

# $Spin(10) \times GL(3)$ に係わる既約概均質 ベクトル空間の holonomy diagram と $b$ -関数

筑波大学附属盲学校

尾 関 育 三

( $Spin(10) \times GL(3)$ ,  $\Lambda \otimes \Lambda_1$ ,  $V(16) \otimes V(3)$ ) ( $\Lambda$  は偶の半  $Spin$  表現,  $\Lambda_1$  は恒等表現) については 1974 年川原洋人氏が研究し, 「31 個の orbits に分解される」と報告されている ([1] 参照) が, holonomy diagram や  $b$ -関数については 今日まで未解決であった。筆者は川原氏の研究を引き継ぎ, holonomy diagram と  $b$ -関数について明らかにすることを試み, 一応の結果を得たので以下にそれを記す。なお, これによって, 既約概均質ベクトル空間の holonomy diagram は全て明らかになった。 ([3] ~ [6] 参照)

定義 および記号

$$G = Spin(10) \times GL(3)$$

$$\rho = \Lambda \otimes \Lambda_1$$

$$V = V(16) \otimes V(3) \quad \text{但し } V(n) \text{ は } n \text{ 次元ベクトル空間}$$

$S_{ij\ell}$ : codimension  $i$  の  $G$ -orbit で, dual な orbit が codimension  $j$ , 代表点の isotropy subgroup の unipotent 部分から次元のもの。但し  $i, j$  で他と区別できる場合には  $\ell$  は省略するともある

$x_{ij\ell}$ :  $S_{ij\ell}$  の代表点

$G_x$ : 点  $x$  の isotropy subgroup

$V_x^*$ : 点  $x$  における conormal vector space. すなわち  

$$V_x^* = \{y \in V^* \mid \langle dp(A)x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}\}$$
(但し  $\mathfrak{g}$  は  $G$  の Lie 環,  $V^*$  は  $V$  の dual space,  $dp$  は  $p$  の微分表現)

$\Delta_{ij\ell}$ :  $S_{ij\ell}$  の conormal bundle, すなわち

$\Delta_{ij\ell} = \{(x, V_x^*) \in V \times V^* \mid x \in S_{ij\ell}\}$  の Zariski 閉包.

$W = \{(x, \varepsilon \text{grad log } f(x)) \in V \times V^* \mid x \in V - S, \varepsilon \in \mathbb{C}\}$  の Zariski 閉包.  $f(x)$  は  $(G, \rho, V)$  の相対不変式 (12 次の齊次多項式)

$$S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

( [2] 参照 )

1.  $(G, P, V)$  の orbit 分解

Proposition 1.  $(G, P, V)$  は表 I に示す各点によつて代表される 32 個の orbit に分解される。

注① 川原氏は「31 個の orbit に分解される」と記しているが、点  $X_{11, 15}$  に代表される orbit が見落されている。他はすべて川原氏によつて見出されたものに一致する。

注② 表 I の点がすべて異なる orbit に属することは、isotropy subgroup が互いに異なることから知られる(表 2)

注③ ある orbit の conormal bundle  $\Delta$  が  $W$  に含まれ、かつ  $G$ -prehomogeneous であれば  $f^s$  ( $f$  は相対不変式) のみならず micro-differential equations  $\mathcal{M} = \mathcal{E}f^s$  は simple holonomic system になり、特にその order  $\text{ord}_s f^s$  が一意的に定まる。( [2] 参照 )

表 I 中、 $\not\subset W$  と記された orbits はその conormal bundle  $\Delta$  が  $W$  に含まれないものである。それは  $S_{13, 13, 14}$  を除き、それらに関する order  $\text{ord}_s f^s$  が求められない (不定となる) ことから知られる。

$\Delta_{13, 13, 14} \not\subset W$  は  $\Delta_{13, 13, 11} \subset W$  から知られる。但し order  $\text{ord}_{\Delta_{13, 13, 14}} f^s$  が形式的には決定できる。これは注目すべき例である。

注④ 表 I 中  $N, P$  と記した orbits の conormal bundle と  $\Delta_{11, 11}$  については  $W$  に含まれるか否かは目下のところ不明である。他はすべて  $W$  に含まれる。(証明後記)

[表 I] 各 orbit の代表点.

$V(16)$  の basis :  $1, e_i, e_{i_2}, e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} e_{i_4}, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5$

この略記法 :  $e, i, i_2, \hat{i}_j$  (但し  $\hat{i}_j e_{ij} = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ )

$V(3)$  の basis :  $e_6, e_7, e_8$  (略記法 6, 7, 8)

e.g. :  $e_6 = 1 \otimes e_6, \hat{2}6 = -e_1 e_3 e_4 e_5 \otimes e_6, 127 = e_1 e_2 \otimes e_7$

s.d. : self dual

N.P. : not prehomogeneous.

$i$	$j$	$k$	$S_{ijk}$ の代表点.	$S_{jik}$ の代表点.	$j$	$i$	$k'$
0.	48.	0	$e_6 + \hat{3}6 + 127 - \hat{2}7 + 138 + \hat{1}8$	0	48.	0.	0.
1.	27	7	$156 - 246 - 147 + 237 + e_8 + \hat{2}8$	$e_6 + 127$	27.	1.	17.
3.	35.	5	$e_6 + \hat{1}6 + 257 + \hat{5}7 + 158$	$\not\subseteq W$ $e_6$	35.	3.	12.
3.	19.	5	$e_6 + \hat{4}6 + 347 + \hat{3}7 + 138 - 248$	$136 + 246 + 127 + e_8$	19.	3.	17.
5.	23.	7	$e_6 + \hat{5}6 + 2 \times 137 + 257 + 148 - \hat{4}8$	N.P. $e_6 + 127 + 138$	23.	5.	14.
5.	15.	7	$e_6 - 2 \times \hat{4}6 + 347 - \hat{3}7 + 138 + \hat{5}8$	$\not\subseteq W$ $156 + \hat{5}6 + e_7 + 128$	15.	5.	15.
6.	22.	2.	$156 + \hat{1}6 + e_7 + \hat{5}8$	$\not\subseteq W$ $e_6 + \hat{5}7$	22.	6.	10.
6.	14.	9.	$e_6 + \hat{5}6 + 237 + \hat{3}7 + 158$	$e_6 + 157 + \hat{5}8$	14.	6.	7.
7.	23.	8.	$256 - \hat{2}6 + e_7 - \hat{5}7 + 128$	$126 + 346 + e_7$	23.	7.	14.
7.	17.	10.	$246 - \hat{4}6 - 147 - \hat{5}7 + e_8$	N.P. $126 + 347 + e_8$	17.	7.	14.
8.	8.	11.	$256 + \hat{5}6 + 237 - 157 + e_8$	s.d.	8.	8	
9.	9.	9.	$156 - \hat{4}6 + \hat{5}7 + e_8$	s.d.	9.	9.	
10.	10.	10.	$156 + 236 + \hat{5}7 + e_8$	$\not\subseteq W$ s.d.	10.	10	
11.	15.	9.	$256 + \hat{5}6 - 157 + e_8$	$\not\subseteq W$ $e_6 + \hat{5}6 + 147 + \hat{4}7$	15.	11.	13.
11.	11.	12	$e_6 - \hat{4}6 + 157 + \hat{5}7 + 148$	s.d.	11.	11.	
13.	13.	14	$e_6 - \hat{4}6 + 157 + \hat{5}7 + 128$	$\not\subseteq W$ $346 - \hat{4}6 + 127 + e_8$	13.	13.	11.
14.	30.	2	$e_6 + \hat{5}6 + 157 + \hat{1}7$	N.P. $e_6 + \hat{5}6$	14.	30.	10
16.	16.	8.	$\hat{5}6 + 127 + 347 + e_8$	N.P. s.d.	16.	16.	
18.	18.	13.	$156 + \hat{5}6 + e_7$	$\not\subseteq W$ s.d.	18.	18.	

注(1)  $V$  における  $G$ -orbit  $S$  の conormal bundle  $A \subset V \times V^*$  と  $V^*$  における  $G$ -orbit  $S^*$  の conormal bundle  $A^* \subset V \times V^*$  とが一致するとき  $S$  と  $S^*$  は互いに dual な orbit という。

(2)  $V$  の  $G$ -orbits と  $V^*$  の  $G$ -orbits とは全体として一致する。よって  $S_{ijk}^* \subset V^*$  を  $S_{ijk} \subset V$  と同一視する。

(3)  $S_{ijk}$  と  $S_{jik'}$  とは互いに dual .

[表 2] 各代表点における isotropy subgroup の連結成分

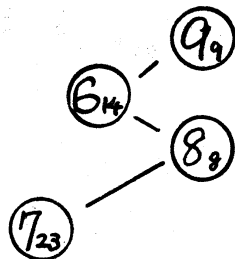
$X_{ij}$ における isotropy subgroup			$X_{ijk'}$ における isotropy subgroup				
$i$	$j$	$k$		$j$	$i$	$k'$	
0.	48	0	$SL(2)^2$	$Spin(10)GL(3)$	48	0	0
1.	27	7	$GL(1)^2 \cdot U(7)$	$(SL(3) \times SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(17)$	27	1	17
3.	35	6	$GL(1)^3 \cdot U(6)$	$(SL(5) \times GL(2) \times GL(1)) \cdot U(12)$	35	3	12
3.	19	5	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(5)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(17)$	19	3	17
5.	23	7	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(7)$	$(SL(3) \times SL(2)^2 \times GL(1)) \cdot U(14)$	23	5	14
5.	15	7	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(7)$	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(15)$	15	5	15
6.	22	2	$(SL(3) \times GL(1)^2) \cdot U(2)$	$(SL(4) \times GL(1)^3) \cdot U(10)$	22	6	10
6.	14	9	$GL(1)^3 \cdot U(9)$	$(SL(3) \times SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(7)$	14	6	7
7.	23	8	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(8)$	$(Sp(2) \times GL(1)^3) \cdot U(14)$	23	7	14
7.	17	10	$GL(1)^3 \cdot U(10)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^3) \cdot U(14)$	17	7	14
8.	8	11	$GL(1)^3 \cdot U(11)$	<i>s. d.</i>			
9.	9	9	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(9)$	<i>s. d.</i>			
10.	10	10	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(10)$	<i>s. d.</i>			
11.	15	9	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(9)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(13)$	15	11	13
11.	11	12	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(12)$	<i>s. d.</i>			
13.	13	14	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(14)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(11)$	13	13	11
14.	30	2	$(G_2 \times SL(2) \times GL(1)) \cdot U(2)$	$(Spin(7) \times SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(10)$	30	14	10
16.	16	8	$(Sp(2) \times SL(2) \times GL(1)) \cdot U(8)$	<i>s. d.</i>			
18.	18	13	$(SL(3) \times GL(1)^3) \cdot U(13)$	<i>s. d.</i>			

2. Holonomy diagram と  $b$ -関数

Proposition 2  $(G, \rho, V)$  の holonomy diagram は 図 1 の通りである。

注⑤  $(0_{48}) - (1_{27}) - (3_{19})$  の交わりはすべて  $G_0$  prehomogeneous である。但し  $G_0 = \text{Spin}(10) \times \text{SL}(3)$

また  $(6_{14}) - (9_9) - (8_8)$  の交わりもすべて  $G_0$  prehomogeneous



である。よってこれらの dual な variety の間の交わりも  $G_0$  prehomogeneous である。 $\Lambda_{0,48} \subset W$  は自明だから  $\Lambda_{8,8} \subset W$  を証明すればこれらと交わる上記の各 variety が  $W$  に含まれることが証明できる ([2] 参照)

 $\Lambda_{8,8} \subset W$  の証明

$$x_{8,8} = 256 + \hat{56} + 237 - 157 + e_8$$

$V_{x_{8,8}}^*$  の代表点として

$$y_{8,8} = \frac{3}{2}(456 + 347) + \frac{1}{2}(\hat{37} + 248) - 2 \cdot \hat{48} \text{ をとる.}$$

これらに対し

$$x = x_{8,8} + 456 + 347 + \hat{37} + 248 - \hat{48}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 256 + 2 \cdot \hat{56} + \frac{1}{2} \cdot 237 - \frac{3}{2} \cdot 157 + \frac{3}{2} \cdot e_8 + y_{8,8}$$

をとると

$$y = \text{grad } \log f(x) \text{ すなわち}$$

$$\langle d\rho(A)x, y \rangle = \delta \chi(A) \quad (A \text{ は } G \text{ の Lie 環の元})$$

$$g = \begin{pmatrix} t^{-2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & t^2 & & \\ & & & t^4 & \\ & & & & t^4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \in G_{x_{8,8}} \text{ をとる}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\rho(g)x, t^4 \rho^*(g)y) = (x_{8,8}, y_{8,8})$$

但し  $\rho^*$  は  $\rho$  の反像表現.

$$\therefore \Lambda_{8,8} \subset W$$

(証明終)

以上によい.

Proposition 3.  $(G, \rho, V)$  の  $b$ -関数  $b(s)$  は

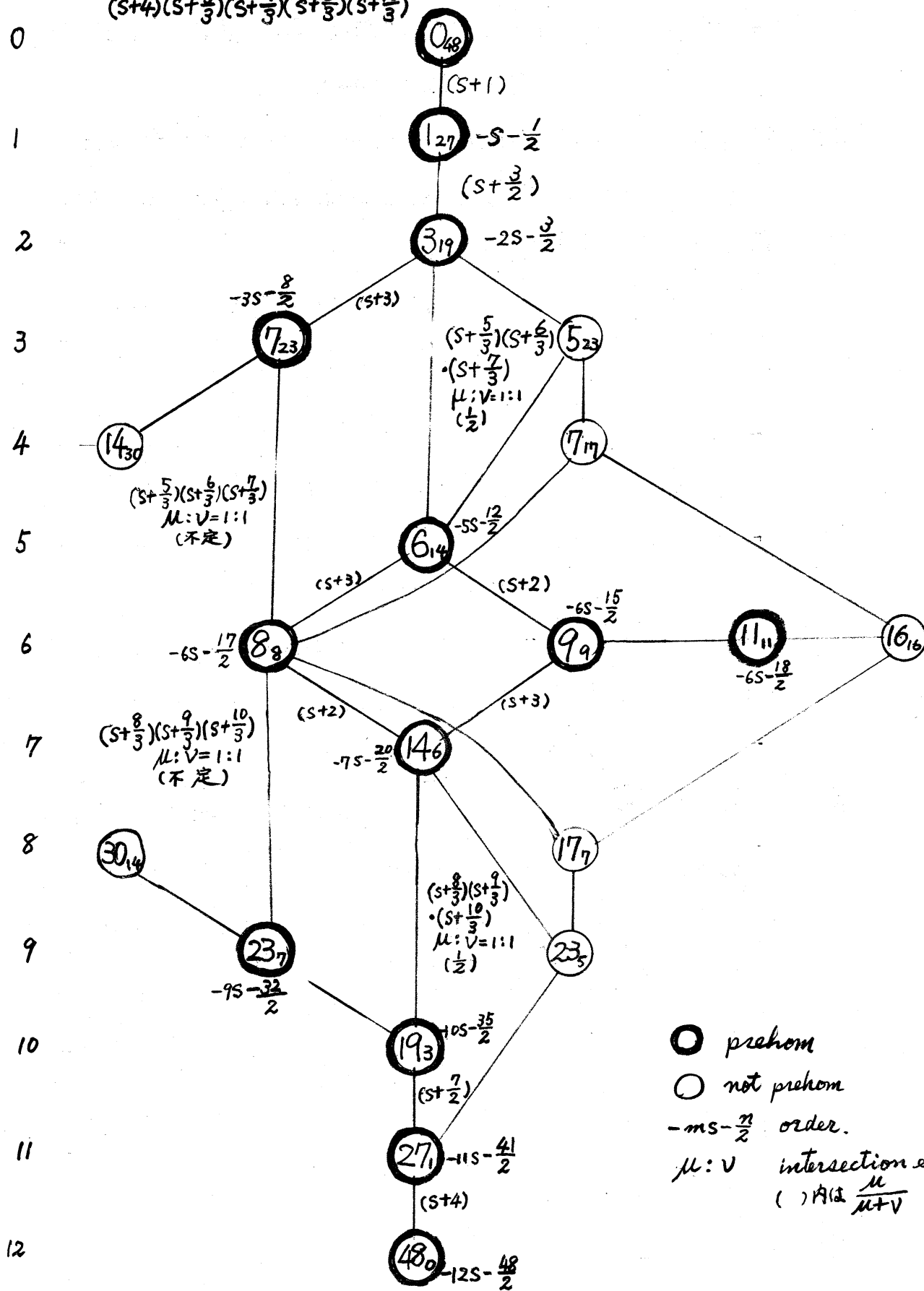
$$b(s) = (s+1) \left(s + \frac{3}{2}\right) (s+2) \left(s + \frac{5}{3}\right) \left(s + \frac{6}{3}\right) \left(s + \frac{7}{3}\right) \\ (s + \frac{8}{3}) \left(s + \frac{9}{3}\right) \left(s + \frac{10}{3}\right) (s+3) \left(s + \frac{7}{2}\right) (s+4)$$

である。証明は  $b$ -関数に関する micro-local calculus による。

# Holonomy diagram $(Spin(10) \times GL(3), \Lambda \otimes \Lambda, V_6 \otimes V_3)$

$$b(s) = (s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)^2(s+3)^2(s+\frac{7}{2})$$

$$(s+4)(s+\frac{5}{3})(s+\frac{7}{3})(s+\frac{8}{3})(s+\frac{10}{3})$$



$\bullet$  prehom  
 $\circ$  not prehom  
 $-ms-\frac{n}{2}$  order.  
 $\mu: \nu$  intersection exponent  
 $( )$  is  $\frac{\mu}{\mu+\nu}$



## 参考文献

- [1] 川原洋人: 「Spin(10)に關連した概均質空間について」  
東京大学修士論文(1974)
- [2] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima :  
Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces  
( to appear in Inv. Math )
- [3] M. Sato and T. Kimura : A classification of  
irreducible prehomogeneous vector spaces and their  
relative invariants. Nagoya Math J. 65, 1-155 (1977)
- [4] T. Kimura : The holonomy diagrams and the b-functions  
of irreducible regular prehomogeneous vector spaces  
( to appear in Nagoya Math. J )
- [5] I. Ozeki : On the micro-local structure of the  
regular prehomogeneous vector space associated with  
 $SL(5) \times GL(4)$ . I. Proc. Japan Acad. 55 A, 37-40 (1979)
- [6] I. Ozeki : On the micro-local structure of the  
regular prehomogeneous vector space associated with  
 $GL(8)$ . Proc. Japan Acad. 56 A, 18-21 (1980)