

### 3次元多様体のグラフ表現

筑波大学 数学 高橋元男

$G$  を, 4 次の球面連結グラフとする。

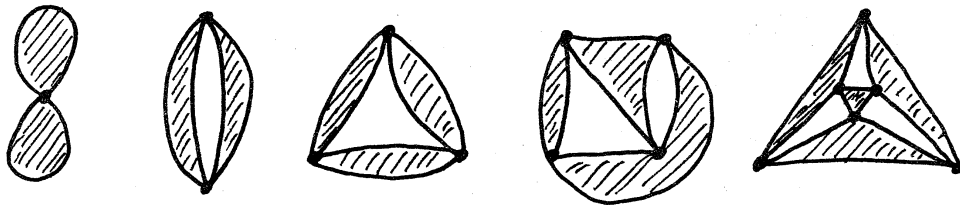


図 1.  $G$  の例.

Euler の標数の関係から,  $G$  の頂点の数を  $n$  とすれば, 辺の数は  $2n$ , 面の数は  $n+2$  である。

$3$ -disk  $D^3$  の表面に  $G$  を書き, 面を  $2$  色 (例えば, 赤と青) で色分けする. この様なもののコピーを  $4$  つ (I, II, III, IV とする) 用意する. 次に, 赤でぬった面は I と II, III と IV の対応点をそれぞれ, はり合わせる. 青でぬった面は II と III, IV と I の対応点をそれぞれ, はり合わせる. この様にして得られた空間を  $M'(G)$  とする. 更に,

$$M(G) = M'(G) - \{\text{頂点}\}$$

$$\tilde{M}(G) = M'(G) - \{\text{頂点の十分小さい正則近傍}\}$$

とする。  $\tilde{M}(G)$  は境界が有限個のトーラスからなるコンパクト (可付号連結) 3-多様体であり,  $M(G)$  はその内部と同相である。  $G$  の頂点と  $\tilde{M}(G)$  の境界成分は 1-1 に対応する。  $G$  の頂点全体の集合を  $\mathcal{V}$  とし,  $v \in \mathcal{V}$  に対応する  $\tilde{M}(G)$  の境界成分を  $T_v$  とする。

もちろん,  $\pi_1(M(G)) \cong \pi_1(\tilde{M}(G))$  であるが, この群の表示をグラフ  $G$  から読み取ることを考える。 各頂点  $v \in \mathcal{V}$  に対し, 2つの生成元  $a_v, b_v$  を対応させ, グラフの頂点  $v$  のそばに, 次の様を書く:

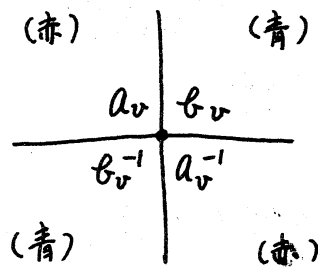
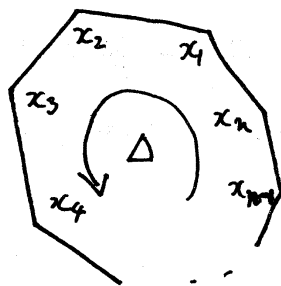


図 2.

球面グラフ  $G$  の面全体の集合を  $\mathcal{F}$  とし, 各  $\Delta \in \mathcal{F}$  に対し, 次の様な関係式  $r_\Delta = 1$  を対応させる:



$$r_\Delta \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_n$$

図 3.

$\Delta$  の頂点のそばに書かれた生成元を1つの頂点から反時計まわりに次々と読んで行き、一周した時得られる語を  $r_\Delta$  とする。

赤の面全体を  $\mathcal{F}_1$ 、青の面全体を  $\mathcal{F}_2$  とする。 ( $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ )

定理1.

$$\pi_1(M(G)) \cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{[a_v, b_v] = 1\}_{v \in V}, \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle.$$

但し  $[a, b] = a b a^{-1} b^{-1}$ . この関係式にはむだがあり各関係式  $r_\Delta = 1$  ( $\Delta \in \mathcal{F}_i$ ) は他の  $r_{\Delta'} = 1$  ( $\Delta' \in \mathcal{F}_i$ ) の全体から導びかれる ( $i=1, 2$ ). (従って、この関係式のうち2つは不要である.)

[例1]  $G$  を次のグラフとすれば

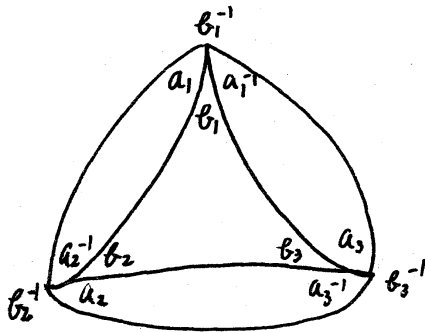


図 4.

$$\pi_1(M(G)) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid$$

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = a_1 a_2^{-1} = a_2 a_3^{-1} = a_3 a_1^{-1} = b_1 b_2 b_3 = b_1^{-1} b_2^{-1} b_3^{-1} = 1 \rangle$$

$$\cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = b_1 b_2 b_3 = 1,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 \rangle$$

$$\cong \langle a, b_1, b_2, b_3 \mid [a, b_1] = [a, b_2] = [a, b_3] = 1, b_1 b_2 b_3 = 1 \rangle$$

$$\cong \langle a, b_1, b_2 \mid [a, b_1] = [a, b_2] = 1 \rangle,$$

となる。  $M(G)$  は次の絡み目の補集合と同相である：

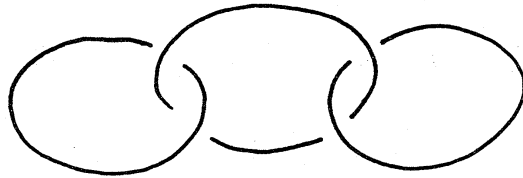
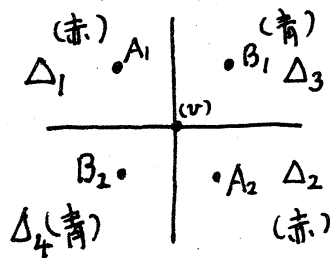


図 5.

定理 1 の証明. 3-disk のコピー  $I, II, III, IV$  から頂点を除いたものを  $I', II', III', IV'$  とする.  $X = I' \cup II'$  とすれば (赤の面だけはり合せてある),  $\pi_1(X)$  は自由群である.

今, 原点  $O$  を  $II'$  の内部に取り, ループ  $a_v (v \in \mathcal{V})$  を次の様に定義する:



$$a_v : 0 \xrightarrow{I'} A_1 \xrightarrow{I'} A_2 \xrightarrow{II'} 0$$

$$b_v : 0 \xrightarrow{II'} B_1 \xrightarrow{III'} B_2 \xrightarrow{IV'} 0$$

図 6.

$a_v$  は  $O$  から出発し,  $II'$  の中で  $v$  を頂点とする赤の面の一つ  $\Delta_1$  の点  $A_1$  に達し, そこから  $I'$  に入り  $v$  を頂点とするもう一つの赤の面  $\Delta_2$  の点  $A_2$  に達し, そこから再び  $II'$  の中に入り  $O$  に戻るループとする.

$$\pi_1(X) \cong \langle \{a_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}_2} \rangle$$

であることは容易に分る。各  $r_\Delta = 1$  は他の  $r_{\Delta'} = 1$  ( $\Delta' \in \mathcal{F}_2$ ) の全体から導びかれる。

次に,  $Y = \text{II}' \cup \text{III}'$  (青の面だけを合せてある) とする。ループ  $c_v$  は,  $O$  から出発し,  $\text{II}'$  の中で  $v$  を頂点とする青の面の一つ  $\Delta_3$  の点  $B_1$  に達し, そこから  $\text{III}'$  の中に入り,  $v$  を頂点とするもう一つの青の面  $\Delta_4$  の点  $B_2$  に達し, そこから再び  $\text{II}'$  の中に入り,  $O$  に戻るものとする。前と同様に,

$$\pi_1(Y) \cong \langle \{b_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}_1} \rangle$$

となる。各  $r_\Delta = 1$  は他の  $r_{\Delta'} = 1$  ( $\Delta' \in \mathcal{F}_1$ ) の全体から導びかれる。ここで  $Z = \text{I}' \cup \text{II}' \cup \text{III}' = X \cup Y$  ( $X \cap Y = \text{II}'$ )

とおき, van Kampen の定理を用いると

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

$$\cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle$$

となる。最後に  $M(G) = Z \cup \text{IV}'$  に対し van Kampen の定理を用いると定理が得られる。 証明終

次に, 棒つき 4 次球面グラフ  $F$  とは, 4 次連結球面グラフ  $G$  であって, 各頂点に対し次の様な "棒" がついているものをいう:

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array} \quad \text{又は} \quad \begin{array}{c|c} \infty & \infty \\ \hline \infty & \infty \end{array}$$

図 7.

ここで、 $m$ と $n$ は互いに素な整数 ( $(m, n) = (0, 1), (1, 0)$  も可) とする。

この  $F$  に対し、 $\tilde{M}(F)$  は  $\tilde{M}(G)$  から次の様にして得られる空間とする。先ず、枠  $\frac{\infty}{\infty} | \frac{\infty}{\infty}$  の頂点はそのままとし枠  $\frac{m}{-n} | \frac{n}{-m}$  の頂点  $v$  に対しては、 $\tilde{M}(G)$  の境界成分  $T_v$  に関し  $a_v^n = b_v^m$  となるように Dehn surgery (即ち solid torus をはりつける) を行う。 ( $a_v, b_v$  は  $\pi_1(T_v)$  の生成元と考えよ。ことに注意) このよりにして得られた  $\tilde{M}(F)$  も境界が有限個 ( $0$  かもしれない) のトラスからなるコンパクト多様体である。  $M(F)$  も  $\tilde{M}(F)$  の内部とする。定理 1 より

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{[a_v, b_v] = 1\}_{v \in V}, \{\tau_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}}, \{a_v^{n_v} = b_v^{m_v}\} \rangle.$$

ここで  $\frac{m_v}{-n_v} | \frac{n_v}{-m_v}$  は  $v$  の枠。

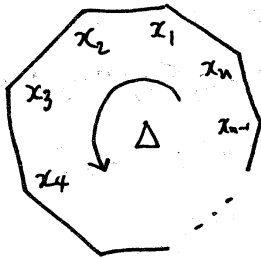
枠がすべて有限の時 ( $\frac{m}{-n} | \frac{n}{-m}$  の形の時),  $\tilde{M}(F) = M(F)$  は 1 多様体となる。この時は、 $\pi_1(M(F))$  の表示でもっと簡単なものが得られる。

各  $v \in V$  に対し, 1つの生成元  $C_v$  を対応させ,  $v$  のそばに次の様を書く.

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} C_v^m & C_v^n \\ \hline C_v^{-n} & C_v^{-m} \end{array}$$

図 8.

各面  $\Delta \in \mathcal{F}$  に対し, 関係式  $r'_\Delta = 1$  を次の様に対応させる.  
対応のさせ方は前と同様(次の図参照).



$$r'_\Delta \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_n$$

図 9.

定理 2.  $\pi_1(M(F)) \cong \langle \{C_v\}_{v \in V} \mid \{r'_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle$ .

ここで各  $r'_\Delta = 1$  ( $\Delta \in \mathcal{F}_i$ ) は他の  $r'_\Delta = 1$  ( $\Delta \in \mathcal{F}_i$ ) の全体から導びかれる ( $i=1, 2$ ). 従って関係式のうち 2つは不要である.

[注意] 頂点の数を  $n$  とすれば, 生成元の数も  $n$ , 関係式から 2つ除いたものも  $n$  個となり, "n generators, n relators" の表示が得られる. この表示は  $M(F)$  の genus  $n$  の Heegaard 分解から得られる表示である.

[13] ]

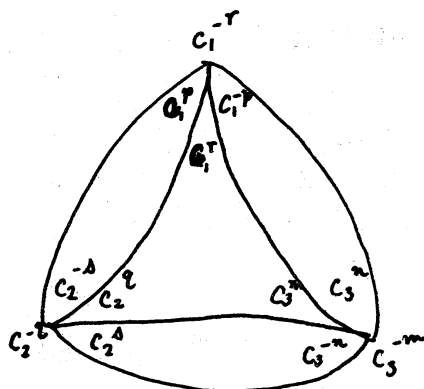
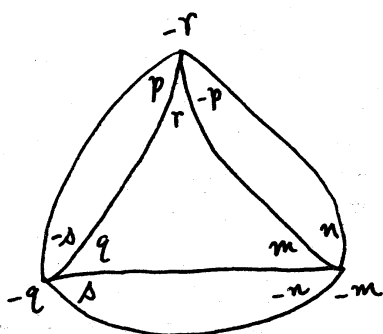


図 10.

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \frac{c_1, c_2}{a_1, a}, c_3 \mid c_1^p c_2^{-l} = c_2^l c_3^{-n} = c_3^n c_1^{-p} = 1, \\ c_1^r c_2^l c_3^m = c_1^{-r} c_3^{-m} c_2^{-l} = 1 \rangle$$

$$\cong \langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1^p = c_2^l = c_3^n, c_1^r c_2^l c_3^m = 1 \rangle \dots (1)$$

$$\cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^p c_2^{-l} = 1, c_1^{pm} (c_1^r c_2^l)^n = 1 \rangle \dots (2)$$

(1) は  $M(F)$  の genus 3 の Heegaard 分解から得られる表示であり, (2) は genus 2 の Heegaard 分解から得られる表示である.

定理 2 の証明.  $\pi_1(M(F)) \cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid$

$$\{[a_v, b_v] = 1\}_{v \in V}, \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{T}}, \{a_v^{n_v} = b_v^{m_v}\}_{v \in V} \rangle$$

において,  $m_v$  と  $n_v$  は互いに素だから適当な整数  $p_v, l_v$  に対し,  $p_v m_v + l_v n_v = 1$  となる. 今,  $c_v = a_v^{p_v} b_v^{l_v}$  とおけば,  $a_v, b_v$  の可換性と,  $a_v^{m_v} = b_v^{n_v}$  を用いて,  $a_v = c_v^{m_v}, b_v = c_v^{n_v}$  が得られる. 従って生成元  $a_v, b_v$  を  $c_v$  で置きかえることが出来, その際,  $[a_v, b_v] = 1$  と  $a_v^{n_v} = b_v^{m_v}$  は trivial な関係



となり,  $r_0 = 1$  が  $r'_0 = 1$  になる. 故に

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \{c_v\}_{v \in V} \mid \{r'_0 = 1\}_{\Delta \in F} \rangle. \quad \text{証明終.}$$

定理3. 3次元連結可付号閉多様体がグラフ表現  $M(F)$  を持つための必要十分条件は, それが,  $S^3$  上の絡み目を分岐線とする2重分岐被覆空間と同相にあることである.

証明.  $F$  を棒つきグラフとし, 棒はすべて有限とする. 各頂点  $v$  の近傍をグラフを次の様に変形する.  $v$  の棒が下図の様であるとする.

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array}$$

図 11

ここで  $m \geq 0, n \geq 0$  と仮定してよい.

[変形の仕方]

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

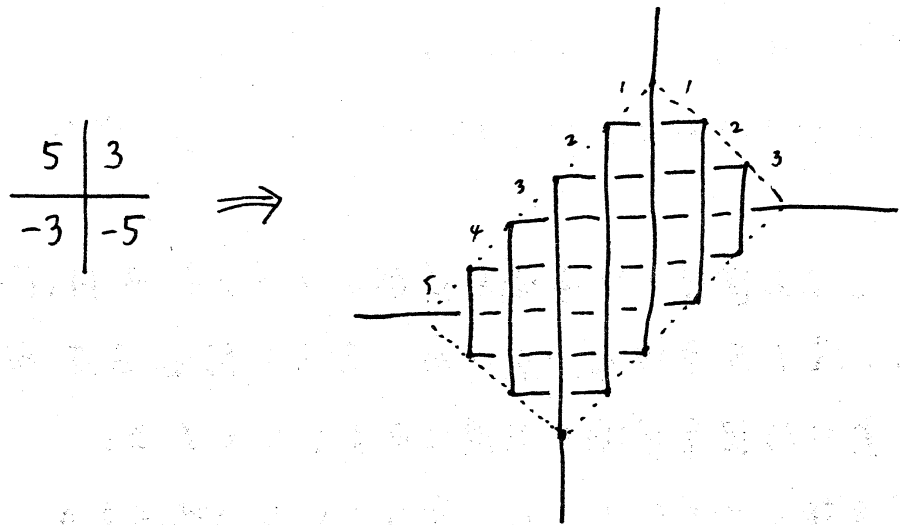


図 12.

一般の  $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & -m \end{pmatrix}$  の場合も上図よりわかるであろう。

各頂点を、その枠に従い、このように変形すると1つの絡み目の図が得られる。これを  $L_F$  とする。  $M(F)$  が  $L_F$  の2重分岐<sup>被</sup>空間であることが示される。逆に任意の絡み目の図（但し連続とする）が与えられたとすると、交差点を重ねてしまえば4次球面グラフ  $G$  が出る。これに、次の様に枠をつけ左ものを  $F$  とする。

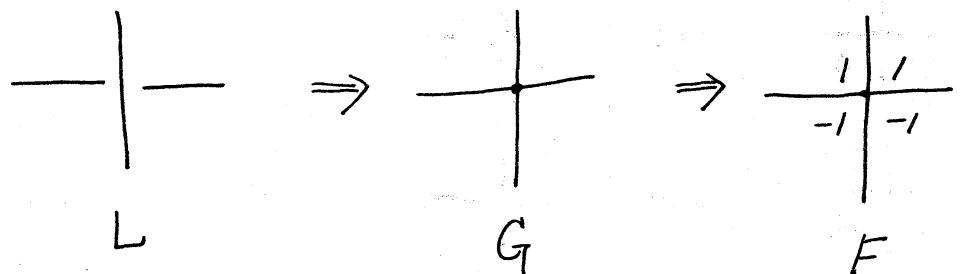


図 13.

そうすると  $L = L_F$  となる。故に  $L$  の 2 重分岐被覆空間は  $M(F)$  となる。 証明終。

4 次球面グラフ  $G$  において、頂点を通らず  $G$  の辺と  $n$  回交  
又するような球面上の loop を  $n$ -loop と呼ぶことにする。  
次の様な loop は trivial な 2-loop, 4-loop と呼ぶ。

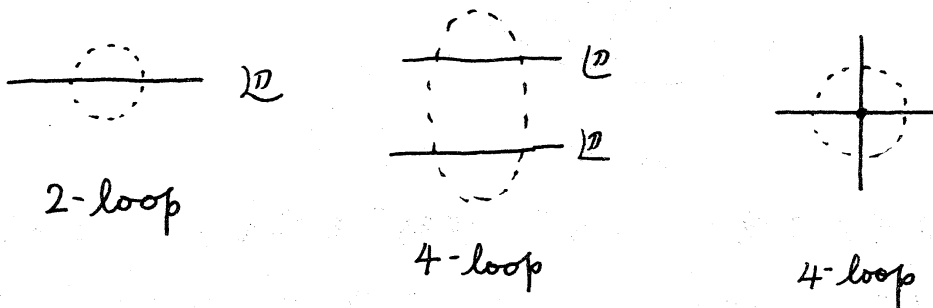


図 14.

Andreev の定理又は Thurston の定理を用いて次が証明  
出来る。

定理 4.  $M(G)$  が有限体積完備な双曲的構造を持つための  
必要十分条件は、 $G$  が 6 個以上の頂点を持ち、non-trivial  
な 2-loop, 4-loop を持たないことである。

例えば、最初のページにあげた最後のグラフ  $G$  はこの条件  
をみえすから  $M(G)$  は双曲的構造を持つ。具体的にはこれを  
非ユークリッド幾何学の射影モデルに内接した正八面体を 4

つはり合せて得られる。この八面体の非ユークリッド的ニ面角をすべて  $90^\circ$  である。

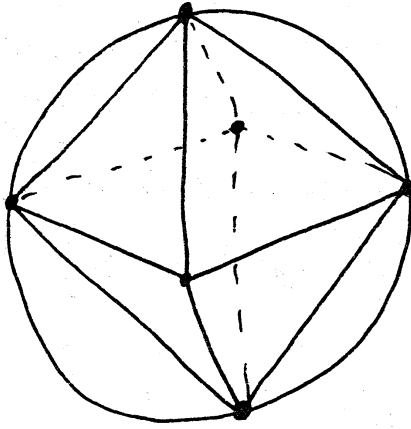


図 15.

グラフ  $G$  が下図のよする "2 角形" を持てば、頂点は 3 個以下があるいは non-trivial な 4-loop を持つので  $M(G)$  は双曲的構造を持つ。

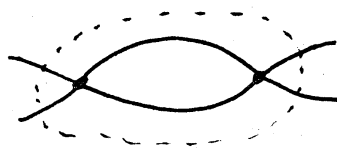


図 16.

しかし、2 角形を持つ場合でも、次の様なグラフは点線のような 4-loop を持つので  $M(G)$  は双曲的構造を持つ。しかしこのような場合は例外的であり大部分の  $G$  に対し  $M(G)$  は双曲的構造を持つ。

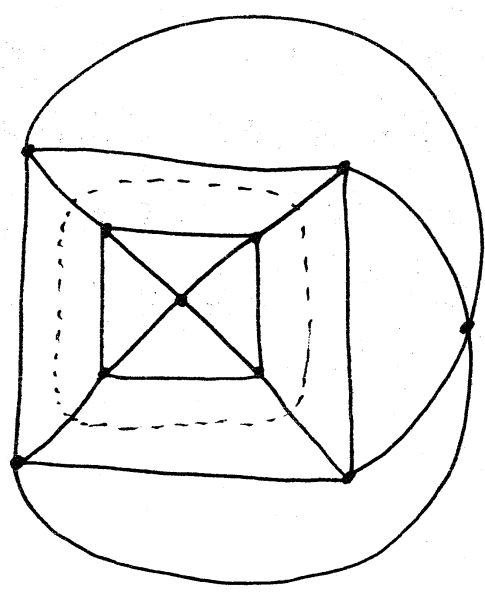


図 17.

$G$  が non-trivial を 2-loop を持つとする:

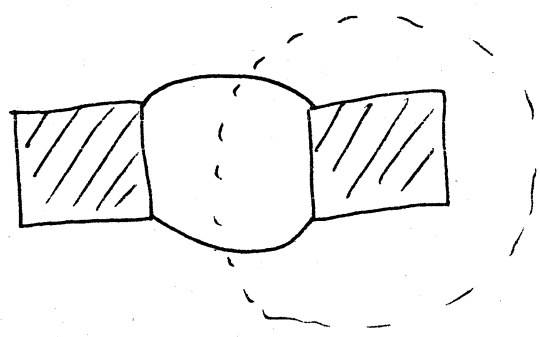
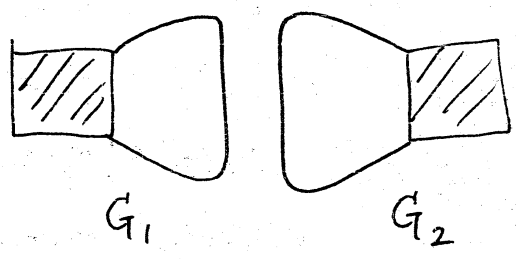


図 18.

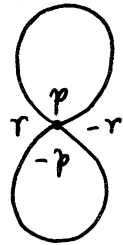
この時  $G$  を 2つのグラフ  $G_1, G_2$  に分ける.



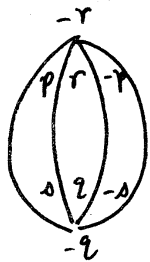
すると  $M(G) = M(G_1) \# M(G_2)$  ( $\#$  は連結和)  
 となる. 構ったグラフ  $F$  の場合も同様に  $F_1$  と  $F_2$  に分ける  
 と  $M(F) = M(F_1) \# M(F_2)$  となる.

同様に, non-trivial な 4-loop からは "トラス分解"  
 が出る.

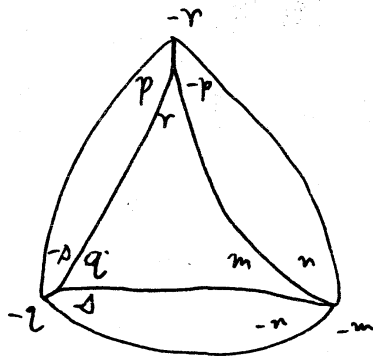
[  $M(F)$  の例 ]



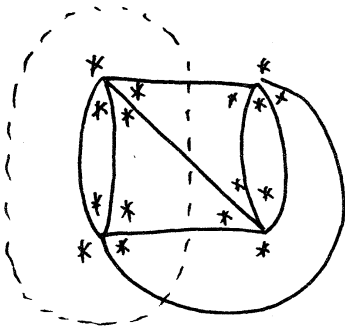
は型  $(p, r)$  の ~~レンス~~ "レンス" 空間を表す.



も "レンス" 空間を表す.



は {  $|p|=1$  或  $|q|=1$  或  $|n|=1$  の時 "レンス" 空間,  
 $|p|=0$  或  $|q|=0$  或  $|n|=0$  の時  
 2つの "レンス" 空間の連結和,  
 $|p| \geq 2$  かつ  $|q| \geq 2$  かつ  $|n| \geq 2$  の時,  
 $S^2$  上の例外ファイバ-3個の  
 Seifert fiber space とする.



は点集のような non-trivial 4-loop  
 を持ちトラス分解できる。  
 (incompressible torus と等価)