数理解析研究所講究録
第 417 巻 1981 年 89-94

On the cobordism of companions of knots

大阪工大　渋谷哲夫

R^3の中の２つの genus 1 の solid tori V^*, V がある。そのとき V^* から V への orientation preserving homeomorphism が faithful とは、V^* の longitude を V のそれにうつす写像をいう。ここでは V^* の core（k_0^* と書く）が trivial knot の場合を考える。そこで $f: V^* \longrightarrow V$ を faithful としたとき V^* の knot k^* に対して V の knot $f(k^*)$ を k で表わす。そのとき、k_0, k^*, k の間には次の関係が知られている。

<u>Theorem A</u>（[2], [4]）　p を k と V の meridian disk M との intersection number としたとき、

(i) $\Delta_k(t) = \Delta_{k_0}(t^p)\Delta_{k^*}(t)$ 　（Alexander polynomial）

(ii) $g(k) \geqq g(k^*) + pg(k_0)$ 　（genus）

<u>Theorem B</u>（[7]）　signature に関しては、

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma(k^*) & \text{if } p \text{ is even} \\ \sigma(k^*) + \sigma(k_0) & \text{if } p \text{ is odd} \end{cases}$$

ここではまず、これらのknotsの4次元genusの関係を調べる。

$R^3[0]$のknot kの4次元genus($h(k)$で表わす)とは、kに$R^3[0,\infty)$でlocally flatなsurfaceをspanしたときのsurfaceのgenusの最小数とする。ここで$R^3[0]=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid t=0\}$, $R^3[0,\infty)=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid t\geqq 0\}$とする。

そのとき次の定理が証明できる。

Theorem 1 ([5]) gを$k\cap M$の最小数としたとき、

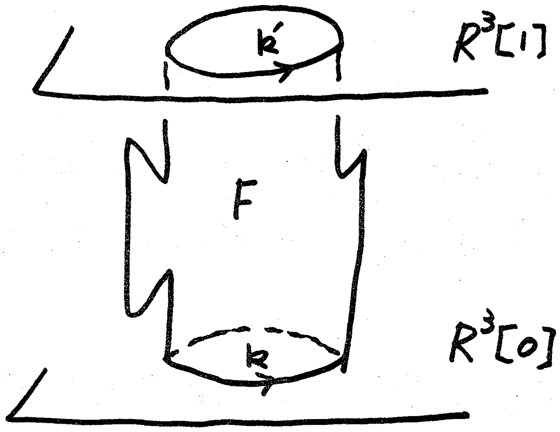
$$h(k) \leqq \begin{cases} h(k^*) & \text{if } k_0 \text{ is a slice knot} \\ h(k^*) + p\,h(k_0) + \frac{g-p}{2} & \text{if } k_0 \text{ is not a slice knot} \end{cases}$$

kがslicl knotであることと$h(k)=0$が同値だから、

Corollary もしk_0とk^*がslice knotならば、kはslice knotになる。

次にこれらの knots の cobordism の関係を調べる。

2つの knots k, k' が cobordant とは ($k \sim k'$ で表わす), $k \subset R^3[0]$, $k' \subset R^3[1]$ に対して $R^3[0,1]$ で locally flat な annulus F で $\partial F = k \cup (-k')$ となるものが存在するときをいう([3]). したがって $k \sim 0$ とは k が slice knot ということである。



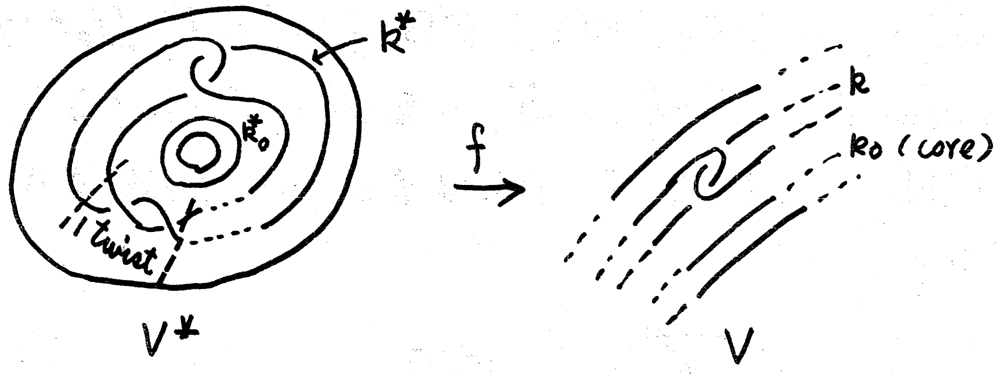
そのとき、次の定理が証明できる。

<u>Theorem 2</u> ([6]) もし $k_0 \sim k_0^*$ ならば, $k \sim k^*$.

<u>Remark</u> Theorem 2 を使うと Theorem 1 で k が slice knot のとき、$h(k) = h(k^*)$ になる。

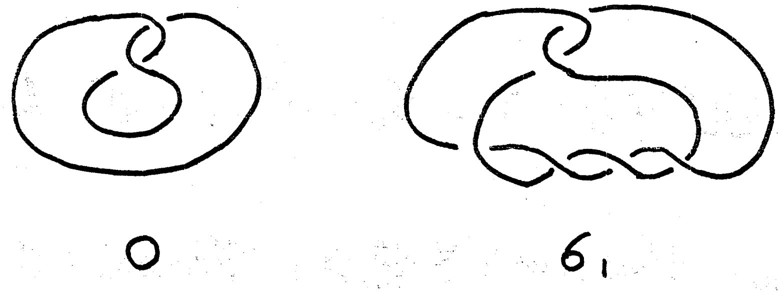
ここで下図の knot $k^* \subset V^*$ を考えて faithful homeomorphism f でうつしたとき $k = f(k^*)$ を k_0 の double とい

い、twist する数が n のとき twisting number n という。そのとき [1] により次のことが知られている。



Theorem C ([1]) trivial knot の double k が slice knot $\Leftrightarrow$ k の twisting number が 0 or 2.

twisting number が 0 のときは trivial knot で 2 のときは 6_1.



したがって Theorem 2 と Theorem C を使うと次の Corollary を得る。

<u>Corollary</u>　k_0 が slice knot のとき、k_0 の double k が slice knot $\Leftrightarrow$ k の twisting number が 0 or 2.

Theorem 2 の逆は成立しない。すなわち k_0 に無関係に次の定理が成立する。

<u>Theorem 3</u>　k^* が V^* の n ケの split した knots $k_1^*, \cdots, k_n^*$ の complete fusion で得られる knot で、各 k_i^* が V^* で Geometrically essential (i.e. 任意の meridian disk M^* of V^* に対して $k_i^* \cap M^* \neq \phi$) でないならば、$k \sim k^*$.

しかし Theorem 3 以外の場合、Theorem 2 の逆が成立するかどうかは知られていない。

References

[1] A.J. Casson and C. MaC. Gordon: On slice knots in dimension three, Proc. of Symposia in Pure Math., 32, Amer. Math. Soc. (1978), 39-

53.

[2] R.H. Fox : A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, (1962), 120-167

[3] R.H. Fox and J.W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. Math., 3 (1966), 257-267

[4] H. Schubert : Knoten und Vollringe, Acta Math., 90 (1953), 131-286

[5] T. Shibuya : On 4-dimensional genera of compound knots, Kobe Math. Sem. Notes 8 (1980), 299-305

[6] T. Shibuya : On the cobordism of compound knots, Kobe Math. Sem. Notes 8 (1980) 331-337

[7] Y. Shinohara : On the signature of knots and links, Ph. D. Dissertation, Florida State Univ. (1969).