数理解析研究所講究録
第417巻 1981年 100-105

Pure Braid Groups と Milnor $\bar{\mu}$-不変量

広大理 大川哲介

Pure braid group と Milnor $\bar{\mu}$-不変量の関係を調べ，その一応用として，P_n の mod. p-剰余巾零性を証明する．

§1. 諸定義及諸事実

$X_n = \{(x_1, \cdots x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \forall i \forall j\, (x_i = x_j \Rightarrow i = j)\}$

と置き，X_n の座標の置換にともなう n 次対称群 S_n の作用による商空間を $Y_n = X_n/S_n$ と書く．すると

事実 1. $\forall i \geqq 2$ に対して $\pi_i(X_n) = \pi_i(Y_n) = 0$.

が成立する．これより，

系. 次の完全列が従う．

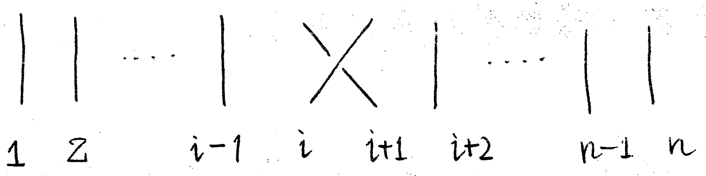
$$1 \longrightarrow \pi_1(X_n) \longrightarrow \pi_1(Y_n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

定義. $\pi_1(Y_n)$，$\pi_1(X_n)$ を各々，n 次 braid group，n 次 pure braid group と呼び，B_n，P_n で表わす．

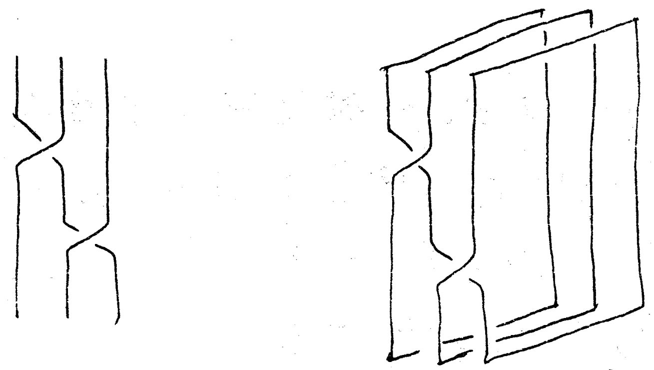
B_n は braid（組紐）の同値類によって定義された群と一致し，以下幾何学的表示も使う．F_n を $x_1, \cdots x_n$ で生成された階数 n の自由群とする．

事実2 (Artin) $\varphi_n : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ を,
$\varphi_n(\sigma_i)(x_i) = x_{i+1}$, $\varphi_n(\sigma_i)(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}$
$\varphi_n(\sigma_i)(x_j) = x_j$ $(j \neq i, i+1)$ で定義すると, 中への同型となる. 但し σ_i は次の図で示される B_n の生成元.

σ_i:



以下 $a^{-1}ba$ を b^a と書く. また $b \in B_n$ に対し, その closed braid $\hat{b}$ (S^3 内の link となる) を次の図で定義する.



b　　　　　　$\hat{b}$

$b \in P_n$ なら, $\hat{b}$ は n-成分の link となる.

群 G が与えられた時, その普通の (又ハ mod. p の) 降中心列を $\Gamma_* G$ 又ハ $\Gamma_*^{(p)} G$ 表わす. $\{\Gamma_n^{(p)} G\}_{n=1}^{\infty}$ は, 列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ で ① $G_1 = G$, ② $[G_m, G_n] \subset G_{m+n}$ ③ $x \in G_n \longrightarrow x^p \in G_{np}$ の三条件を満たす最小の (部分群) 列として特徴づけられる.

定義. $P_{n,g} = \{ b \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \cdots i_k)(\hat{b}) = 0,\ \forall k \leq g,\ \forall i_1 \forall i_2 \cdots \forall i_k \}$, $P_{n,g}{}^{(p)} = \{ b \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \cdots i_k)(\hat{b}) \equiv 0 \pmod p,\ \forall k \leq g,\ \forall i_1 \cdots \forall i_k \}$ 但し $\bar{\mu}$ は Milnor $\bar{\mu}$-不変量.

このとき次の諸結果が成立する.

定理1. (i) $P_{n,g}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群

(ii) $[P_{n,g}, P_{n,r}] \subset P_{n,g+r}$

(iii) $\bigcap_g P_{n,g} = \{1\}$

定理2. (i) $P_{n,g}{}^{(p)}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群

(ii) $[P_{n,g}{}^{(p)}; P_{n,r}{}^{(p)}] \subset P_{n,g+r}{}^{(p)}$

(iii) $b \in P_{n,g}{}^{(p)} \longrightarrow b^p \in P_{n,pg}$

(iv) $\bigcap_g P_{n,g}{}^{(p)} = \{1\}$

系. P_n は剰余巾零であり, さらに任意の素数 p に対し mod p-剰余巾零でもある.

§2. 定理の証明.

定理1も全く同様であるから, 定理2のみを証明する. まず次の事実に注意する.

事実3. $b\in P_n$ に対し, $\varphi_n(b)(x_i) = x_i^{f_i(x_1,\dots x_n)}$ と書いた時(但し f_i に於ける x_i の指数の和は零とする. この様な表示は一意的で, 標準表示と呼ぶ),

$$b\in P_{n,g} \Leftrightarrow f_i(x_1,\cdots x_n)\in \Gamma_g F_n \quad (\forall i)$$

$$b\in P_{n,g}^{(p)} \Leftrightarrow f_i(x_1,\cdots x_n)\in \Gamma_g^{(p)} F_n \quad (\forall i)$$

が成立.

mod. p の Magnus expansion:

$\Phi_n : F_n \to U(\mathbb{Z}_p[[[v_1,\cdots v_n]]])$ ($\mathbb{Z}_p$上非可換巾級数環の単数群) を $\Phi(x_i) = 1+v_i$ で定義するとき, 次が成立.

事実4 (Zassenhaus). $x\in F_n$ に対し $x\in \Gamma_g^{(p)} F_n \Leftrightarrow \Phi(x) = 1+$ (g次以上の項).

i)の証明. 正規性は $\widehat{a^{-1}ba} = \hat{b}$ より明白だから部分群をなすことを云う. $b, c\in P_{n,g}^{(p)}$, $\varphi_n(b)=B$, $\varphi_n(c)=C$ とし, $B(x_i)=x_i^{f_i}$, $C(x_i)=x_i^{g_i}$ を各々標準表示とする. すると $BC(x_i) = B(x_i^{g_i}) = x_i^{f_i C(g_i)}$ となるが, 事実3, 4, 及び $\Gamma_g^{(p)}G$ が G の特性部分群(任意の自己同型で不変)なることより $bc\in P_{n,g}^{(p)}$ が出る. また $B^{-1}(x_i) = x_i^{h_i}$ を標準表示とすると, $x_i = BB^{-1}(x_i) = x_i^{f_i B(h_i)}$ より $h_i = B^{-1}(f_i^{-1})$ となり $b^{-1}\in P_{n,g}^{(p)}$ が出る.

ii)の証明. $b \in P_{n,g}{}^{(p)}$, $c \in P_{n,r}{}^{(p)}$ とし, B, C, f_i, g_i を前と同様とする. $B^{-1}C^{-1}BC(x_i) = x_i{}^{h_i}$ を標準表示とすると. 以下式変形を行い, $BC(x_i) = CB(x_i{}^{h_i})$, $B(x_i{}^{g_i}) = C(x_i{}^{f_i B(h_i)})$,

$x_i{}^{f_i B(g_i)} = x_i{}^{g_i C(f_i) CB(h_i)}$,

$$\therefore \quad f_i B(g_i) = g_i C(f_i) CB(h_i),$$

$$CB(h_i) = C(f_i)^{-1} g_i^{-1} f_i B(g_i)$$

$$= C(f_i)^{-1} f_i (f_i, g_i) g_i^{-1} B(g_i)$$ となる.

ここで $(f_i, g_i) \in \Gamma_{g+r}{}^{(p)} F_n$ だから, $C(f_i)^{-1} f_i \in \Gamma_{g+r}{}^{(p)} F_n$ を示せば良い. $\Phi(f_i) = 1 +$ (g次以上の項) だし, F_n の自己同型 C を Magnus alg. $\mathbb{Z}_p[[[v_1, \cdots, v_n]]]$ の自己同型に持上げて考えれば, 各 v_i に $C(v_i) = v_i +$ ($r+1$次以上の項) を代入する操作だから, $\Phi(f_i)$ と $\Phi(C(f_i))$ は高々 $g+r-1$ 次の項まで一致し, $C(f_i)^{-1} f_i \in \Gamma_{g+r}{}^{(p)} F_n$ が出る.

iii)の証明. $b \in P_{n,g}{}^{(p)}$ に対し B, f_i を前と同じとすると

$$B^j(x_i) = x_i{}^{f_i B(f_i) B^2(f_i) \cdots B^{j-1}(f_i)}$$

が帰納的に云えるから, $B^p(x_i) = x_i{}^{g_i}$ を標準表示とすると, $g_i = f_i B(f_i) \cdots B^{p-1}(f_i)$ となる. だから

$f_i \in \Gamma_g^{(p)} F_n$ のときにこの g_i が $\Gamma_{pg}^{(p)} F_n$ に属することを云えば良い. F_n の自己同型 B を $\mathbb{Z}_p[[[v_1, \cdots, v_n]]]$ の(連続)自己同型に持ち上げたものを, 前と同様に, 同じく B で表わす. その時 $\Phi(B^j(f_i))$

$$= B^j(\Phi(f_i)) = 1 + C_1 + \binom{j}{1}C_2 + \cdots + \binom{j}{j}C_{j+1}$$

(C_k: gk 次以上の項からなる) が帰納的に示される. よって次の補題を示せばよい.

補題. C_i を $\mathbb{Z}_p$ 上の次数環(可換性は仮定しない)の i 次同次元とするとき, $\prod_{i=0}^{p}\left(1+C_1+\binom{i}{1}C_2+\cdots+\binom{i}{i}C_{i+1}\right)$ の k 次同次部分 $(0<k<p)$ は消える.

二項係数の計算によって示されるが詳細は略する.

ii) の証明. n に関する帰納法で証明する. $n=1$ のとき明白. $n-1$ のとき正しいとして n のとき示す. $b \in \Gamma_g P_{n,g}^{(p)}$ とすると 仮定より b の最初の $n-1$ 本の組紐は真直であるから, $\hat{b}$ を考えるとき その第 n 本目の紐は $\pi_1(S^3 - [n-1$-成分の自明 link$])$ の元を表わすと考えられるが, もしそれが真直でなければ事実4により mod. p で消えない項が現われるが, これは矛盾. **Q.E.D.**