a_j b_k}\right)^{-\alpha_k^{(0)}}\left(\frac{\rho^2}{a_j a_k}\right)^{-\beta_k^{(0)}}$$
$$\times \prod_{k=1}^{n}\{(a_j-a_k)(a_j-b_k)\}^{-\alpha_k^{(0)}-\beta_k^{(0)}} \times (a_j-b_j)^{-\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}}\times(\lambda-a_j)^{-\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}}$$
$$= \underbrace{a_j^{\alpha_j^{(0)}+\beta_j^{(0)}}(a_j-b_j)^{-\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}}\prod_{k\neq j}[2(w_j-w_k)]^{-\alpha_k^{(0)}-\beta_k^{(0)}}}_{(\#)} \times(\lambda-a_j)^{-\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}}$$

一方(2.25)を正確に計算すると，

$$g \overset{\lambda\mapsto a_j}{=} G^{(b_j)}\hat{Y}^{(b_j)}\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right) \times \left(\frac{\rho^2}{a\lambda}\right)^{L^{(b_j)}} (\lambda-a_j)^{L^{(b_j)}}$$
$$\times Y_0\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^{-1} Y_0(0)\, Y_0(\lambda)^{-1} C^{(b_j,a_j)} (\lambda-a_j)^{L^{(a_j)}}\, {}^t\hat{Y}^{(a_j)}(\lambda)\, {}^tG^{(a_j)}$$
$$\overset{\lambda\mapsto a_j}{\sim} G^{(b_j)}\left(-\frac{b_j}{a_j}\right)^{L^{(b_j)}} \times (\#) \times C^{(b_j,a_j)}\, {}^tG^{(a_j)}$$

を得る。 q.e.d.

(2.27)は，g を operator 表示するとき必要となる。

<u>オ二の場合</u>　オ一の場合と比較して $S_0(\lambda)$ が一般になるので(と言っても程度問題だが)それに応じて，$Y^{(\infty)}(\lambda)$ もより多種多様になるように，一見すると思えるが，事実はその逆である。予め次の記号を導入しておく。

(2.29)　$S_0'(\lambda) = Y_0'\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^{-1} Y_0(0)^{-1}\, {}^tY_0'(\lambda)^{-1} = diag\,(s_1'(\lambda),\ s_2'(\lambda))$

今の場合，$s_1'(\lambda), s_2'(\lambda)$ は代数的に独立であることに注意する。

我々の得た定理は次の通り。

<u>Theorem 2.3.</u>　オ二の情況において，$g = Y^{(\infty)}\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)\ {}_0(\lambda) \times {}^tY^{(\infty)}(\lambda)$ が λ によらぬのであれば，$Y^{(\infty)}(\lambda)$ のモノドロミー行列は互いた

可換である。

proof 定理の仮定のもとで，g は λ の函数として $\lambda=a_j$ で正則となるべきだから，(2.18)より次が従う。

$$M^{(b_j)}\exp[-2\pi\sqrt{-1}B_j^{(0)}]S_0(\lambda)\exp[-2\pi\sqrt{-1}A_j^{(0)}]^t M^{(a_j)}=S_0(\lambda)$$

これは次と同値である。

$$\widetilde{M}^{(b_j)}\exp[-2\pi\sqrt{-1}B_j^{(0)}]S_0'(\lambda)\exp[-2\pi\sqrt{-1}A_j^{(0)}]^t\widetilde{M}^{(a_j)}=S_0'(\lambda) \tag{2.30}$$

ここで，$\widetilde{M}^{(\mu)}={}^tPM^{(\mu)}\,{}^tP^{-1}$ である。$S_1'(\lambda)$, $S_2'(\lambda)$ は，代数的に独立であるから (2.30) は，$\widetilde{M}^{(b_j)}=\mathrm{diag}(m_1^{(j)},m_2^{(j)})$，$\widetilde{M}^{(a_j)}=\widetilde{M}^{(b_j)}\times\exp[2\pi\sqrt{-1}(B_j^{(0)}+A_j^{(0)})]$ と同値であることが，(2.30)の左辺の各成分を計算することによりわかる。従って，

$$M^{(b_j)}={}^tP^{-1}\begin{pmatrix}m_1^{(j)}&\\&m_2^{(j)}\end{pmatrix}{}^tP,\quad M^{(a_j)}={}^tP^{-1}\begin{pmatrix}m_1^{(j)}&\\&m_2^{(j)}\end{pmatrix}\exp[2\pi\sqrt{-1}(B_j^{(0)}+A_j^{(0)})]\times{}^tP \tag{2.31}$$

を得る。これは，すべてのモノドロミー行列が可換であることを意味する。　　　q.e.d.

この定理の意味するところは，$S(\lambda)$-函数を一般にするとそれに対応する $Y^{(\infty)}(\lambda)$ は特殊なものしか出て来得ないということであろう。即ち，少々あいまいな表現であるが，定理1の情況の方が，$Y^{(\infty)}(\lambda)$ の条件として generic であるということか？

次に $Y^{(\infty)}(0)$ の実数値性の議論をしよう。この場合，勿論 ρ と z は実領域に制限して考えることにする。

$Y^{(\infty)}(0,\rho,z)$ が実である為には，$Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z)$ を，λ を実軸に制限したとき実になっていれば十分である。そこで，

(2.32)　$Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z)$ は実軸の近傍で一価正則，かつ，

$$Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z) = \overline{Y}^{(\infty)}(\overline{\lambda},\rho,z)$$

（ ‾ は複素共役を意味する。）となる為の十分条件を求めよう。次の仮定をおく。

<u>Ass 1.</u>　$Y^{(\infty)}(\infty,\rho,z) = 1$

<u>Ass 2.</u>　* (a_j, b_j) $(j=1,\cdots,m)$ は実数かつ正則点

** $(a_j, b_j) = (\overline{a}_{j+1}, \overline{b}_{j+1})$ $(j=m+1,\cdots,n)$ （$n-m$：偶数）

これだけの仮定より，

(1) $Y^{(\infty)}(\lambda)$ は実軸の近傍で一価正則

(2) $\overline{Y}^{(\infty)}(\infty) = 1$

(3) $\overline{Y}^{(\infty)}(\lambda)$ の特異点は，a_j, b_j $(j=m+1,\cdots,n)$

ということがまずわかる。次に $\overline{Y}^{(\infty)}(\overline{\lambda})$ の各特異点での局所展開を見る。$Y^{(\infty)}(\lambda)$ の展開式(2.9)より

(2.32)　$\overline{Y}^{(\infty)}(\overline{\lambda}) \overset{\lambda\mapsto a_j}{=} \overline{G}^{(a_{j+1})}\,\overline{\hat{Y}}^{(a_{j+1})}(\overline{\lambda})\,(\lambda-a_j)^{\overline{L}^{(a_{j+1})}}\,\overline{C}^{(a_{j+1})}$

$$\overset{\lambda\mapsto a_{j+1}}{=} (\, j+1 \leftrightarrow j\,)$$

（$\lambda\mapsto b_j, b_{j+1}$ のときも同様）

そこで更に

<u>Ass. 3.</u>　$\overline{L}^{(a_j)} = L^{(a_{j+1})},\ \overline{L}^{(b_j)} = L^{(b_{j+1})},\ \overline{C}^{(a_j)} = C^{(a_{j+1})},\ \overline{C}^{(b_j)} = C^{(b_{j+1})}$

$(j=m+1,\cdots,n)$

を仮定すると，

(4) $\tilde{Y}^{(\infty)}(\lambda)$ の各特異点における局所展開の exponents と接続行列は，$Y^{(\infty)}(\lambda)$のそれと一致する。

ことがわかる。

(3), (4) より $\tilde{Y}^{(\infty)}(\lambda)Y^{(\infty)}(\lambda)^{-1}$ は $\mathbb{P}^1$ 上一価正則であり，従って定数 $=1$ ($\because$ (2))。これと(1)より，(2.32)を得る。定理2.1 と，今の考察を結びつければ，次の定理を得る。

Theorem 2.4　Ass 1～3 及び定理2.1に於いて，$Q=1$ (このとき，$C^{(b_j,a_j)}=C^{(b_j)}\,{}^tC^{(a_j)}$)，$y_0(\lambda)$に対応する条件(2.14), (2.15)が各 j についていずれかが成立しているのであれば，$g=Y^{(\infty)}_{(0,P,Z)}$は実対称である。

さて，定理2. の情況に対応するRiemann 問題を考えるには，モノドロミー行列の間に constraint を設けなければならない。今それを

(2.33)　$M^{(b_n)}M^{(a_n)}\cdots M^{(b_{m+1})}M^{(a_{m+1})}=1$

と決めておく。定理2.1 より $g=Y^{(\infty)}_{(0)}$ が対称のときは，Fuchs の関係式

(2.34)　$\sum_{j=m+1}^{n} \mathrm{trace}\,(L^{(b_j)}+L^{(a_j)})=0$

は自動的に満されていることに注意する。

Riemann 問題とは，所与のモノドロミー表現をもつ Fuchs

型方程式の解を構成することを云うのであるが，これは一般には可解であり，とくにモノドロミーの exponents が十分小さいときは，Clifford operator の真空期待値を用ちいて表示される。これらの問題は，Sato-Miwa-Jimbo[5]及びMiwa[6]，[7]によって解決された。彼らの結果を援用することで，次の定理を得る。

<u>Theorem 2.5.</u> 定理2.4に於ける解 $g=Y^{(\infty)}(0,\rho,z)$ は，一般には存在して，しかも $|L^{(a_j)}|$ $(j=m+1,\cdots,n)$ が十分小さいときは，次の表示をもつ。

(2.35)
$$g_{ab}=Y^{(\infty)}(0,\rho,z)_{ab}$$
$$=2\pi\sqrt{-1}(\lambda-\lambda_0)\left.\frac{\langle\psi_a^*(\lambda_0)\varphi_1\ \varphi_2^{(a_{m+1})}\cdots\cdots\varphi_1^{(b_n)}\varphi_2^{(b_n)}\psi_b(\lambda)\rangle}{\langle\varphi_1^{(a_{m+1})}\varphi_2^{(a_{m+1})}\cdots\ \varphi_1^{(b_n)}\varphi_2^{(b_n)}\rangle}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \lambda_0=\infty}}$$

$\psi_a^*(\lambda_0)$，$\psi_b(\lambda)$ は free fermion operator，$\varphi_c^{(\mu)}$ $(\mu=a_{m+1},b_{m+1},\cdots,a_n,b_n,$ $c=1,2)$ は Clifford operator，$\langle\ \rangle$ は真空期待値である。詳しくは，Miwa[6] を参照して下さい。

最後に付加条件(0.2)について議論する。(以後，定理2.4の情況を想定する。) $\det Y^{(\infty)}(\lambda)=\prod_{j=m+1}^{n}(\lambda-a_j)^{\mathrm{tr}L^{(a_j)}}(\lambda-b_j)^{\mathrm{tr}L^{(b_j)}}$ であるから

(2.36)
$$\det g=\prod_{j=m+1}^{n}(-a_j)^{\mathrm{tr}L^{(a_j)}}(-b_j)^{\mathrm{tr}L^{(b_j)}}$$
$$=\prod_{j=m+1}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}\right)^{\mathrm{tr}L^{(a_j)}}=\prod_{j=m+1}^{n}\left|\left(\frac{a_j}{b_j}\right)^{\mathrm{tr}L^{(a_j)}}\right|$$

従って $\det g>0$ である。そこで，$Y^{(\infty)}(\lambda)$ に Schlesinger 変換

(2.37) $\begin{Bmatrix} a_1, \cdots, a_m & b_1, \cdots, b_m \\ -E_1, \cdots, -E_1 & E_1, \cdots, E_1 \end{Bmatrix}$

を施して $a_1, \cdots, b_m$ を見かけの特異点にする。ただし，これらの点における接続行列 $C^{(a_1)}, \cdots, C^{(b_m)}$ はすべて実で，$C^{(b_j)\,t}C^{(a_j)}$ は対角行列となるようにとる。(§3を参照のこと。) この変換により得られる解を $Y_1^{(\infty)}(\lambda, \rho, z)$，又 $g_1 = Y_1^{(\infty)}(0, \rho, z)$ とおくと，g_1 は実対称で

(2.38) $$\det g_1 = \prod_{j=1}^{m}\left(-\frac{\rho^2}{a_j^2}\right) \times \det g$$

を得る。よって，m が奇数であれば $\det g_1 < 0$ であるが，勿論 $\det g_1 = -\rho^2$ が満されているとは限らない。しかし，B-Z[1][2] のトリックを用いいれば，次の如き修正が可能である。

<u>Proposition (B-Z)</u>

(2.39) $$\hat{g}_1 = -\rho(-\det g_1)^{-\frac{1}{2}} g_1$$

とおくと，$\hat{g}_1$ は実対称かつ (0.3) の解で，しかも $\det \hat{g}_1 = -\rho^2$ である。従って対応する metric (0.1) は，真空重力場方程式の解即ち，Ricci flat な metric である。

最終的に構成された $\hat{g}_1$ が漸近的平坦性，即ち $\rho, z \to \infty$ のとき，metric が，$-ds^2 = -dt^2 + \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2$ に漸近するか否か，その為の条件を決定することは今後に残された重要な課題である。求まった解が物理的意味をもつ為の最低条件が，この

境界条件なのである。問題として提出しておく。

問題 $\tilde{g}_1$ が漸近的平坦になる為のモノドロミーの条件を求めよ。

§3 Schlesinger 変換と Soliton-type 解

まず Schlesinger 変換について復習する。次の Fuchs 型方程式を考察する。

$$\frac{dY}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j^{(0)}}{\lambda-\mu_j} Y \tag{3.1}$$

ここで，$A_j^{(0)}$ は，必ずしも対角行列とは限らないことに注意する。(3.1) の解 $Y_0(\lambda)$ で，$\lambda=\mu_1,\cdots,\mu_m,\infty$ に於いて次の局所展開をもつものが存在するとしよう。

$$\begin{aligned} Y_0(\lambda) &= G_0^{(\mu_j)}\hat{Y}^{(\mu_j)}(\lambda)(\lambda-\mu_j)^{L_0^{(\mu_j)}}C_0^{(\mu_j)} \qquad \lambda\mapsto\mu_j,\ j=1,\cdots,m \\ &= \hat{Y}_0^{(\infty)}(\lambda)(\lambda^{-1})^{L_0^{(\infty)}} \qquad \lambda\mapsto\infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで，$\hat{Y}_0^{(\mu_j)}$, $\hat{Y}_0^{(\infty)}$ は各特異点の近傍で正則かつ可逆で，定数項は 1 である。

有理函数 $R_0(\lambda)$ による変換

$$Y_0(\lambda) \longmapsto Y_1(\lambda) = R_0(\lambda)Y_0(\lambda) \tag{3.3}$$

を考える。$R_0(\lambda)$ を適当に選ぶことで，$Y_0(\lambda)$ の exponent を整数だけずらし，接続係数は不変に保つことができる。

$$L_0^{(\mu')} \longmapsto L_1^{(\mu')} = L_0^{(\mu')} + \hat{L}_0^{(\mu')} \qquad (\mu'=\mu_1',\cdots,\mu_N') \tag{3.4}$$

$$\tilde{L}_0^{(\mu')} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{0,1}^{(\mu')} & \\ & \tilde{l}_{0,2}^{(\mu')} \end{pmatrix}, \quad \tilde{l}_{0,\alpha}^{(\mu')} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{\mu'=\mu'_1,\cdots,\mu'_N} \mathrm{trace}\, \tilde{L}_0^{(\mu')} = 0$$

ここで，$\mu'_1, \cdots, \mu'_N$は特異点 $\mu_1, \cdots, \mu_N, \infty$ か，又は，$Y_0(\lambda)$の正則点である。μ'が$Y_0(\lambda)$の正則点であるときは，gauge 行列 $G_0^{(\mu')}$，接続行列 $C_0^{(\mu')}$ を次のように定義する。

$C_0^{(\mu')}$：任意の 定数可逆行列

(3.5) $$G_0^{(\mu')} = Y_0^{(\mu')} C_0^{(\mu')-1}$$

このとき，$Y_0(\lambda)$は $\lambda = \mu'$の 近傍で次のように書くことができる。

(3.6) $$Y_0(\lambda) = G_0^{(\mu')} \hat{Y}_0^{(\mu')}(\lambda) C_0^{(\mu')}$$

$$\hat{Y}_0^{(\mu')}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Y}_{0,k}^{(\mu')} (\lambda - \mu')^k, \quad \hat{Y}_{0,0}^{(\mu')} = 1$$

正則点に於ける exponent は 0 である。

さて(3.4)の exponents の変化が起されるとき，これを type

(3.7) $$\begin{Bmatrix} \mu'_1, \cdots, \mu'_N \\ \tilde{L}_0^{(\mu'_1)}, \cdots, \tilde{L}_0^{(\mu'_N)} \end{Bmatrix}$$

の Schlesinger 変換であると言う。又，$R_0(\lambda)$をその multiplier と呼ぶ。Schlesinger 変換の一般論については[9]を参照して下さい。

この節で議論することを要約する。(3.1)の解$Y_0(\lambda)$の大域的モノドロミーは保存され，かつ 0-value $Y_0(0)$は対称であるとする。$Y_0(\lambda)$に対して Schlesinger 変換

$$(3.8)\qquad \begin{Bmatrix} a_{n+1}, \cdots, a_{n+N}, & b_{n+1}, \cdots, b_{n+N} \\ -E_1, \cdots, -E_1 & E_1, \cdots, E_1 \end{Bmatrix}$$

$$(3.9)\qquad E_1 = diag(1.0), \qquad E_2 = diag(0.1)$$

を施して$Y_1(\lambda)$が得られたとする。(a_j, b_j) $(j = n+1, \cdots, n+N)$は$Y_0(\lambda)$の正則点で、かつ$\mu^2 - 2(w_j - z)\mu - \rho^2 = 0$ $(w_j \neq w_k,\ j \neq k)$の2根とする。$\mu = a_j, b_j$におけるgauge行列$G_0^{(\mu)}$、接続行列$C_0^{(\mu)}$は(3.5)で導入されたものとする。このとき$Y_1(0)$が対称となる為の条件を$C_0^{(\mu)}$ $(\mu = a_j, b_j,\ j = n+1, \cdots, n+N)$の言葉で記述せよ。以上がこの節の目標である。

本論に入る前に(4.8)のmultiplier $R_0(\lambda)$の式を与えておく。

$$(3.10)\qquad R_0(\lambda) = 1 + \sum_{j=n+1}^{n+N} \frac{R_{0.j}}{\lambda - a_j}$$

$$= 1 + [\vec{G}_0^{(b_{n+1})}, \cdots, \vec{G}_0^{(b_{n+N})}] W_0^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda - a_{n+1}}\, {}^t\vec{G}_0^{(a_{n+1})} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda - a_{n+N}}\, {}^t\vec{G}_0^{(a_{n+N})} \end{bmatrix}$$

$$(3.11)\qquad W_0 = (W_{0,ij})_{i,j = n+1, \cdots, n+N}$$

$$= \left(\frac{(G_0^{(a_i)^{-1}} G_0^{(b_j)})_{11}}{a_i - b_j} \right)_{i,j = n+1, \cdots, n+N}$$

$$(3.12)\qquad {}^t\vec{G}_0^{(b_j)} = [G_{0,11}^{(b_j)},\ G_{0.21}^{(b_j)}], \quad {}^t\vec{G}_0^{(a_j)^{-1}} = [G_{0,11}^{(a_j)^{-1}},\ G_{0,12}^{(a_j)^{-1}}]$$

a_j, b_jは$Y_1(\lambda)$の特異点になるが、そこにおけるgauge行列$G_1^{(\mu)}$は次式で与えられる。

(3.13) $$G_1^{(a_j)} = R_{0,j} G_0^{(a_j)} E_1 + R_{0,j} G_0^{(a_j)} \hat{Y}_{0,1}^{(a_j)} E_2 + \Big(1 + \sum_{k(\neq j)} \frac{R_{0,k}}{a_j - a_k}\Big) G_0^{(a_j)} E_2$$

(3.14) $$G_1^{(b_j)} = \Big(1 + \sum_k \frac{R_{0,k}}{b_j - a_k}\Big) G_0^{(b_j)} E_2 + \Big(1 + \sum_k \frac{R_{0,k}}{b_j - a_k}\Big) G_0^{(b_j)} \hat{Y}_{0,1}^{(b_j)} E_1 - \sum_k \frac{R_{0,k}}{(b_j - a_k)^2} G_0^{(b_j)} E_1$$

(3.10)〜(3.14)の導出

考えている *Schlesinger* 変換の *type* が(3.8)であるということより

$$G_1^{(a_j)} \hat{Y}_1^{(a_j)}(\lambda) = R_0(\lambda) G_0^{(a_j)} \hat{Y}_0^{(a_j)}(\lambda)(\lambda - a_j)^{E_1}$$
$$= R_{0,j} G_0^{(a_j)} E_2 + (4.13\text{の右辺}) + O(\lambda - a_j)$$

を得る。両辺を比較して,

(3.15) $$R_{0,j} G_0^{(a_j)} E_2 = 0$$

及び(4.13)を得る。$\lambda = b_j$ に於いては,

$$G_1^{(b_j)} \hat{Y}_1^{(b_j)}(\lambda) = R_0(\lambda) G_0^{(b_j)} \hat{Y}_0^{(b_j)}(\lambda - b_j)^{-E_1}$$
$$= \Big\{1 + \sum_k \frac{R_{0,k}}{b_j - a_k} - \sum_k \frac{R_{0,k}}{(b_j - a_k)^2}(\lambda - b_j) + \cdots\Big\} \times G_0^{(b_j)}$$
$$\times \Big\{1 + \hat{Y}_{0,1}^{(b_j)}(\lambda - b_j) + \cdots\Big\} \times \Big(E_2 + \frac{E_1}{\lambda - b_j}\Big)$$

従って

(3.16) $$\Big(1 + \sum_k \frac{R_{0,k}}{b_j - a_k}\Big) G_0^{(b_j)} E_1 = 0$$

及び(3.14)を得る。(3.15)から $R_{0,k}=R_{0,k}G_0^{(a_k)}E_1G_0^{(a_k)-1}$ であるから，これを(3.16)に代入して

$$G_0^{(b_j)}E_1=\sum_k \frac{R_{0,k}}{a_k-b_j}G_0^{(b_j)}E_1$$

$$=\sum_k \frac{1}{a_k-b_j}R_{0,k}G_0^{(a_k)}E_1(G_0^{(a_k)-1}G_0^{(b_j)})E_1$$

$$\therefore\ G_{0,\alpha 1}^{(b_j)}=\sum_k \frac{1}{a_k-b_j}\Big(\sum_r R_{0,k,\alpha r}G_{0,r1}^{(a_k)}(G_0^{(a_k)-1}G_0^{(b_j)})_{11}\Big)$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix}G_{0,11}^{(b_j)}\\ G_{0,21}^{(b_j)}\end{bmatrix}=\sum_k \frac{(G_0^{(a_k)-1}G_0^{(b_j)})_{11}}{a_k-b_j}R_{0,k}\begin{bmatrix}G_{0,11}^{(a_k)}\\ G_{0,12}^{(a_k)}\end{bmatrix}$$

$\vec{G}_0^{(b_j)}$, $\vec{G}_0^{(a_k)}$ を(3.12)の第1式で定義すると，

$$\vec{G}_0^{(b_j)}=[R_{n+1}\vec{G}_0^{(a_{n+1})},\dots,R_{n+N}\vec{G}_0^{(a_{n+N})}]W_0$$

を得る。これから $R_{n+1},\dots,R_{n+N}$ を求めると(3.10)を得る。

それでは，$Y_1(0)$ が対称である為の条件を決定しよう。方法は色々有り得るが，§1で述べた方針に従うのが最も手取り早い。$Y_0(0)$ は対称であると仮定したので，§1 補題1.2から

$$^{\exists}S_0(\lambda)=S_0(\lambda,\rho,z)\ \ \text{s.t.}\ \ D_1S_0=D_2S_0=0\ \ \text{かつ}$$

(3.17) $$g_0=Y_0(0)=Y_0(-\tfrac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\,{}^tY_0(\lambda)$$

となる。この $S_0(\lambda)$ に対して，$g_1=Y_1(-\frac{\rho^2}{\lambda})S_0(\lambda)\,{}^tY_1(\lambda)$ が λ に依存しない為の条件を問題にする。$Y_0(\lambda)Y_1(\lambda)^{-1}|_{\lambda=\infty}=1$ であるから§1 系1.3より，g_1 が λ に依らなければ，$g_1=Y_1(0)$ かつ対称である。

さて,

$$(3.18)\qquad g_1 = Y_1\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)Y_0\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)^{-1}Y_0(0)\,{}^tY_0(\lambda)^{-1}\,{}^tY_1(\lambda)$$

であるから, Y_1 が Y_0 に Schlesinger 変換(3.8)を施して得られるものであることに注意すれば, g_1 は $\lambda=a_j, b_j$ $(j=n+1,\cdots,n+N)$ を除いて正則かつ $\det g_1 \neq 0$ は明白である。従って, $\lambda=a_j, b_j$ に於いて g_1 が正則である為の条件を求めればよい。

$S_0(\lambda)$ は $\lambda=a_j, b_j$ でそもそも1価正則となることに注意しよう。

$\lambda=a_j, b_j$ で,

$$(3.19)\qquad \begin{aligned} Y_1(\lambda) &= G_1^{(b_j)}\hat{Y}_1^{(b_j)}(\lambda)(\lambda-b_j)^{E_1}C_0^{(b_j)} \qquad \lambda\mapsto b_j \\ &= G_1^{(a_j)}\hat{Y}_1^{(a_j)}(\lambda)(\lambda-a_j)^{-E_1}C_0^{(a_j)} \qquad \lambda\mapsto a_j \end{aligned}$$

という展所展開をもつので,

$$(3.20)\qquad \begin{aligned} g_1 &\overset{\lambda\mapsto a_j}{=} G_1^{(b_j)}\hat{Y}_1^{(b_j)}\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}-b_j\right)^{E_1}C_0^{(b_j)}S_0(\lambda)\,{}^tC_0^{(a_j)}(\lambda-a_j)^{-E_1} \\ &\qquad\times\,{}^t\hat{Y}_1^{(a_j)}(\lambda)\,{}^tG^{(a_j)} \\ &\overset{\lambda\mapsto a_j}{\sim} G_1^{(b_j)}\left(-\frac{b_j}{a_j}\right)^{E_1}(\lambda-a_j)^{E_1}C_0^{(b_j)}S_0(\lambda)\,{}^tC_0^{(a_j)}(\lambda-a_j)^{-E_1}\,{}^tG_1^{(a_j)} \end{aligned}$$

一方

$$(3.21)\qquad \begin{aligned} &(\lambda-a_j)^{E_1}C_0^{(b_j)}S_0(\lambda)\,{}^tC_0^{(a_j)}(\lambda-a_j)^{-E_1} \\ &= E_2C_0^{(b_j)}S_0(a_j)\,{}^tC_0^{(a_j)}E_1\times(\lambda-a_j)^{-1}+O(1) \end{aligned}$$

であるから, $S_0(a_j)={}^tS_0(b_j)$ ($\because$ §1の(1.19)) に注意すれば, g_1 が $\lambda=a_j, b_j$ で正則になる為には

$$(3.22)\qquad E_2C_0^{(b_j)}S_0(a_j)\,{}^tC_0^{(a_j)}E_1=0$$

が必要十分である。

<u>Proposition 3.1</u>　$g_1 = Y_1(-\frac{\rho^2}{\lambda}) S_0(\lambda)\, {}^tY_1(\lambda)$ がλに依存しない, 従って $g_1 = Y_1(0)$ が対称である為の条件は, (3.22)が各 j について成立することである。

<u>Remark</u>　命題4.1で論じたSchlesinger変換は, B-Z[1],[2]で構成されたBäcklund変換と同じである。実際, 次のことに注意する。

"$g_1 = Y_1(-\frac{\rho^2}{\lambda}) S_0(\lambda)\, {}^tY_1(\lambda)$ がλによらない。"

$\Longleftrightarrow$ "$g_1 = R_0(-\frac{\rho^2}{\lambda})\, g_0\, {}^tR_0(\lambda)$ がλによらない。"

B-Z[2]は後者の条件から$R_0(\lambda)$の係数を決定してみせた。なお, B-Z[2]のBäcklund変換と我々のSchlesinger変換との間の対応は, Appendixを付して論じました。参照してください。

次に$Y_0(\lambda)$に対して逐次的にSchlesinger変換(3.8)を施すことを考えよう。

$$(3.23)\qquad Y_\ell(\lambda) \xmapsto{\left\{\begin{smallmatrix} a_{n+1}, \cdots, a_{n+N} & b_{n+1}, \cdots, b_{n+N} \\ -E_1, \cdots, -E_1 & E_1, \cdots, E_1 \end{smallmatrix}\right\}} Y_{\ell+1}(\lambda) = R_\ell(\lambda) Y_\ell(\lambda)$$

ここでmultiplier $R_\ell(\lambda)$ は(3.10)において<u>添え</u>字0をℓに換えた式により定義される。$Y_{\ell+1}(\lambda) = R_\ell(\lambda) \cdots R_0(\lambda) Y_0(\lambda)$であるが, $R_\ell(\lambda) \cdots R_0(\lambda)$ は $a_{n+1}, \cdots, a_{n+N}$ を$\ell+1$位の極にもち, その逆行列は$b_{n+1}, \cdots, b_{n+N}$を$\ell+1$位の極にもつ。我々は, $g_\ell = Y_\ell(0)$が対称のとき, これをN-soliton solution of degree ℓ と呼ぶことに

しよう。

とくに $Y_0(\lambda)$ がスカラー

(3.24) $$Y_0(\lambda) = y_0(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - a_j)^{\alpha_j^{(0)}} (\lambda - b_j)^{\beta_j^{(0)}}, \quad (\alpha_j^{(0)}, \beta_j^{(0)} \in \mathbb{C})$$

のときを問題にしよう。$S_0(\lambda) = y_0(-\frac{\rho^2}{\lambda})^{-1} y_0(0) y_0(\lambda)^{-1}$ とおく。$C_0^{(b_j)}$, $C_0^{(a_j)}$ $(j=1,\cdots,n) = 1$ であることに注意して次の命題を得る。

<u>Proposition 3.2</u>　$C_0^{(b_j,a_j)} = C_0^{(b_j)}\,{}^t C_0^{(a_j)}$ $(j = n+1,\cdots,n+N)$ が対角行列であると仮定する。このとき，$g_\ell = Y_\ell(-\frac{\rho^2}{\lambda}) S_0(\lambda)\,{}^t Y_\ell(\lambda) = Y_\ell(0)$ は対称である。

<u>proof</u>　仮定により，§2 定理2.1 の exponents に関する条件(2.14) を確かめればよい。$Y_\ell(\lambda)$ の $\lambda = a_j, b_j$ $(j=1,\cdots,n)$ に於ける exponents は $\alpha_j^{(0)}$, $\beta_j^{(0)}$ であり，$\lambda = a_j, b_j$ $(j = n+1,\cdots,n+N)$ に於ける exponents は各々，$-\ell E_1$, ℓE_1 である。一方，$y_0(\lambda)$ の $\lambda = a_j, b_j$ $(j = n+1,\cdots,n+N)$ に於ける exponents は 0 である。よって定理2.1の条件は成立している。　q.e.d

命題3.2 の degree 1 のソリトン解 g_1 については，本講究録の伊達論文も参照して下さい。伊達氏の与えられたソリトン解と g_1 は ($y_0 = 1$ として) 同一の物です。

次に g_ℓ の実数値性及び付加条件 (0.2) $\det g_\ell = -\rho^2$ についてであるが，これは $Y_0(\lambda)$ の性質に応じて，§2 で与えた処法に従

って，case by caseに対応する。一つ例をあげる。PとZが実のとき，$Y_0(\lambda)$は実軸の近傍で一価，かつ$Y_0(\lambda)=\overline{Y_0(\bar{\lambda})}$であるとする。(従って$g_0=Y_0(0)$は実である。) $g_1=Y_1(0)$が実となる為の条件は§2の定理2.4から得られる。(cf B-Z[1],[2])

$$
(3.25)\quad \begin{cases} (a_j, b_j):\text{実} \quad C_0^{(a_j)}, C_0^{(b_j)}:\text{実} \quad j=n+1,\cdots,n+m \\ (a_j, b_j)=(\overline{a_{j+1}}, \overline{b_{j+1}}),\ C_0^{(a_j)}=\overline{C_0^{(a_{j+1})}},\ C_0^{(b_j)}=\overline{C_0^{(b_{j+1})}} \\ j=n+m+1,\ n+m+3,\cdots \quad (N-m:\text{even}) \end{cases}
$$

$V_0(a_{j+1})=V_0(a_j)$等が成立しているので，(3.25)と(3.22)は両立することに注意する。

$Y_0(\lambda)$がスカラーでないときのhigher degreeのソリトン解については，十分計算が進んでいないので，別の機会に論じたいと思います。ただ，簡単な場合($n=2, N=1$)に直接計算で確かめたところ，degree 2のソリトン解が存在するには，$Y_0(\lambda)$のexponentsにきつい制約がつかねばならない。又，この問題についてはTomimatsu[10]が参考になるであろう。[10]においては，degree 1の4-ソリトンの見かけの特異点を二つづつpairにして合流させることで，Tomimatsu-Sato解のシリーズの才1番目のものをつくっている。これは我々の立場で云えば，degree 2のソリトン解(2-soliton)に対応するものと思われる。

§4 τ-函数と metric係数f

この節では，Schlesinger方程式に対するτ-函数が本質的には，(0.1)の係数fに他ならないことを示す。まず，方程式(1.1)に戻る。

$$\frac{dY}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{\lambda-\mu_j}Y \tag{1.1}$$

各特異点μ_jは(1.3)を満すとする。又，無限遠点で正規化された解$Y^{(\infty)}(\lambda,\rho,z)$の大域的モノドロミーは，$\rho$と$z$に依存しないと仮定する。

τ-函数について説明しよう。(cf [5], [8]) Schlesinger方程式は(1.1)に対する変形の方程式であり，次の様な完全積分可能系である。

$$dA_j=\sum_{k(\neq j)}[A_k,A_j]\frac{d(\mu_k-\mu_j)}{\mu_k-\mu_j}\qquad j=1,\cdots,n \tag{4.1}$$

ここで，dは$\mu_1,\cdots,\mu_n$に関する外微分である。(4.1)に対応するτ-函数とは，次の式で定義される$\mu_1,\cdots,\mu_n$の超越函数である。

$$d\log\tau=\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\mathrm{trace}\,A_jA_k\frac{d(\mu_j-\mu_k)}{\mu_j-\mu_k} \tag{4.2}$$

右辺の1-form は(4.1)のもとでclosed formである。

さて，函数fは，(0.4)式で定義されるものとする。(0.4)は次のように書き換えられる。

$$d\log(\rho f)=(2\rho)^{-1}\mathrm{trace}(UV)\,dz+(4\rho)^{-1}\mathrm{trace}(U^2-V^2)\,d\rho \tag{4.3}$$

定理1.1の情況においてポテンシャルU, Vは(1.6)式で導入されることに注意して次の定理を得る。

<u>Theorem 4.1</u> 定理1.1の情況を想定する。このとき，τ－函数(4.2)と函数f (4.3)の間に以下の関係が成立する。

(4.4) $$\rho f = const \times \left\{ \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2+\rho^2} \right)^{\frac{1}{2} trace\, L^{(\mu_j)2}} \right\} \times \tau$$

ここで$L^{(\mu_j)}$は$Y^{(\infty)}(\lambda)$の$\lambda=\mu_j$に於けるモノドロミーのexponentで，今の場合，定数である。

~~proof~~ (1.6), (4.2), (4.3)から容易に，

(4.5) $$\begin{aligned} & d\log(\rho f) - d\log\tau \\ &= -\sum_j trace\, A_j^2 \frac{2\rho^2\mu_j}{(\mu_j^2+\rho^2)^2} dz + \sum_j trace\, A_j^2 \frac{\rho(\rho^2-\mu_j^2)}{(\mu_j^2+\rho^2)^2} d\rho \end{aligned}$$

を得る。A_jと$L^{(\mu_j)}$は相似であるから，$trace\, A_j^2 = trace\, L^{(\mu_j)2}$，しかもモノドロミーは保存されているから，これらは定数である。そして，μ_jの満す方程式(1.3)を用ちいて直接計算することで，

(4.6) $$d\log\left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2+\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{-2\rho^2\mu_j}{(\mu_j^2+\rho^2)^2} dz + \frac{\rho(\rho^2-\mu_j^2)}{(\mu_j^2+\rho^2)^2} d\rho$$

がわかる。(4.5), (4.6)を合わせれば，

$$\begin{aligned} & d\log(\rho f) - d\log\tau \\ &= \sum_{j=1}^{m} trace\, L^{(\mu_j)2} d\log\left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2+\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。これより(4.4)を得る。 q.e.d.

この定理は，τ-函数とメトリック係数fとが，初等的因子を除いて本質的に同じものであることを主張する。

次にSchlesinger変換によってメトリック係数fがどのような変化を受けるかについて見よう。§3，命題3.1の情況に戻る。(記号等はそれに従う。) 即ち，$Y_0(\lambda)$をSchlesinger変換$\left\{\begin{matrix} a_{n+1}, \cdots & b_{n+N} \\ -E_1 \cdots & E_1 \end{matrix}\right\}$して，$Y_1(\lambda)$を得たとする。$g_0 = Y_0(0)$，$g_1 = Y_1(0)$とおく。又，$Y_\ell(\lambda)$に対応するτ-函数を$\tau_\ell$，$g_\ell$に対応するメトリック係数を$f_\ell$とおく。又，$W_0$は(3.11)で定義される$N\times N$行列である

定理4.1を用ちいて，次の関係式を得る。

(4.7) $$\rho f_0 = C_0 \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 + \rho^2} \right)^{\frac{1}{2} tr L^{(\mu_j)2}} \times \tau_0$$

(4.8) $$\rho f_1 = C_1 \rho^N \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 + \rho^2} \right)^{\frac{1}{2} tr L^{(\mu_j)2}} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{a_{n+j}}{a_{n+j}^2 + \rho^2} \right) \times \tau_1$$

従って

(4.9) $$f_1 = C f_0 \rho^N \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{a_{n+j}}{a_{n+j}^2 + \rho^2} \right) \times \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)$$

を得る。C_0, C_1, Cは適当な定数である。さて，τ-商τ_1/τ_0はJimbo-Miwa[9] 定理4.1により

(4.10) $$\tau_1/\tau_0 = \det W_0$$

と計算される。$W_{0,ij}$がJimbo-Miwa[9]の意味での特性行列の成分$G_{11}^{(a_{n+i}, b_{n+j})(11)}$に他ならぬことに注意する。(4.9)，(4.10)を合わせて，

Proposition 4.2　次の関係式が成立する。

$$f = C f_0 \rho^N \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{a_{n+j}}{a_{n+j}^2 + \rho^2} \right) \times \det W_0 \tag{4.11}$$

(4.11)は, B-Z[2]に於ける(3.4)に対応する。(cf Appendix)

さて§2で述べたように我々が構成したgは, 一般には, 付加条件(0.2)を満たさないので, 修正が必要である。(2.37)〜(2.39)の情況に戻る。(2.37)によって得られる$Y_1^{(\infty)}(\lambda, \rho, z)$に対応する$\tau$-函数を$\tau_1$, メトリック係数を$f_1$, 又$g_1 = Y_1^{(\infty)}(0)$を付加条件(0.2)を満たすように修正(2.39)を施して得られたものを$\tilde{g}_1$, それに対応するメトリック係数を$\tilde{f}_1$とする。B-Z[2]によりf_1と$\tilde{f}_1$の間には次の関係がある。

Proposition (B-Z)　Qを次の方程式で定義される函数とする。

$$\begin{cases} (\log Q)_\rho = \dfrac{\rho}{8}\left\{(\log \det g_1)_\rho^2 - (\log \det g_1)_z^2\right\} \\ (\log Q)_z = \dfrac{\rho}{4}(\log \det g_1)_\rho \times (\log \det g_1)_z \end{cases} \tag{4.12}$$

このとき,

$$\tilde{f}_1 = f_1 \rho^{\frac{1}{2}} Q^{-1} \tag{4.13}$$

が定数倍の因子を除いて成立する。

この命題を用いれば, $\tilde{f}_1$とτとの間の関係は容易に求まる。少し記号を導入する。

$$t_j = -1,\ (j = 1, \cdots, m),\ \mathrm{tr}\, L^{(a_j)},\ (j = m+1, \cdots, n),\quad T = \sum_{j=1}^{n} t_j \tag{4.14}$$

Proposition 4.3　次の関係式が成立する。

$$\tilde{f}_1 = \mathrm{const} \times \rho^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}T^2+\sum_{j=1}^{n} t_j^2} \prod_{j=1}^{n} a_j^{(T-t_j)t_j} \prod_{j>k} (a_j-a_k)^{-2t_jt_k} \times \tau_1 \tag{4.15}$$

証明は，(2.38)の $\det g_1$ を(4.12)に代入して直接計算すればよい。B-Z [2], (3.6)も参照のこと。

§∞　今後の研究の方向, etc

私がそもそも重力場方程式の研究を始めたのは，Léauté-marcilhacy [11]の論文を読んだのがきっかけである。この論文では，真空重力場方程式(0.3)を変数分離によって解くとき，適当な変換によりPainlevé V型に帰着するということが書かれている。この類の論文は他にもいくつかある。周知のようにPainlevé方程式はモノドロミー保存変形(IMDと略)の変形方程式である。(cf [9])この他にも，IMDと重力場方程式との関連を示唆する論文は多い。例えばCosgrove [3]である。彼の言うところのH_4という函数は，実は，Painlevé VI型のハミルトニアン($=d\log\tau$)の特別な場合に他ならぬ。(もっとも彼はそのことを知らないでいる。)　又，彼の厳密解の構成法は我々のものと密接な関連があるに違いない。それを究明するには，まだ少し時間が必要とされよう。

この小論では，漸近的平坦性のことについては全く触れ得なかったが，B-Z[2]では deg 1 の N-soliton (g_0として flat なメトリックをとる。)の漸近的平坦性について論じているが，一般のNについては完全な条件式は与えられていない。漸近的平坦性の問題を非線型楕円型方程式の境界値と言ってしまえば，それまでのことだが，Kinnersley et.al，Hauser-Ernst [12],[13]そして最近の Cosgrove のプレプリント[14] 等を眺める限りでは，単なる境界値問題の枠を越えた代数解析的な構造の深さに驚嘆する。この問題を I.M.D，もしくは H.Q.F の立場から究明することが筆者の願いです。

最後になりましたが，この小論を書くにあたり，多くの方々の御協力を得ました。京都大学の伊達先生，神保，三輪両先生方から，多くの有益な御助言を頂きました。深く感謝する次才です。又，基礎物理学研究所の佐藤文隆先生からは，Cosgrove[14]のプレプリント等を借して頂きました。感謝致します。

Appendix

B-Z [2] で与えられている Bäcklund 変換と我々の Schlesinger 変換との関連を与える。§3-命題3.1 の情況を想定する。記号はそれに順ずる。

§3の Remark で述べたように、B-Zは、$g_1 = R_0(-\frac{\rho^2}{\lambda}) g_0 {}^t R_0(\lambda)$ が λ に依存しない為の条件から R_0 の係数を決定した。その結果を述べる。

(A.1) $$R_0(\lambda) = 1 + \sum_{j=n+1}^{n+N} \frac{R_{0.j}}{\lambda - a_j}$$

$$R_{0.j} = \vec{N}_j \cdot {}^t\vec{M}_j, \quad {}^t\vec{M}_j = (M_{j.1}\ M_{j.2}), \quad {}^t\vec{N}_j = (N_{j.1}\ N_{j.2})$$

(A.2) $$M_{j.\alpha} = \sum_{r=1}^{2} C_{j.r} (Y_0^{-1}(a_j))_{r\alpha} \qquad \alpha = 1.2, \quad C_{j.r} \in \mathbb{C}$$

$N_{j.\alpha}$ を決定する。まず (Γ_{jk}) を次のように定義する。

(A.3) $$\Gamma_{jk} = \sum_{\alpha,\beta} M_{j.\alpha} (g_0)_{\alpha\beta} M_{k.\beta} \times (\rho^2 + a_j a_k)^{-1}$$

$(D_{jk}) = (\Gamma_{jk})^{-1}$ とおく

(A.4) $$N_{j.\alpha} = \sum_{k=n+1}^{n+N} \sum_{r.r'} D_{jk} a_k^{-1} C_{k.r} Y_0^{-1}(a_j)_{rr'} (g_0)_{r'\alpha}$$

を得る。

問題は、$C_{j,r}$ Γ_{jk} と我々の $C_0^{(b_j)}$, $C_0^{(a_j)}$ と $W_{0.jk}$ の間の関係である。

(A.5) $$Y_0(0) = Y_0(b_j) V_0(a_j) {}^t Y_0(a_j)$$

に注意すると、Γ_{jk}は次のように書き換えられる。

(A.6) $$\Gamma_{jk} = (C_{j.1}, C_{j.2}) Y_0(a_j)^{-1} Y_0(b_k) V_0(a_k) \begin{pmatrix} C_{k.1} \\ C_{k.2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{a_j - b_k}$$

この式と(3.11)を比較して次の結果を得る。

(A.7) $$(C_{j.1},\ C_{j.2}) = (C^{(a_j)}_{0,\ 11},\ C^{(a_j)}_{0,\ 12})$$

$$V_0(a_j)\begin{bmatrix} C_{j.1} \\ C_{j.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{(b_j)^{-1}}_{0,\ 11} \\ C^{(b_j)^{-1}}_{0,\ 21} \end{bmatrix}$$

そして，　$W_{0,\,jk} \times a_k^{-1} = T_{jk}$

(A.7)により $C_0^{(a_j)}$, $C_0^{(b_j)}$ の成分が与えられたとき，(3.22)，即ち，我々の対称性の条件は，勿論，成立している。

References

[1] Belinsky-Zakharov : Sov. Phys. JETP 48 (6) (1978) 985

[2] Belinsky-Zakharov : Sov. Phys. JETP 50 (1) (1979) 1

[3] C.M. Cosgrove : J. Phys. A : Math. Gen. 10 (1977)

[4] E. Date：本講究録の掲載論文

[5] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo : Publ. RIMS, Kyoto. Univ. 15 201 (1979)

[6] T. Miwa ; RIMS preprint 342 (Proc. Japan. Acad., 56A (1980) 301)

[7] T. Miwa ; Ibid

[8] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Ibid 319 (to appear in Physica 1D)

[9] M. Jimbo, T. Miwa : Ibid 227, Proc. Japan. Acad. 56A 149

[10] A. Tomimatsu : Prog. Theor. Phys. 63 (3) (1980) 1054

[11] B. Léauté, G. marcilhacy ; Ann. Inst. Henri Poincaré (1980)

[12] I. Hauser, F.J. Ernst ; J. Math. Phys. 21 (5), (1980) 1126

[13] W. Kinnersley et al : Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations, I ~ VI

I, J. Math. Phys 18 (8) (1977) 1529

II, Ibid 18 (8) (1977) 1538

III, Ibid 19 (9) (1978) 1926

IV Ibid 19 (10) (1978) 2037

Ⅴ : J. Math. Phys. 20 (12) (1979) 2526

Ⅵ : Ibid 20 (12) (1979) 2530

[14] C. M. Cosgrove : Relationships between the group-theoretic and soliton-theoretic techniques for generating stationary axisymmetric gravitational solutions, J. Math. Phys. 21 (9) (1980) 2417