数理解析研究所講究録
第416巻 1981年 1-20



# 概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ函数

立教大学理学部　佐藤　文広

このノートでは、有理数体$\mathbb{Q}$上定義された概均質ベクトル空間（a prehomogeneous vector space，以下 p.v. と略す）について、そのゼータ函数（一般には多変数のDirichlet級数となる）を定義し、その解析接続・函数等式についてこれまでに得られている結果を整理して述べる。（詳細は[8]，[9]，及びその引用文献参照）

## §1. ゼータ函数の定義

$(G, \rho, V)$ を p.v.，$S$ をその特異集合とする。すなわち，$G$は連結線型代数群（$/\mathbb{C}$），$V$は有限次元ベクトル空間（$/\mathbb{C}$）、$\rho$は$G$の$V$上の有理表現，$S$は$V$の代数的真部分集合で$G$が$V-S$に推移的に作用するようなものとする。

p.v. の数論的研究では，$(G, \rho, V)$はある代数的数体$k$上定義されていると仮定する必要がある。ここでは，有理数体$\mathbb{Q}$上定義されている，すなわち，$G$，$V$は

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

が$\mathbb{Q}$上定義された代数群の準同型となるような$\mathbb{Q}$上の構造を備えているとする。このとき、特異集合$S$は、$\mathbb{Q}$上定義された代数的集合となる。$S$の$\mathbb{Q}$上の既約分解を

$$S = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n \cup S_{n+1} \cup \cdots$$

とする。ここで、$S_1, \cdots, S_n$は$V$において余次元1，すなわち$\mathbb{Q}$-既約な超曲面であり，$S_{n+1}, \cdots$は余次元2以上の既約成分とする。$i=1,\cdots,n$について，$S_i$の定義多項式として$\mathbb{Q}$上既約な$\mathbb{Q}$-係数多項式をとって、それを$P_i$とかく。

補題1．(1)　$P_1, \cdots, P_n$は，$(G, \rho, V)$の相対不変式である。すなわち，$G$の有理指標$\chi_1, \cdots, \chi_n$で

$$P_i(\rho(g)x) = \chi_i(g) P_i(x) \quad (1 \leq i \leq n, \ {}^\forall g \in G, \ {}^\forall x \in V)$$

なるものが存在する。$\chi_1, \cdots, \chi_n$は，$G$の$\mathbb{Q}$上定義された指標である。

(2)　$(G, \rho, V)$の相対不変式が$\mathbb{Q}$-係数ならば，

$$c \cdot \prod_{i=1}^{n} P_i(x)^{m_i} \qquad (c \in \mathbb{Q}, \ m_i \in \mathbb{Z})$$

の形に表わされる。

$G_\mathbb{R}$を$G$の real points のなす実Lie群，$G_\mathbb{R}^+$を$G_\mathbb{R}$の指数有限な部分群，$G_\mathbb{R}^+$の離散部分群$\Gamma$を

$$\Gamma = \{ g \in G_{\mathbb{R}}^{+} \cap G_{\mathbb{Z}} \,;\, \chi_1(g) = \cdots = \chi_n(g) = 1 \}$$

で定義する。

$x \in V_{\mathbb{Q}}$ について

$$G_x = \{ g \in G \,;\, \rho(g)x = x \},$$

$$G_x^{\circ} = G_x \text{の（代数群としての）連結成分},$$

$$G_x^{+} = G_x \cap G_{\mathbb{R}}^{+}, \quad \Gamma_x = G_x \cap \Gamma$$

とおく。次に，

$$V_{\mathbb{Q}}^{\circ} = \{ x \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}} \,;\, G_x^{\circ} \text{は non-trivial な } \mathbb{Q}\text{-有理指標をもたぬ} \}$$

と定めると，$V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ は明らかに $\rho(G_{\mathbb{Q}})$-stable な $V_{\mathbb{Q}}$ の部分集合である。

補題2．(1) $x \in V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ ならば，$G_x^{+}$ は unimodular Lie群であり，$G_x^{+}$ の Haar 測度に関する $G_x^{+}/\Gamma_x$ の体積は有限である。
(2) $V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ が空でなければ、任意の $G$ の $\mathbb{Q}$-有理指標 $\chi$ について，$\chi^m$ が相対不変式に対応するような自然数 $m$ が存在する。

$G_{\mathbb{R}}^{+}$ の右不変測度 $dg$ をとる。$G_{\mathbb{R}}^{+}$ の指標

$$\Delta : G_{\mathbb{R}}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{\times}$$

を $d(hg) = \Delta(h)dg$ によって定義する。$\Delta$ は $G$ のある $\mathbb{Q}$-

有理指標の $G_{\mathbb{R}}^+$ への制限となっている。よって、補題1(2)と補題2(2)により

$$|\det\rho(g)|/\Delta(g) = |\chi_1(g)|^{\delta_1}\cdots|\chi_n(g)|^{\delta_n} \qquad (g\in G_{\mathbb{R}}^+)$$

を満足する $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)\in\mathbb{Q}^n$ が存在する。いま、

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n}|P_i(x)|^{-\delta_i}dx \qquad (dx \text{ は Euclid 測度})$$

とおくと、$\omega(x)$ は multiplier $\Delta$ の $V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}^+$-相対不変測度を定める。$x\in V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ について、$G_x^+$ 上の Haar 測度 $d\mu_x$ を

$$dg = \omega(x)d\mu_x$$

となるように正規化する。$x\in V_{\mathbb{Q}}^0$ について

$$\mu(x) = \int_{G_x^+/\Gamma_x} d\mu_x$$

とおくと、補題2(1)により $\mu(x)$ は有限である。

$G_{\mathbb{R}}^+$ による $V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ の軌道分解を

$$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}} = V_1\cup\cdots\cup V_\nu$$

と書く。$\nu$ は有限であることが知られている。又、$V_{\mathbb{Q}}$ の $\rho(\Gamma)$-不変な格子 $L$ をとって

$$L^0 = L\cap V_{\mathbb{Q}}^0, \quad L_i = L^0\cap V_i \qquad (1\leqq i\leqq \nu)$$

とおく。

次のような Dirichlet 級数を考えよう：

$$\xi_i(L;s) = \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i}\mu(x)\Big/\prod_{i=1}^{n}|P_i(x)|^{s_i} \qquad (s\in\mathbb{C}^n).$$

Dirichlet級数 $\xi_1(L:s),\cdots,\xi_\nu(L:s)$ を（もし，$\mathrm{Re}\,s_1,\cdots,\mathrm{Re}\,s_n$ が十分大きいとき絶対収束するならば）$(G,\rho,V)$（と $L$ に）付随するzeta函数という。

$V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少函数 $f$ に対し，積分

$$Z(f,L:s)=\int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma}\prod_{i=1}^{n}|\chi_i(g)|^{s_i}\sum_{x\in L^0}f(\rho(g)x)\,dg\ ,$$

$$\Phi_i(f:s)=\int_{V_i}\prod_{i=1}^{n}|P_i(x)|^{s_i}f(x)\,dx\qquad(1\leqq i\leqq\nu)$$

を考える。

補題3 (1) $\Phi_i(f:s)$ $(1\leqq i\leqq\nu)$ は $\mathrm{Re}\,s_1,\cdots,\mathrm{Re}\,s_n>0$ で絶対収束し正則函数を表わす。さらに，$s$ の函数として $\mathbb{C}^n$ 上の有理型函数に解析接続される。

(2) $\xi_1(L:s),\cdots,\xi_\nu(L:s)$ が $\mathrm{Re}\,s_1,\cdots,\mathrm{Re}\,s_n$ が十分大きいときに絶対収束していると仮定する。このとき，次の積分表示が得られる：

$$Z(f,L:s)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i(L:s)\Phi_i(f:s-\delta)\ .$$

## §2. 函数等式と解析接続

$G$が Reductive 代数群，$S$が絶対既約超曲面（従って $n=1$）の場合は，M. Sato & T. Shintani [3] で取扱われ，函数等式と解析接続については満足すべき結果が得られている。そこで $n \geqq 2$ の場合を主に考察しよう。このとき表現 $\rho$ は既約ではあり得ないことが知られている。特に

$$(G, \rho, V) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2, E \oplus F) \quad /\mathbb{Q}$$

と2つの$\mathbb{Q}$上の表現 $\rho_1$，$\rho_2$ の直和に分解する場合を考える。但し，$n=1$ の場合も含むために，$E=\{0\}$，$V=F$，$\rho_2=\rho$ となる特殊な場合を除外しない。

定義．$\mathbb{Q}$-係数相対不変式 $p(x,y)$ （$(x,y) \in E \oplus F$）で，

$$\det\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j}\right)(x,y) \not\equiv 0$$

となるものが存在するとき，$F$を$\mathbb{Q}$上正則な直和因子と呼ぶ。

$F^*$で$F$の双対空間，$\rho_2^*$で $\rho_2$ の反傾表現を表わし，

$$(G, \rho^*, V^*) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2^*, E \oplus F^*)$$

とおく。$(G, \rho^*, V^*)$ を $(G, \rho, V)$ の$F$に関する部分双対という。以下，この節では，$F$が$\mathbb{Q}$上正則であるとする。

次の補題は，$\mathbb{Q}$上正則な直和因子の性質を述べている。

補題4．$F$を$\mathbb{Q}$上正則な直和因子とすると，

(1) $(G, \rho^*, V^*)$ も p.v. で，$F^*$はその$\mathbb{Q}$上正則な直和因子である。

(2) $(G, \rho^*, V^*)$ の特異集合 $S^*$ に含まれる余次元1の $\mathbb{Q}$-既約成分の個数は $n$ である。すなわち，$(G, \rho, V)$ のそれと一致している．

(3) $Q_1, \cdots, Q_n$ を $S^*$ の余次元1の $\mathbb{Q}$-既約成分の定義多項式，$\chi_1^*, \cdots, \chi_n^*$ をそれぞれ対応する $G$ の $\mathbb{Q}$-有理指標とする。このとき，$G$ の指標群のうちで，$\chi_1^*, \cdots, \chi_n^*$ によって生成される部分群は，$\chi_1, \cdots, \chi_n$ によって生成される部分群に一致する。これらは階数 $n$ の自由アーベル群である．

(4) $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の $G_{\mathbb{R}}^+$-軌道の個数は $\nu$，すなわち $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の $G_{\mathbb{R}}^+$-軌道の個数に等しい。

$\boxed{\text{Local zeta の関数等式}}$ : $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の軌道分解（$G_{\mathbb{R}}^+$ による）を

$$V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

とする。$V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少関数 $f^*$ について

$$\Phi_i^*(f^*; s) = \int_{V_i^*} \prod_{i=1}^{n} |Q_i(x, y^*)|^{s_i} f^*(x, y^*)\, dx\, dy^*$$

（$dx, dy^*$ はそれぞれ $E_{\mathbb{R}}, F_{\mathbb{R}}^*$ の Euclid 測度）とおく。又，$f^*$ の $F_{\mathbb{R}}^*$ に関する部分 Fourier 変換 $\hat{f^*}$ を

$$\hat{f^*}(x, y) = \int_{F_{\mathbb{R}}^*} f^*(x, y^*)\, e^{2\pi i \langle y, y^* \rangle}\, dy^*, \quad (x, y) \in E_{\mathbb{R}} \oplus F_{\mathbb{R}}$$

とする。

補題4の(3)によって，

$$x_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{*\,u_{ij}} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

を満たす $U=(u_{ij}) \in GL(n;\mathbb{Z})$ がとれる。又，補題2の(2)によって

$$|\det \rho_2(g)| = \prod_{i=1}^{n} |x_i(g)|^{\lambda_i} \qquad (g \in G_{\mathbb{R}}^{+})$$

となる $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{Q}^n$ が存在する。この $U$，$\lambda$ は函数等式を記述する重要な量である。

次の定理は，∞-素点における local zeta の函数等式とも呼ぶべきものであり，zeta函数の函数等式の根拠となる。

<u>定理</u> A．F が，$\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子，$S$ が余次元2の既約成分を持たなければ，次の函数等式が成立つ。

$$\Phi_i(\widehat{f^*};s) = \gamma(s) \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(s)\, \Phi_j^*(f^*;(s+\lambda)U)$$

ここで，$\gamma(s)$ は $\Gamma$-函数の適当な積で，又 $a_{ij}(s)$ は指数函数を用いて表され，いずれも $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数 $f^*$ のとり方によらない。

$\boxed{\text{ゼータ函数の函数等式}}$ $V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子 $L$ として，$L=M\oplus N$，$M, N$ はそれぞれ $E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}$ の $\Gamma$-不変な格子，の形をしているものをとる。$N^*$ を $N$ の双対格子，すなわち，

$$N^* = \{ y^* \in F_{\mathbb{Q}}^* \,;\, \langle y, y^* \rangle \in \mathbb{Z},\ {}^{\forall} y \in N \}$$

とし，$L^* = M \oplus N^*$ とおく。$L^*$ は $V_{\mathbb{Q}}^*$ の $\rho^*(\Gamma)$-不変な格

子である。$\xi_i(L;s)$, $\xi_i^*(L^*;s)$ $(1\leq i\leq \nu)$ を，それぞれ，$(G,\rho,V)$ と $L$，$(G,\rho^*,V^*)$ と $L^*$ に付随する zeta 函数とする。次の仮定をおく。

<u>仮定(*)</u>. $V_{\mathbb{Q}}^0=V_{\mathbb{Q}}-S_{\mathbb{Q}}$ であり，$\xi_i(L;s)$, $\xi_i^*(L^*;s)$ $(1\leq i\leq \nu)$ は，それぞれ，$\{s\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,s_i>a_i\ (1\leq i\leq n)\}$，$\{s\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,s_i>a_i^*\ (1\leq i\leq n)\}$ で絶対収束する。

F が $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子であることから，$V_{\mathbb{Q}}^{*0}=V_{\mathbb{Q}}^*-S_{\mathbb{Q}}^*$ が従うことを注意しておく。

$\mathbb{C}^n$ の領域 $B$, $B^*$, $D$, $D^*$ を次のように定義する。

$$B=\{s\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,s_i>\mathrm{Max}(a_i,\delta_i)\ (1\leq i\leq n)\},$$
$$B^*=\{s\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,s_i>\mathrm{Max}(a_i^*,\delta_i^*)\ (1\leq i\leq n)\},$$

$D=B$ と $(B^*U^{-1}+\lambda)$ との合併集合の convex hull，

$D^*=B^*$ と $(B-\lambda)U$ との合併集合の convex hull。

但し，$\delta^*=(\delta_1^*,\cdots,\delta_n^*)\in\mathbb{Q}^n$ は，$(G,\rho^*,V^*)$ について $\delta$ と同じように定義される。$\delta$ と $\delta^*$ の間には，$\delta^*=(\delta-2\lambda)U$ の関係がある。又，$D^*=(D-\lambda)U$ である。

さて，定理 A と補題 3 (2) で与えられた積分表示に基いて次が証明できる。

<u>定理 B</u>. 定理 A の仮定に加えて，上記の仮定(*)が成立つとする。このとき，

(1) $\xi_1(L;s),\cdots,\xi_\nu(L;s)$ (resp. $\xi_1^*(L^*;s),\cdots,\xi_\nu^*(L^*;s)$) は

$D$ (resp. $D^*$) 上の有理型函数に解析接続される。

(2) $v(N^*) = \int_{F_{\mathbb{A}}^*/N^*} dy^*$ とおくと，函数等式

$$v(N^*)\,\xi_i^*(L^*;(s-\lambda)U) = \gamma(s-\delta)\sum_{j=1}^{\nu} a_{ji}(s-\delta)\,\xi_i(L;s)$$

が成立つ。

<u>系</u>. $G$が Reductive で，$V$が$\mathbb{Q}$上正則であり，仮定(*)が満たされているとする。このとき，ゼータ函数 $\xi_1(L;s),\cdots,\xi_\nu(L;s)$ は $\mathbb{C}^n$全体に有理型函数として延長できる。

（証明） $G$が Reductive で，$V$が$\mathbb{Q}$上正則ならば，定理Aの仮定は自動的に満足される。又，このとき $U=-1_n$ とることができるから $D=\mathbb{C}^n$となる。よって，主張は定理Bの(1)から直ちに得られる。 ■

定理Bによれば，$\xi_i(L;s)$は，少くとも$\mathbb{Q}$上正則な直和因子の数だけの函数等式を満足する。すなわち，多変数ゼータ函数は多数の函数等式を持ちうるのである。具体例については，整数論城崎シンポジウム（1979）報告集にいくつかまとめておいたので参照して下さい。

## §3. 函数等式の証明（スケッチ）

この節では，定理Aから定理Bが導かれる道筋を簡単に述べる。

$f$, $f^*$ をそれぞれ $V_{\mathbb{R}}$, $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数とすると，補題3の(2)によって，次の積分表示が得られる：

$$Z(f, L; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(L; s)\,\Phi_i(f; s-\delta) \quad (s \in B),$$

$$Z^*(f^*, L^*; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(L^*; s)\,\Phi_i^*(f^*; s-\delta^*) \quad (s \in B^*).$$

ここで，$Z$, $Z^*$ は次のような積分である：

$$Z(f, L; s) = \int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma} \prod_{i=1}^{n} |\chi_i(g)|^{s_i} \sum_{x \in L \setminus S} f(\rho(g)x)\,dg,$$

$$Z^*(f^*, L^*; s) = \int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma} \prod_{i=1}^{n} |\chi_i^*(g)|^{s_i} \sum_{x^* \in L^* \setminus S^*} f^*(\rho^*(g)x^*)\,dg.$$

函数等式の証明にとって，中心的役割を果すのは次の補題である。

<u>補題</u>5. $f^*$ を $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数で，$f^*$, $\hat{f^*}$ はそれぞれ特異集合 $S$, $S^*$ 上で $0$ となるようなものとする。　このとき，$Z(f, L; s)$, $Z^*(f^*, L^*; s)$ はそれぞれ $D$, $D^*$ 上の正則函数に延長され

$$v(N^*)\, Z^*(f^*, L^*; (s-\lambda)U) = Z(\hat{f^*}, L; s)$$

が成立つ。

（証明）点 $b\in\mathbb{Z}^n\cap B$ と点 $b^*\in\mathbb{Z}^n\cap(B^*U^{-1}+\lambda)$ をとり、

$$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)=b-b^*,$$
$$\chi^\beta=\chi_1^{\beta_1}\cdots\cdots\chi_n^{\beta_n}$$

とおく。領域 $D_\pm$, $D_\pm^*$ を

$$D_\pm=\{s\in\mathbb{C}^n;\ s\pm t\beta\in B\quad\text{for }\exists t\geqq 0\}$$
$$D_\pm^*=\{s\in\mathbb{C}^n;\ s\mp t\beta U\in B^*\quad\text{for }\exists t\geqq 0\}$$

と定める。さらに

$$\left.\begin{matrix} Z_+(f,L;s)\\ Z_-(f,L;s)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\displaystyle\int_{|\chi^\beta(g)|\geqq 1}\\ \displaystyle\int_{|\chi^\beta(g)|\leqq 1}\end{matrix}\right\}\prod_{i=1}^n|\chi_i(g)|^{s_i}\sum_{x\in L\setminus S}f(\rho(g)x)\,dg$$

$$\left.\begin{matrix} Z_+^*(f^*,L^*;s)\\ Z_-^*(f^*,L^*;s)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\displaystyle\int_{|\chi^\beta(g)|\leqq 1}\\ \displaystyle\int_{|\chi^\beta(g)|\geqq 1}\end{matrix}\right\}\prod_{i=1}^n|\chi_i^*(g)|^{s_i}\sum_{x^*\in L^*\setminus S^*}f^*(\rho^*(g)x^*)\,dg$$

とおくと、$Z_\pm(f,L;s)$ (resp. $Z_\pm^*(f^*,L^*;s)$) は $D_\pm$ (resp $D_\pm^*$) で絶対収束し

$$Z(f,L;s)=Z_+(f,L;s)+Z_-(f,L;s)\qquad(s\in D)$$
$$Z^*(f^*,L^*;s)=Z_+^*(f^*,L^*;s)+Z_-^*(f^*,L^*;s)\qquad(s\in D^*)$$

が成立つ。ここで、部分 Fourier 変換に Poisson の和公式を適用すると、$f^*$に関する仮定によって、

$$\prod_{i=1}^n|\chi_i(g)|^{\lambda_i}\sum_{x\in L\setminus S}\hat{f}^*(\rho(g)x)=v(N^*)\sum_{x^*\in L^*\setminus S^*}f(\rho^*(g)x^*)$$

を得る。これから，少くとも形式的には

$$Z_{\pm}^{*}(f^{*}, L^{*}; (s-\lambda)U) = v(N^{*})^{-1} Z_{\mp}(\hat{f^{*}}, L; s)$$

となる。この式の両辺の絶対収束域を調べてみよう。右辺は $D_{\mp}$ 上で絶対収束している。一方左辺は $D_{\pm}^{*}U^{-1}+\lambda$ で絶対収束する。$\beta$ の選び方により，この2つの領域の共通部分は，空でない凸集合である。よって，上の式は，

$$D_{\mp} \cup (D_{\pm}^{*}U^{-1}+\lambda)$$

で成立ち，函数等式

$$Z^{*}(f^{*}, L^{*}; (s-\lambda)U) = v(N^{*})^{-1} Z(\hat{f^{*}}, L; s)$$

は，$B \cup (B^{*}U^{-1}+\lambda)$ $(\subset \{D_{+} \cup (D_{-}^{*}U^{-1}+\lambda)\} \cap \{D_{-} \cup (D_{+}^{*}U^{-1}+\lambda)\})$ で成立ち，両辺はこの領域での正則函数を表わしている。従って Bochner の定理によって，その convex hull である $D$ まで正則函数として解析接続される。 ▨

さて，補題5の条件を満たす函数 $f^{*}$ は，十分多く構成できる（[3] の Final Remarks 参照，又は [8]）。例えば，$f^{*}$ の台が $G_{\mathbb{R}}^{+}$-軌道 $V_{i}^{*}$ に含まれ，$\Phi_{i}^{*}(f^{*}; s) \neq 0$ となるものがとれる。このとき，補題5の函数等式は，

$$\xi_{i}^{*}(L^{*}; (s-\lambda)U)\, \Phi_{i}^{*}(f^{*}; (s-\lambda)U-\delta^{*})$$
$$= v(N^{*})^{-1} \sum_{j=1}^{\nu} \xi_{j}(L; s)\, \Phi_{j}(\hat{f^{*}}; s-\delta) \qquad (s \in D)$$

を意味している。一方，定理Aにより

$$\Phi_j(\hat{f}^*; s-\delta) = \gamma(s-\delta)\sum_{\ell=1}^{\nu} a_{j\ell}(s-\delta)\Phi_\ell^*(f^*; (s-\delta+\lambda)U)$$

$$= \gamma(s-\delta)\, a_{ji}(s-\delta)\Phi_i^*(f^*; (s-\lambda)U-\delta^*)$$

である。ここで，$\mathrm{supp}\, f^* \subset V_i^*$，及び $\delta^* = (\delta-2\lambda)U$ であることを用いた。この2つの式より直ちに，

$$\xi_i^*(L^*; (s-\lambda)U)$$

$$= v(N^*)^{-1}\gamma(s-\delta)\sum_{j=1}^{\nu} a_{ji}(s-\delta)\xi_j(L; s) \quad (s \in D)$$

を得る。これは，定理Bの函数等式に他ならない。

又，$\mathrm{supp}\, f^* \subset V_i^*$，$\Phi_i^*(f^*; s) \not\equiv 0$，$Z^*(f^*, L^*; s)$ が $D^*$ 上の正則函数に延長できること，この3つの事実から，$\xi_i^*(L^*; s)$ が $D^*$ 上の有理型函数に解析接続されることがわかる。

$\mathrm{supp}\, \hat{f}^* \subset V_i$，$\Phi_i(\hat{f}^*; s) \not\equiv 0$ となるような $f^*$ で補題5の条件を満たすものも構成できる。この $f^*$ を用いれば，$\xi_i(L; s)$ が $D$ 上の有理型函数に解析接続されることもわかる。

§4. ゼータ函数の収束

具体的にp.v.が与えられて、そのゼータ函数を構成しようとするときには, $\xi_i(L;s)$ の収束をまず確めねばならない。これについて, 一般に次が予想できる。

予想! $\xi_1(L;s), \cdots, \xi_\nu(L;s)$ は $\mathrm{Re}\,s_1>\delta_1, \cdots, \mathrm{Re}\,s_n>\delta_n$ で絶対収束する。$\delta_1, \cdots, \delta_n$ は絶対収束横座標を与える。

多くの場合, 個別的にこのことは確められているのだが, ある程度一般的な結果として次のようなことがわかる。

$$H=\{g\in G;\ \chi_1(g)=\cdots=\chi_n(g)=1\},$$

その連結成分を $H^\circ$ とおく。$t=(t_1,\cdots,t_n)\in(\mathbb{C}^\times)^n$ について,

$$V(t)=\{x\in V-S;\ p_1(x)=t_1,\cdots,p_n(x)=t_n\}$$

とおくと、$H$ は $V(t)$ に推移的に作用する。

定理C (1) $H^\circ$ が $V(t)$ に simply transitively に作用しているならば、$\xi_1(L;s), \cdots, \xi_\nu(L;s)$ は $\mathrm{Re}\,s_1, \cdots, \mathrm{Re}\,s_n$ が十分大きいとき絶対収束する。

(2) さらに、$\mathbb{Q}$-既約な相対不変式 $P_1, \cdots, P_n$ が、$\mathbb{C}$ 上でも既約であれば, $\xi_1(L;s), \cdots, \xi_\nu(L;s)$ は $\mathrm{Re}\,s_1>\delta_1, \cdots, \mathrm{Re}\,s_n>\delta_n$ で絶対収束する。

この定理は、T. Suzuki [6] で用いられている方法を精密化することで証明できる。実は、定理Cはもっと一般化できるが条件の記述が複雑になるので省略する (cf. [9])。しかし

上の定理のレベルでも色々興味ある実例が構成できる。次にその一例をあげるが、その前に定理Bの系と定理Cを組みあわせて次の定理が得られることに注意しておこう。

定理D. GがReductive, Vが$\mathbb{Q}$上正則, $V(t)$に$H^0$がsimply transitivelyに作用するならば、ゼータ函数 $\xi_1(L:s),\dots,\xi_l(L:s)$ は$\mathbb{C}^n$上の有理型函数に延長される。

例. $G$ = $n\times n$ 下三角行列のなす群

$$V = \{X \in M_n \,;\, {}^tX = X\},$$

$$\rho(g)X = gX{}^tg$$

によって p.v. が得られる。$X\in V$ の $i\times i$ の首座小行列式を $P_i(X)$ と記すと、特異集合 $S$ は

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{X\in V \,;\, P_i(X)=0\}$$

で与えられる。このとき、

$$H^0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in G\right\}。$$

$$\Gamma_\infty = H^0 \cap M_n(\mathbb{Z})$$ とおく。

$L(\subset V_{\mathbb{Q}})$ を $\Gamma_\infty$-invariant lattice とし、$\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n$ について

$$L_\varepsilon = \{X\in L \,;\, \mathrm{sgn}\, P_i(X) = \varepsilon_i\}$$

とおく。$(G,\rho,V)$ と $L$ に付随するゼータ函数は

$$\xi_\varepsilon(L:s) = \sum_{X\in\Gamma_\infty\backslash L_\varepsilon} 1\Big/\prod_{i=1}^{n}|P_i(X)|^{s_i} \quad (s\in\mathbb{C}^n)$$

で定まる。この空間は定理Cの(2)の条件を満足し $\delta=(1,\cdots,1)$ である。すなわち，$\zeta_\varepsilon(L;s)$ は $\mathrm{Re}\,s_1,\cdots,\mathrm{Re}\,s_n>1$ で絶対収束する。さらに $L$ が $SL(n;\mathbb{Z})$ で stable な格子の場合には，$\zeta_\varepsilon(L;s)$ は，定理Dの条件を満足する空間のゼータ函数と（Riemann ゼータ函数の積を除いて）一致することが示され，従って，$\mathbb{C}^n$ 上の有理型函数に解析接続することができる。このことと $\zeta_\varepsilon$ の函数等式については，[10] を参照されたい。

## §5. 今後の課題

最後に，今後検討されるべき課題をいくつかあげておきたい。

(1) ゼータ函数の収束判定条件：§4で述べた予想が成立てば大変具合が良い。ただし，函数等式の証明に限れば，収束の限界が $\delta_1,\cdots,\delta_n$ で与えられることは必要ではなく，$\mathrm{Re}\,s_1,\cdots,\mathrm{Re}\,s_n$ が十分大きいところで収束することが示されれば十分である。また，定理Cがその一例であるが，部分的な結果であっても実用的な収束判定条件を見出すことも重要である。A.Weil と J.I.Igusa による判定条件（[7]，[1]）は少し厳しすぎる条件であるが，M.Sato & T.Shintani [3] で有効に利用されている。

(2) Reductive でない群に対するゼータ函数の解析接続：

定理Bの系によれば，群Gがreductiveで$V$が$\mathbb{Q}$-正則（さらにゼータ函数の収束を仮定する）ならば，$\xi_1(L;S)$，…，$\xi_n(L;S)$は$\mathbb{C}^n$全体に有理型に延長される。Vが$\mathbb{Q}$-正則であっても，Gがreductiveでなければ，定理Bを用いてゼータ函数を$\mathbb{C}^n$全体に延長することはできない。この場合，どこまで解析接続可能であるか，例えば定理Bで与えた領域Dが限界であるかどうか等々，多くの問題がある。

(3) $V_{\mathbb{Q}}^0 \subsetneq V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$の場合のゼータ函数．

定理Bの証明に際し，我々は$V_{\mathbb{Q}}^0 = V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$を仮定した。$V_{\mathbb{Q}}^0$が$V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$の真部分集合となるときには，ゼータ函数の研究は著しく困難となる。典型的な例はC.L.Siegel［5］にある3元2次形式で$\mathbb{Q}$上でnon-trivialな零点を持つ場合のゼータ函数である。2次形式が$xz - y^2$で与えられる場合には，Siegelの結果の改良がT.Shintani［4］にある。この論文の結果は多変数ゼータ函数の応用という視点から見ても興味深い。

(4) ゼータ函数の留数，特殊値の計算法．

p.v.のゼータ函数の数論的応用を考える場合には，極における留数や，特殊値の計算について理論を発展させておくことが望まれる。

(5) 可約な p.v. の分類：既約な p.v. の分類は，M. Sato & T. Kimura [2] でなされた。多変数ゼータ函数の具体例を豊富に構成していくためには，可約な p.v. の分類の試みがもっと進められる必要がある。又，その際，全空内の正則性ばかりでなく，どんな直和因子が正則かも調べられる必要がある。分類の第一歩としては，本講究録の木村達雄氏による報告を参照されたい。

(6) "正則な p.v. の特異集合は超曲面である" という予想が解決されるならば，これまでの記述にある "特異集合は超曲面であるとする" という仮定は完全に省くことができるので，理論的には好ましい。

〈参考文献〉


[1] J-I. Igusa, On certain representations of semi-simple algebraic groups and the arithmetic of the corresponding invariants (1), Inv.Math., 12(1971), 62-94.

[2] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, Nagoya Math. J. 65(1977), 1-155.

[3] M.Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100 (1974), 131-170.

[4] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 22(1975), 25-65.

[5] C.L. Siegel, Uber die Zetafunktionen indefiniter quadratischen Formen, Math. Zeit., 43(1938), 682-708.

[6] T.Suzuki, On zeta functions associated with quadratic forms of variable coefficients, Nagoya Math. J., 73(1979), 117-147.

[7] A. Weil, Sur les formulesde Siegel dans la theorie des groupes classiques, Acta Math., 113(1965), 1-87.

[8] F. Sato., Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional Equations (preprint).

[9] ________, Zeta functions inseveral variables associated with prehomogeneous vector spaces II: A Convergence Criterion (preprint).

[10] ________, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces III: Eisenstein series for indefinite quadratic forms (preprint).

[11] ________, 概均質ベクトル空間の多変数Zeta函数, 整数論城崎シンポジウム報告集 (1979).