数理解析研究所講究録
第414巻 1981年 98-114

完全流体中の剛体運動と ϑ-公式
(H. Weberの古典的仕事の紹介)

数理・数 青本和彦

これから述べるH. Weberの仕事[6]は今から1世紀前の仕事であるが，私がこれに興味を持った理由は次の4つである：

1) ϑの加法公式は抽象的な数学の公式であるが，これを力学の運動として理解すること；

2) 近年盛んに研究されている，非線型の可積分系の多くは，何らかの意味で調和関数の変形に関連している．完全流体中の剛体運動も又，そうである；

3) ヤコビの逆問題を通して，求積法の何たるかをさらに掘り下げてみること；

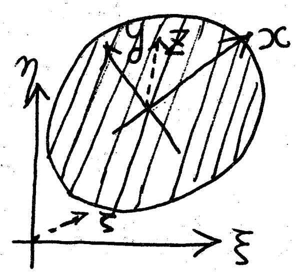
4) Kummer曲面との関連において，微分幾何的側面（線叢の理論，焦曲面の概念）を明らかにすること；

§1. Kirchhoff の方程式

渦なし完全流体 $\mathcal{F}$ の中を無動状態で剛体 $\mathcal{B}$ が運動しているとする。$\mathcal{B}$ の重心を、空間 X に固定した座標 (ξ, η, ζ) で測って (α, β, γ) とする。$\mathcal{B}$ の重心を原点として、$\mathcal{B}$ に固定された座標系を (x, y, z) とおく。

すると

$$(1,1)\quad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$



ここで行列

$$(1,2)\quad g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

上記は $\boldsymbol{\xi} = \mathfrak{a} + g \cdot \boldsymbol{x}$

$$\mathfrak{a} = {}^t(\alpha, \beta, \gamma), \quad \boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z), \quad \boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi, \eta, \zeta)$$

と書かれる。今 g の時間微分 $\dot{g}$ を用いて

$$(1,3)\quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = g^{-1} \dot{\mathfrak{a}}, \quad g^{-1} \cdot \dot{g} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathcal{B}$の外側は完全流体だから, その速度分布は速度ポテンシャルを用いて表示される. $\mathcal{F}$が渦なしだからそれは調和的である. $\mathcal{B}$との境界での境界条件を考慮すれば $\mathcal{F}$と$\mathcal{B}$との合成系の全運動エネルギー T は

$$
\begin{aligned}
(1.4)\quad 2T = {} & a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + \\
& + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur + a_{22}v^2 + \cdots \\
& \cdots\cdots \quad + a_{66}r^2 ,
\end{aligned}
$$

によって与えられる [4] p248. 運動方程式は

$$
(1.5)\quad
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}=u\frac{\partial T}{\partial v}-v\frac{\partial T}{\partial u}+p\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial p}$$

である [4] p245. (1,5)は次の3つの初等積分を持つ.

$$(1,6)\quad \begin{cases} 2T=L, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2=M, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r}=N \end{cases}$$

(但し L, M, N は常数)

Tの形からわかるように (1,6) の3つの方程式は各々2次式を表わす. 従って(1,6)は 6次元アフィン空間 $\mathbb{R}^6$ の中で一般には 3次元多様体 V を定義する.

さらに,(1,3)によって, 次の初等積分を得る.

$$(1,7)\quad \begin{cases} 2T=h_1 \\ \alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}=k, \\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}=k', \\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}=k'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\dfrac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\dfrac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\dfrac{\partial T}{\partial r}=l+\beta k''-\gamma k', \\ \beta_1\dfrac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\dfrac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\dfrac{\partial T}{\partial r}=l'+\gamma k-\alpha k'', \\ \gamma_1\dfrac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\dfrac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\dfrac{\partial T}{\partial r}=l''+\alpha k'-\beta k \end{cases}$$

（但し　$h_1, k, k', k'', l, l', l''$ は常数）

以下　次の2つの仮定をする

(C_1)　$\mathfrak{K}$ は xy-平面，yz-平面，zx-平面について対称，

(C_2)　$k'=k''=0$，$l=l'=l''=0$

これは$\mathfrak{K}$の初期状態が角速度0ならば充たされる．(C_1) は又次を意味する．

$(C_1)'$　$2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2+A_1u^2+B_1v^2+C_1w^2$

この時　Kirchhoff方程式(1,3)(1,5)は次のように書き表わされる：

$$(1,8)\begin{cases} A\dot{p}=(C-B)qr+\dfrac{k^2(C_1-B_1)}{C_1B_1}\alpha_2\alpha_3, \\ B\dot{q}=(A-C)rp+\dfrac{k^2(A_1-C_1)}{A_1C_1}\alpha_3\alpha_1, \\ C\dot{r}=(B-A)pq+\dfrac{k^2(B_1-A_1)}{B_1A_1}\alpha_1\alpha_2 \end{cases}$$

$$
(1,9)\quad \begin{cases} \dot{\alpha}_1 = q\alpha_3 - r\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = r\alpha_1 - p\alpha_3 \\ \dot{\alpha}_3 = p\alpha_2 - q\alpha_1 \end{cases}
$$

これらの初等積分として

$A_1 u = k\alpha_1,\ B_1 v = k\alpha_2,\ C_1 w = k\alpha_3$

$$
(1,10)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 = l + \dfrac{A_1 C_1 B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 - \dfrac{B_1 A_1 C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2, \\[2ex] \alpha_2^2 = m + \dfrac{B_1 A_1 C}{k^2(B_1 - A_1)} r^2 - \dfrac{C_1 B_1 A}{k^2(C_1 - B_1)} p^2, \\[2ex] \alpha_3^2 = n + \dfrac{C_1 B_1 A}{k^2(C_1 - B_1)} p^2 - \dfrac{A_1 C_1 B}{k^2(A_1 - C_1)} q^2 \end{cases}
$$

$$
l + m + n = 1 \quad (\text{i.e. } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1)
$$

$$
(1,11)\quad A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r = 0
$$

従って Kirchhoff 方程式は (仮定 (C_1) (C_2) の下に) (1,8), (1,10), (1,11) に簡約された.

~~さて (1,10) (1,11) は 座標 (p, q, r~~
~~R^6 の中の 2次元曲面 $\tilde{S}$ を定義する. さらに~~
~~座標 ($p^2, q^2, r^2, 1$) = ($x, y, z, 1$) について~~
~~曲面 (Kummer 曲面と呼ばれる) S~~

我々は問題を解きやすくするために、さらに

次の仮定をおく.

(C_3) $\quad AA_1(C_1-B_1)+BB_1(A_1-C_1)+CC_1(B_1-A_1)=0$

この時 (1,10),(1,11) は座標 $(p,q,r,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ について $\mathbb{R}^6$ の中の2次元曲面 $\tilde{S}$ を定義し, 又これから $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ を消去する事によって, 座標 $(p^2,q^2,r^2,1)=(x,y,z,1)$ について $\mathbb{R}^3$ の中の2次元曲面 S を定義する. S は方程式として

$$(1.12)\quad 0=A\sqrt{\left(l+\frac{A_1C_1B}{k^2(A_1-C_1)}y-\frac{B_1A_1C}{k^2(B_1-A_1)}z\right)x}+$$

$$+B\sqrt{\left(m+\frac{B_1A_1C}{k^2(B_1-A_1)}z-\frac{C_1B_1A}{k^2(C_1-B_1)}x\right)y}+C\sqrt{\left(n+\frac{C_1B_1A}{k^2(C_1-B_1)}x-\frac{A_1C_1B}{k^2(A_1-C_1)}y\right)z}$$

と表わされるが, これはよく知られた Kummer 曲面の方程式である [7] p.341 参照.

§2. ヤコビ多様体上の直線運動

補題1. (1,10)(1,11) をみたす $(p,q,r,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ は

$$(2,1)\ \begin{cases}\alpha_1^2=\dfrac{(\delta_1-x_1)(\delta_1-x_2)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta)},\\[2ex] \alpha_2^2=\dfrac{(\delta_2-x_1)(\delta_2-x_2)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)},\\[2ex] \alpha_3^2=\dfrac{(\delta_3-x_1)(\delta_3-x_2)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)},\end{cases}\quad (2,2)\ \begin{cases}l=\dfrac{(\delta_1-\delta_4)(\delta_1-\delta_5)}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)}\\[2ex] m=\dfrac{(\delta_2-\delta_4)(\delta_2-\delta_5)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_1)}\\[2ex] n=\dfrac{(\delta_3-\delta_4)(\delta_3-\delta_5)}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)}\end{cases}$$

$$
(2.3)\quad
\begin{cases}
p\sqrt{\dfrac{AB_1C_1}{k^2(C_1-B_1)}} = \dfrac{\sqrt{1,4,5,x_1}\sqrt{2,3,x_2}-\sqrt{1,4,5,x_2}\sqrt{2,3,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}}, \\[2ex]
q\sqrt{\dfrac{BC_1A_1}{k^2(A_1-C_1)}} = \dfrac{\sqrt{2,4,5,x_1}\sqrt{3,1,x_2}-\sqrt{2,4,5,x_2}\sqrt{3,1,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}}, \\[2ex]
r\sqrt{\dfrac{CA_1B_1}{k^2(B_1-A_1)}} = \dfrac{\sqrt{3,4,5,x_1}\sqrt{1,2,x_2}-\sqrt{3,4,5,x_2}\sqrt{1,2,x_1}}{(x_1-x_2)\sqrt{\Delta}}
\end{cases}
$$

とおく事が出来る. 但し

$$\Delta = (\delta_2-\delta_3)(\delta_3-\delta_1)(\delta_1-\delta_2),$$

$$\sqrt{i,j,k,x} = \sqrt{(\delta_i-x)(\delta_j-x)(\delta_k-x)},$$

$$\sqrt{i,j,x} = \sqrt{(\delta_i-x)(\delta_j-x)}$$

である. 故に

系 種数 2 の超楕円曲線

$$(2.4)\quad \mathcal{L} \qquad y = R(x) = \sqrt{(x-\delta_1)(x-\delta_2)(x-\delta_3)(x-\delta_4)(x-\delta_5)}$$

を考える時, $\tilde{S}$ は $\mathcal{L}$ のヤコビ多様体 $J(\mathcal{L})$ に同型である.

実際 上記補題によって $\tilde{S}$ は $\mathcal{L}$ の対称積に等しく, それは $J(\mathcal{L})$ に

等しい.

補題2. 運動方程式(1,8)(1,9)は座標(x_1,x_2)を用いて表示すれば

$$
(2,5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{R(x_1)}+\dfrac{dx_2}{R(x_2)}=\dfrac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}dt \\[2ex] \dfrac{x_1dx_1}{R(x_1)}+\dfrac{x_2dx_2}{R(x_2)}=\dfrac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\nu\, dt \end{cases}
$$

但し　$\delta_1=\frac{\mu}{A}+\nu$, $\delta_2=\frac{\mu}{B}+\nu$, $\delta_3=\frac{\mu}{C}+\nu$

と表わされる.　故K

定理1. 運動方程式(1,8)(1,9)はヤコビ多様体 $J(\mathcal{L})$ 上で直線運動を定義する.

§3. アーベル積分とϑ-関数

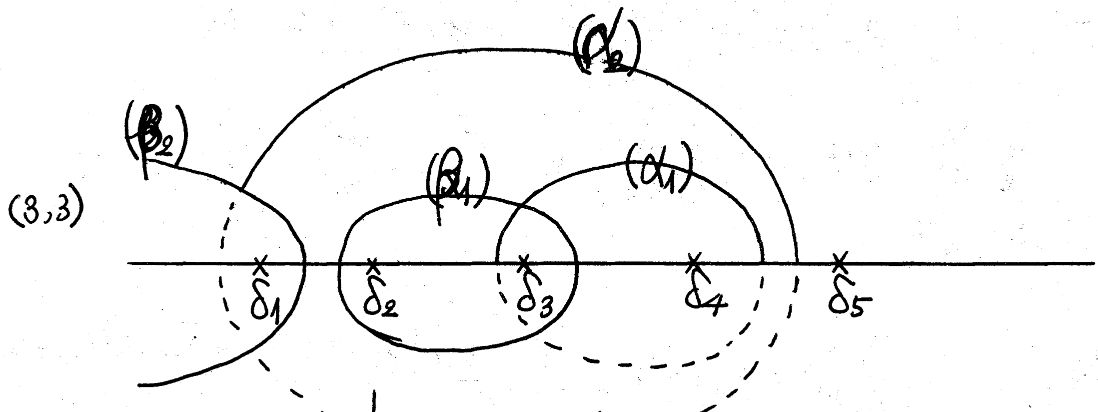
v_1, v_2 をアーベル積分

$$
(3,1)\quad \begin{cases} v_1=\displaystyle\int_{x_1}^{\delta_2}du_1+\int_{x_2}^{\delta_4}du_1, \\[2ex] v_2=\displaystyle\int_{x_1}^{\delta_2}du_2+\int_{x_2}^{\delta_4}du_2 \end{cases}
$$

ここで第1種微分

$$
(3,2)\quad du_1=\frac{a_1+b_1x}{R(x)}dx,\quad du_2=\frac{a_2+b_2x}{R(x)}dx
$$

は輪体$(\alpha_1)(\alpha_2)(\beta_1)(\beta_2)$に関して正規化された周期系を持つものとする.



	du_1	du_2
(α_1)	πi	0
(α_2)	0	πi
(β_1)	a_{11}	a_{21}
(β_2)	a_{12}	a_{22}

さて$(p, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$を v_1, v_2 の関数として表わす事を考える. これはヤコビの逆問題に他ならず, ϑ-関数の商として

表示される．そのために ϑ-関数について少し述べる．実部が負定値 2次の対称行列 $((a_{ij}))$ の 2次形式

(3,4) $$\varphi(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

と 特性 $(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ を用いて 16個の ϑ-関数

(3,5) $$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{Bmatrix}(v_1,v_2) = \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} e^{\varphi(n_1+\frac{1}{2}g_1,\, n_2+\frac{1}{2}g_2) + \sum(n+\frac{g}{2})(2v+h\pi i)}$$

は定義されるが，そのうち 奇関数は 6個，偶関数が 10個である．これらは 次の記号で表示される．

(3,6) $$\vartheta\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}(v_1,v_2) = \vartheta(v_1,v_2) \quad (偶)$$

(3,7) $$\left\{ (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) = \begin{pmatrix} 10 & 01 & 11 & 10 & 01 & 11 \\ 11, & 01, & 10, & 10, & 01, & 01 \end{pmatrix} \right. \quad (奇)$$

(3,8) $$\left\{ \begin{matrix} (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,4) & (3,5) & (3,6) \end{matrix} \right. = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (偶)$$

(i,j) は $(\beta_i + \beta_j)$ の意味．

次は基本的である.

<u>補題3.</u> i) $(\gamma_0)=(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)$ となる特性に対して $\vartheta^2\{\gamma_j\}(v)$ $0\leqq j\leqq 3$ は線型独立

ii) 次の2種類の <u>Göpel 関係式</u>が成り立つ.

$$\vartheta^2\{\gamma_0\}\,\vartheta^2\{\varpi\}(v)=$$

(3.9)
$$=\sum_{i=0}^{3}(-1)^{\sum(\nu^{(0)}+\nu^{(i)})(\mu^{(i)}+h)}\,\vartheta^2\{\gamma_0+\gamma_i+\varpi\}\,\vartheta^2\{\gamma_i\}(v),$$

(3.10)
$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{\sum\mu^{(i)}\nu^{(0)}}\,\vartheta\{\gamma_i+\gamma_4+\gamma_6\}\,\vartheta\{\gamma_i+\gamma_5+\gamma_6\}\cdot$$
$$\cdot\,\vartheta\{\gamma_i+\gamma_4+\gamma_5\}(v)\cdot\vartheta\{\gamma_i\}(v)=0$$

但し $\varpi=\begin{pmatrix} g_1 & g_2\\ h_1 & h_2\end{pmatrix}$, $(\gamma_i)=\begin{pmatrix}\nu_1^{(i)} & \nu_2^{(i)}\\ \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)}\end{pmatrix}$ とする.

iii) (<u>Riemann の ϑ-加法公式 の微分形</u>)

(3.11)
$$\vartheta\{\gamma_0\}\,\vartheta\{\gamma_1+\gamma_4+\gamma_5\}\left[\vartheta\{\gamma_1+\gamma_4+\gamma_5\}(v)\cdot D\vartheta\{\gamma_0\}(v)-\right.$$
$$\left.-\,\vartheta\{\gamma_0\}(v)\cdot D\{\gamma_1+\gamma_4+\gamma_5\}(v)\right]=$$
$$=(-1)^{\sum(\mu^{(5)}+\mu^{(6)})(\nu^{(1)}+\nu^{(5)})}\,\vartheta\{\gamma_1+\gamma_4+\gamma_6\}\cdot\{\gamma_4\}\cdot\vartheta\{\gamma_1+\gamma_4+\gamma_6\}(v)\,\vartheta\{\gamma_4\}(v)$$
$$+(-1)^{\sum(\mu^{(4)}+\mu^{(6)})(\nu^{(1)}+\nu^{(4)})}\,\vartheta\{\gamma_1+\gamma_5+\gamma_6\}\cdot D\vartheta\{\gamma_5\}\cdot\vartheta\{\gamma_1+\gamma_5+\gamma_6\}(v)\cdot\vartheta\{\gamma_5\}(v),$$

$$(3,12)\quad \vartheta\{\gamma_2+\gamma_5+\gamma_6\}\,\vartheta\{\gamma_3+\gamma_5+\gamma_6\}\Big[\vartheta\{\gamma_0\}(v)\cdot D\vartheta\{\gamma_1\}(v)-$$

$$-\vartheta\{\gamma_1\}\,D\vartheta\{\gamma_0\}(v)\Big]=$$

$$=\vartheta\{\gamma_0\}\,D\vartheta\{\gamma_1\}\,\vartheta\{\gamma_2+\gamma_5+\gamma_6\}(v)\,\vartheta\{\gamma_3+\gamma_5+\gamma_6\}(v)+$$

$$+(-1)^{\sum\mu^{(1)}(\nu^{(5)}+\nu^{(6)})}\vartheta\{\gamma_1+\gamma_5+\gamma_6\}\,D\vartheta\{\gamma_4\}\,\vartheta\{\gamma_2\}(v)\cdot\vartheta\{\gamma_3\}(v),$$

但しここで $\vartheta\{\gamma\}$ は $\vartheta\{\gamma\}(0,0)$ を意味し、
$D\vartheta\{\gamma\}(v)$ は $\left(a_1\frac{\partial}{\partial v_1}+a_2\frac{\partial}{\partial v_2}\right)\vartheta\{\gamma\}(v)$
(a_1, a_2 常数) を意味する.

Riemann の Abel 関数の公式により

<u>補題4.</u>

$$\sqrt{\frac{(\delta_1-x_1)(\delta_1-x_2)}{(\delta_1-\delta_3)(\delta_1-\delta_5)}}=\frac{\vartheta_{1,4}\;\vartheta_{1,4}(v)}{\vartheta\;\;\vartheta(v)}$$

$$\sqrt{\frac{(\delta_2-x_1)(\delta_2-x_2)}{(\delta_2-\delta_3)(\delta_2-\delta_5)}}=\frac{\vartheta_{1,4}\;\vartheta_6(v)}{\vartheta_{1,5}\;\vartheta(v)}$$

$$(3,13)\qquad \sqrt{\frac{(\delta_3-x_1)(\delta_3-x_2)}{(\delta_3-\delta_5)(\delta_3-\delta_1)}}=\frac{\vartheta_{2,4}\;\vartheta_{2,4}(v)}{\vartheta\;\;\vartheta(v)}$$

$$\sqrt{\frac{(\delta_4-x_1)(\delta_4-x_2)}{(\delta_4-\delta_5)(\delta_4-\delta_1)}}=\frac{\vartheta_{2,4}\;\vartheta_5(v)}{\vartheta_{2,6}\;\vartheta(v)}$$

$$\frac{(\delta_5-x_1)(\delta_5-x_2)}{(\delta_5-\delta_1)(\delta_5-\delta_3)} = \frac{\vartheta_{3,4}\ \vartheta_{3,4}(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)}$$

従って (2,1) より

(3,14)
$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\vartheta_{1,4}\ \vartheta_{1,4}(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{\vartheta_{2,4}\ \vartheta_{2,4}(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \\[2ex] \alpha_3 = \dfrac{\vartheta_{3,4}\ \vartheta_{3,4}(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \end{cases}$$

方程式 (1,9) (1,11) により

(3,15)
$$\begin{cases} p = \dfrac{\dot\vartheta_1\ \vartheta_1(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \\[2ex] q = \dfrac{\dot\vartheta_2\ \vartheta_2(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \\[2ex] r = \dfrac{\dot\vartheta_3\ \vartheta_3(v)}{\vartheta\ \vartheta(v)} \end{cases}$$

ここで $\dot\vartheta_j = \left(a_1\dfrac{\partial}{\partial v_1} + a_2\dfrac{\partial}{\partial v_2}\right)\vartheta_j(0)$, a_1, a_2 は
ヤコビ多様体 $J(C)$ 上の直線運動

(3,16)
$$\begin{cases} v_1 = a_1 t + b_1 \\ v_2 = a_2 t + b_2 \end{cases}$$

の速度を表わす．同じく

$$(3,17)\qquad \dot{g}\,g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & r' & -q' \\ -r' & 0 & p' \\ q' & -p' & 0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$$

を双対な角速度とすれば

$$(3,18)\qquad p' = \frac{\vartheta_4\,\vartheta_4(v)}{\vartheta\,\vartheta(v)},\quad q' = \frac{\vartheta_5\,\vartheta_5(v)}{\vartheta\,\vartheta(v)},\quad r' = \frac{\vartheta_6\,\vartheta_6(v)}{\vartheta\,\vartheta(v)}$$

と表わされる．故に

定理2．運動方程式 (1,8) (1,9) は Riemann の ϑ-加法公式の微分形の直接の帰結であり，(1,10) (1,11) は Göpel 関係式より得られる．

(注意) Riemann の ϑ-加法公式の微分形はその形から明らかなように広田の双線型形式で表わされている [8] 参照．

§4. 雑談

座標 (p, q, r, p', q', r') の間には

$$(4,1)\qquad p^2+q^2+r^2 = p'^2+q'^2+r'^2$$

の関係が成り立つ．実はこれらは Kummer 曲面を焦曲面とする線叢をなしており，線叢の焦曲面を与える F. Klein の

方程式（Plücker 座標 p_{ij} について）

(4,2) $$0 = dp_{01}\,dp_{23} - dp_{02}\,dp_{13} + dp_{03}\,dp_{12}$$

を用いて アーベル積分 (3,2) を導き出せる事が知られている([3][5] 参照).

$$\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$ は SO(3) の Lie 環の元

と思われるが，SO(3) の普遍被覆 SU(2) のそれとも思われる. 方程式

$$g^{-1}\dot{g} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

は

(4,3) $$g^{-1}\cdot\dot{g} = \begin{pmatrix} iq, & p+ir \\ -p+ir, & -iq \end{pmatrix}$$

と書き直される. このとき $g \in SU(2)$ は ノルム 1 の 4元数 とも見做される. g はやはり ϑ－関数によって表示される. これは F. Caspry による ϑ－関数の直交関係式を用いて説明される([2] 参照).

文献

[1] W. Blaschke, Kinematik und Quaternionen, 1960

[2] F. Caspary, Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten, Crelle Jour. 94(1883), 74–86

[3] F. Klein, 全集

[4] G. Kirchhoff, Uber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Crelle Jour. 71(1869) 237–273,

[5] 田中俊一, 数学講究録 388(1980),

[6] H. Weber, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann. Bd 14(1879),

[7] ——, Uber die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen, Crelle Jour. 84 (1878) 332–354;

[8] 広田良吾, ソリトン理論における直接法, (広大講義録) 1979;