数理解析研究所講究録
第 417 巻 1981 年 106-121

2重分岐被覆空間の既約性について

河野正晴（北大、理）

3-manifoldがfake 3-ballをふくまない時 そのmanifoldを(C.P)-manifoldと呼ぶ（又は略して単に(C.P)である）。ここでは(C.P)-manifoldの2-fold branched coveringが又(C.P)-manifoldであることを示す。（証明などの詳しい所は[K]参照。）「すべての3-manifoldは(C.P)である」という命題はPoincaré Conjectureと同値となる。又(C,P)-manifold Mに対して $\pi_2(M)=0$ となる時はMにirreducible (i.e. $\forall S^2 \subset M$ 2-sphereに対し $\exists B^3$: 3-ball ∋ $\partial B^3 = S^2$)である。又Mがirreducibleの時 $\pi_1(M) \neq 1$ ならMは(C.P)-manifoldである。結果は以下のとおりである。

定理 1

M, Nをclosed orientable 3-manifoldとする。

$p : (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ をMからNへのLでbranchする

2-fold branched covering であるとする。この時 N が (C.P) ならば M も (C.P) である。

<u>Corollary</u>

3-sphere の 2-fold branched covering space は (C.P) である。

又上の Corollary を用いて次の結果がわかる

<u>定理2</u>

M を 3-sphere 上の 2-fold branched covering space とする。この時 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ なら $M \cong S^2 \times S^1$，$\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$ なら $M \cong P^3$ である。

§1.

定理1を証明するためにいくつかの Lemma Proposition を示す。

<u>Proposition 1</u>

M を closed orientable 3-manifold，g を M 上の orientation preserving involution とする ($g^2 = id_M$)。この時 embedded 2-sphere $S_1^2, \cdots, S_n^2$ が存在して次の2つの条件を満足

する。

(1) 任意の i $(1 \leq i \leq m)$ について $S_i^2 \cap g(S_i^2) = \phi$ 又は $g(S_i^2) = S_i^2$ が成立する。

(2) $[S_1^2], \cdots, [S_m^2]$ は $\pi_2(M)$ を $\pi_1(M)$-module と見たとき、それを generate する。

$\mathrm{Fix}(g) = \tilde{L}$ とする。M にうめこまれた任意の 2-sphere S^2 を考える。この時

type (a) $\quad S^2 = g(S^2)$

type (b) $\quad S^2 \neq g(S^2)$

のいずれかになる。type (b) の時 transversal technique を用いて、S^2 は $\tilde{L}$ と M で、S^2 と $g(S^2)$ は $M - \tilde{L}$ で transversal としてよい。この時

$X(S^2) = S^2 \cap g(S^2) - \tilde{L}$

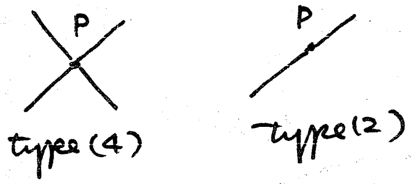
$Y(S^2) = S^2 \cap g(S^2) \cap \tilde{L}$ とおく。さて

$\alpha(S^2)$ を次の様にきめる。

$$\alpha(S^2) = \begin{cases} X(S^2) \text{ の component の数} & S^2 \text{ が type(b) の時} \\ 0 & S^2 \text{ が type(a) の時} \end{cases}$$

又 P を $Y(S^2)$ の点とし、B_p を P の small neighborhood とした時、$B_p \cap X(S^2)$ の component の数が i である時、点 P は type(i)

であるという。この時次が言える。



Lemma 1

S^2をtype (b) の2-sphereとする。isotopyでS^2を少し動かして$Y(S^2)$をすべてtype(2)の点にできる。

（証明は略）

Lemma 2

S^2をembedded 2-sphereで$\alpha(S^2) \neq 0$とする。この時2個の2-sphere S_1^2, S_2^2が存在して次の条件を満す。

(i) $\max(\alpha(S_1^2), \alpha(S_2^2)) < \alpha(S^2)$

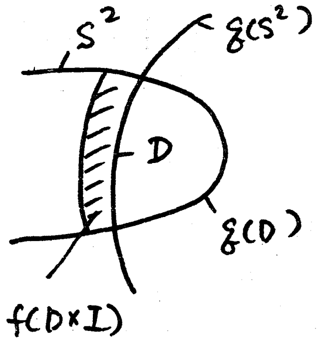
(ii) $[S_1^2]$と$[S_2^2]$から$\pi_1(M)$-moduleとしてgenerateされる$\pi_2(M)$のsub-moduleは$[S^2]$を含む。

(proof) Lemma 1によりYの点はすべてtype (2)としてよい。この時$g(S^2)$上にinnermostな2-disk Dが存在する。i.e. $D \cap S^2 = \partial D$。この時次のいずれかが起こる。

(1) $g(\partial D) = \partial D$

(2) $g(\partial D) \cap \partial D = \phi$

Case (1) この時 map $f : D\times I(=[0,1]) \longrightarrow M$ が存在して



(a) $f(D\times 0)=D$

(b) $f(\partial D\times I)=f(D\times I)\cap S^2$

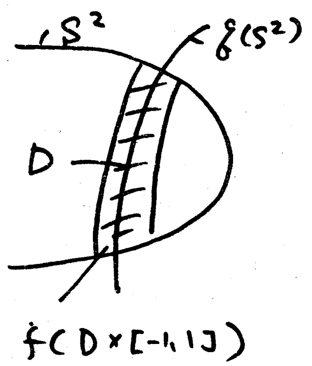
(c) $f(D\times 1)\cap g(D)=\phi$

を満す。この時 $S_1^2=D\underset{\partial}{\cup} g(D)$

$S_2^2=\{S^2-(g(D)\cup f(\partial D\times[0,1]))\}\cup f(D\times 1)$ とおく。

この S_1^2, S_2^2 は Lemma の条件(ii)を満すことは明らか。又 $g(S_1^2)=S_1^2$ より $\alpha(S_1^2)=0$。$S_2^2\cap g(S_2^2)\subset S^2\cap g(S^2)-\partial D$ より $\alpha(S_2^2)<\alpha(S^2)$。よって case (1) は o.k.

Case (2) この時は map $f : D\times[-1,1]\longrightarrow M$ が存在して



(a) $f(D\times 0)=D$

(b) $f(D\times[-1,1])\cap S^2=f(\partial D\times[-1,1])$

(c) $f(D\times[-1,1])\cap g(S^2)=f(D\times 0)$

を満足する。

$S^2-f(D\times(-1,1))$ は2つの component を持つ。それを S_+, S_- とする。ただし S_+ は $f(\partial D\times 1)$ と交わる component とする。その時 $S_1^2=S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)$, $S_2^2=S_-\underset{\partial}{\cup} f(D\times(-1))$ とおくと条件の(ii)はo.k.

$$S_1^2\cap g(S_1^2)=\{S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)\}\cap g\{S_+\underset{\partial}{\cup} f(D\times 1)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{S_+ \cap g(S_+)\} \cup \{f(D\times 1) \cap g(S_+)\} \\
&\quad \cup g\{f(D\times 1) \cap g(S_+)\} \cup \{f(D\times 1) \cap g(D\times 1)\} \\
&= S_+ \cap g(S_+) \subset S^2 \cap g(S^2) - \partial D
\end{aligned}
$$

よって $\alpha(S_1^2) < \alpha(S^2)$。同様に $\alpha(S_2^2) < \alpha(S^2)$ □

さて、Proposition 1 を証明する。sphere-theorem により M にうめこまれた 2-sphere $S_1^2, \cdots, S_m^2$ が存在して $[S_1^2], \cdots, [S_m^2]$ は $\pi_1(M)$-module として $\pi_2(M)$ を generate する。$\alpha(S_i^2) \neq 0$ の時は Lemma 2 を使うことにより、m の数はふえるが $\alpha(S_i^2) = 0$ と仮定できる。この時 $g(S_i^2) = S_i^2$ (type (a)) 又は $g(S_i^2) \cap S_i^2 = \phi$ (type (b)) とできるので o.k. □

以下 §1 では M, N は closed orientable 3-manifold とし、$p: (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ を N の L で branch する 2-fold branched covering とする。g を p の non-trivial な covering transformation とする。又 $B_0^3 = \{(re^{i\theta}, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid r^2 + t^2 \leq 1\}$ を 3-ball とし、$p_0 : B_0^3 \longrightarrow B_0^3$ を $p_0(re^{i\theta}, t) = (re^{i2\theta}, t)$ とし、$\tilde{L}_0 = L_0 = \{(0, t)\} \cap B_0^3$ とする。この時 $p_0 (B_0^3, \tilde{L}_0) \longrightarrow (B_0^3, L_0)$ を standard な branched covering と呼ぶ

Lemma 3

M の中に 3-ball を bound しない 2-sphere S^2 で $g(S^2)=S^2$ となるものが存在したとする。この時次の3つのいずれかがおこる。

① $M=M_1\#M_2$ $(M_i\not\cong S^3)$, $N=N_1\#N_2$ で $p_i:(M_i,\tilde{L}_i)\longrightarrow(N_i,L_i)$: N_i の L_i 上で branch する 2-fold branched covering が存在する $(i=1,2)$。

② $M\cong S^2\times S^1$

③ $M=M_1\#(S^2\times S^1)$, $N=N_1\#P^3$ で $p_1:(M_1,\tilde{L}_1)\longrightarrow(N_1,L_1)$: N_1 の L_1 で branch する 2-fold branched covering が存在する。

(proof) $S^2\times[-1,1]$ を S^2 の small invariant neighborhood とする ($S^2\times\{0\}=S^2$)。この時

(1) S^2 が M を separate する

(2) S^2 が M を separate しない

の2つの場合がある。

Case (1) $M-S^2\times(-1,1)=V_1\cup V_2$ とおく。この時更に2つの場合 (1-i) $S^2\cap\tilde{L}=\phi$ (1-ii) $S^2\cap\tilde{L}\neq\phi$ とにわけられる。

(1-i): $p(S^2\times[-1,1])$ は projective plane 上の twisted I (interval) - bundle となる。よって $N-p(S^2\times(-1,1))$ は

connected で、$g(V_1) = V_2$ となる。ところが $\tilde{L} = \tilde{L} \cap M = (\tilde{L} \cap V_1 \cap V_2) \uplus (\tilde{L} \cap S^2 \times [-1,1]) = \phi$ となり矛盾。

(1-ii)：この時 $g(V_i) = V_i$ ($i = 1, 2$)。この時各 i ($i=1,2$) に対し次の同相写像 $f_i : \partial B_0^3 \longrightarrow \partial V_i$, $g_i : \partial B_0^3 \longrightarrow p(\partial V_i)$ が存在して、下の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\partial V_i \arrow[d, "p"'] & \partial B_0^3 \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "p_0"] \\
p(\partial V_i) & \partial B_0^3 \arrow[l, "g_i"]
\end{tikzcd}$$

この時 $M_i = V_i \underset{f_i}{\cup} B_0^3$, $N_i = p(V_i) \underset{g_i}{\cup} B_0^3$ とし、

$$p_i(x) = \begin{cases} p(x) & x \in V_i \\ p_0(x) & x \in B_0^3 \end{cases}$$ とおく。

この時 p_i は 2-fold branched covering となり、$M = M_1 \# M_2$, $N = N_1 \# N_2$ となる。又 S^2 が 3-ball を bound しないことにより M_1 も M_2 も 3-sphere にはならない。よって①が起こる。

Case (2)　$V = M - S^2 \times (-1,1)$, $W = N - p(S^2 \times (-1,1))$ とおく。更に2つの場合にわける。(2-i) $S^2 \cap \tilde{L} = \phi$, (2-ii) $S^2 \cap \tilde{L} \neq \phi$。

(2-i)：$p(S^2 \times [-1,1])$ は projective plane 上の twisted I-bundle。$\partial V = S_1^2 \cup S_2^2$ とおく。

この時次の diagram を可換にする同相写像 f_1, f_2, g が存在する。

$$\begin{tikzcd}
S_1^2 \arrow[d, "p"'] & S_2^2 \arrow[d, "p"] & \partial B_0^3 \arrow[ll, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "id"] & \partial B_0^3 \arrow[ll, bend right, "f_2"'] \arrow[dl, "id"] \\
p(S_1^2) = & p(S_2^2) & \partial B_0^3 \arrow[l, "g"] &
\end{tikzcd}$$

この時 $M_1 = V \underset{f_1}{\cup} B_0^3 \underset{f_2}{\cup} B_0^3$, $N = W \underset{g}{\cup} B_0^3$

$$p_1(x) = \begin{cases} p(x) & x \in V \\ x & x \in B_0^3 \end{cases}$$

とおくと、

$M = M_1 \# (S^2 \times S^1)$, $N = N_1 \# P^3$ となる。(⇒ ③)

(2-ii) : $\partial V = S_1^2 \cup S_2^2$ とおくと、各 i ($i=1,2$) に対し同相写像 f_i, g_i が存在し、下の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
S_i^2 \arrow[d, "p"'] & \partial B_0^3 \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "p_0"] \\
p(S_i^2) & \partial B_0^3 \arrow[l, "g_i"]
\end{tikzcd}$$

$M_1 = V \underset{f_1}{\cup} B_0^3 \underset{f_2}{\cup} B_0^3$, $N_1 = W \underset{g_1}{\cup} B_0^3 \underset{g_2}{\cup} B_0^3$

$$p_1(x) = \begin{cases} p(x) & x \in V \\ p_0(x) & x \in B_0^3 \end{cases}$$

とおくと、

p_1は2-fold branched coveringで$M=M_1\#(S^2\times S^1)$, $N=N_1\#(S^2\times S^1)$。M_1が3-sphereでない時は$M_2=S^2\times S^1$, $N_2=S^2\times S^1$とおくとM_2からN_2へbranched coveringが存在する。よって①。M_1が3-sphereの時は②。

Lemma 4

$\pi:(S^2\times I, L')\longrightarrow(\beta, L)$ 2-fold branched covering

とすると次のいずれか？

(1) βは3-ballでLはtrivial knot

(2) $\beta=S^2\times I$で任意の$t\in I$に対し$S^2\times\{t\}\cap L$は2-points。

(証明は略)

Lemma 5

S^2をM内の2-sphereで$S^2\not\simeq 0$かつ$S^2\cap g(S^2)=\phi$とすると、次の3つのいずれかが起こる。

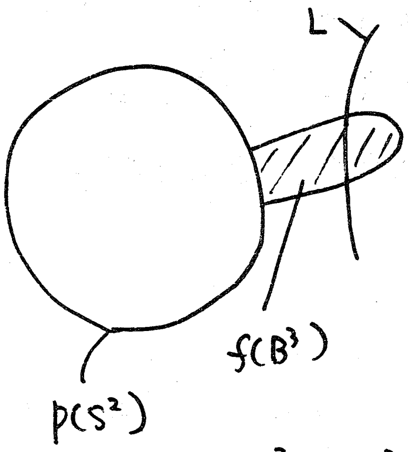
① $g(S')=S'$で3-ballをboundしない2-sphere S'がM内に存在する。

② Lはtrivial knot つまり$M=N\#N$

③ $M=M'\#(S^2\times S^1)$で

$p':(M',L')\longrightarrow(N,L')$となる2-fold branched coveringが存在する。

(証明) $f:B^3\longrightarrow N$で次の条件を満す同相写像が存在する。

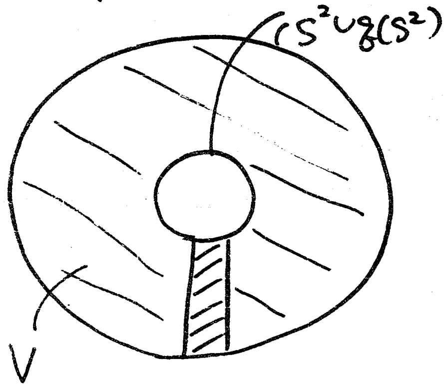


(1) $(f(B^3), f(B^3) \cap L)$ は trivial ball pair

(2) ∂B^3 上の 2-disk D が存在して $f(B^3) \cap p(S^2) = f(D)$

この時 $S = (p(S^2) - f(\mathring{D})) \cup f(\partial B^3 - \mathring{D})$

$S' = p^{-1}(S')$ とする。 S' が 3-ball を bound しなければ ①。よって S' は 3-ball V を bound すると仮定する。 $V \cap p^{-1}(f(\partial B^3))$ は2個の 2-disk 又は $S^1 \times I$。2個の 2-disk の時は $V - \mathrm{Int}(p^{-1}(f(B^3)))$ は2個の3-ball となり $S^2 \not\simeq 0$ に矛盾。よって $V \cap p^{-1}(f(\partial B^3))$ は $S^1 \times I$、故に $V \cup p^{-1}(f(B^3)) = S^2 \times [0,1]$ としてよい。ここで $S^2 \times \{0\} = S^2$, $S^2 \times \{1\} = g(S^2)$ としてよい。



$p|_{S^2 \times I} : S^2 \times I \longrightarrow p(S^2 \times I)$ は 2-fold branched covering。Lemma 4 より $p(S^2 \times I)$ は 3-ball で $p(S^2 \times I) \cap L$ は trivial knot。 $W = N - p(S^2 \times (0,1))$ とおくと、(a) $p^{-1}(W)$ は 2-component (b) $p^{-1}(W)$ は connected の 2つの場合にわかれる。 (a) の時は $L \cap W = \phi$ なので $L = L \cap p(S^2 \times I)$、よって L は trivial (⇒②) (b) の時は $W' = p^{-1}(W)$, $\partial W' = S^2_1 \cup S^2_2$ と

おく。この時同相写像 f_1, f_2, g が存在して下の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd} S_1^2 \arrow[dr, "p"'] & S_2^2 \arrow[d, "p"] & & \partial B_0^3 \arrow[lll, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "id"] & \partial B_0^3 \arrow[lll, bend right, "f_2"'] \arrow[dl, "id"] \\ & \partial W & & \partial B_0^3 \arrow[ll, "g"] & \end{tikzcd}$$

$$M' = W' \underset{f_1}{\cup} B_0^3 \underset{f_2}{\cup} B_0^3, \quad N' = W \underset{g}{\cup} B^3{}_0$$

$$p'(x) = \begin{cases} p(x) & x \in W' \\ x & x \in B_0^3 \end{cases}$$

とおくと

$M = M' \# (S^2 \times S^1)$　$N = N'$ となり p' は 2-fold branched covering となる（⟹ ③）。　□

Lemma 6

$M = M_1 \# M_2$ の時

M：$C(p)$-manifold ⟺ M_1 と M_2 は $C(p)$-manifold

(well-known)

これ以降我々は Thurston などによって示されたとされる次の定理を仮定する

Theorem (homotopy Smith Conjecture)

K を homotopy 3-sphere Σ の内の non-trivial knot とする。

KでbranchするΣのp-fold cyclic branched covering spaceはsimply connectedではない。

さて証明にはいる前に次のことを定義する。

定義

closed orientable 3-manifold Mはprimeなmanifoldのconnected sumに一意的に分解される。i.e. $M=M_1\#\cdots\#M_m$。この時この個数 m を $PD(M)$ と書く。

最初に特別な場合を示す。

Proposition 2

$\pi_2(M)=0$ の時 Nが(C,P)-manifoldならMも(C,P)-manifold。

(証明のoutline) M内にhomotopy 3-ball $\mathcal{B}$ をとり、それが3-ballであることを示す。$d(\partial\mathcal{B})$ に関するinductionでLemma 2を示した方向で行なう。Lemma 2との違いは、今度は2-sphereだけでなく、それにboundされるhomtopy 3-ballが必要という点。そのために $\pi_2(M)=0$ が必要。

§2.

(Proop of theorem 1)

PD(M)についてのinductionで示す。 PD(M)=1の時。 Mはprimeなので $M\cong S^2\times S^1$ 又はirreducible。 $M\cong S^2\times S^1$ なら(C.P)は明らか。 irreducibleの時は $\pi_1(M)=1$ の時は $\pi_1(N)=1$ となるので $N\cong S^3$。 よってTheorem(HSC)より $M\cong S^3$。 $\pi_1(M)\neq 1$ の時はirreducibleから(C.P)がしたがう。 $n=PD(M)$ 未満のmanifoldについては定理は正しいと仮定する。 $\pi_2(M)=0$ の時はProposition 2 を示しているので $\pi_2(M)\neq 0$ とする。 この時 Proposition 1 より $[S^2]\neq 0\in\pi_2(M)$ となる S^2 が存在して $g(S^2)=S^2$ 又は $g(S^2)\cap S^2=\phi$ となる。 $g(S^2)=S^2$ の時 Lemma 3が適用できる。 ①の時 Lemma 6 より N_1, N_2 は(C.P)。

$p_i:(M_i,\widehat{L}_i)\longrightarrow(N_i,L_i)$ $(i=1,2)$ は $PD(M_i)<PD(M)$ なので Theorem が使えて M_1, M_2 は(C.P)、よってMも(C.P)。 ②の時は明らか。③の時も $PD(M_1)=PD(M)-1$ なので①の時と同様にできる。 $g(S^2)\cap S^2=\phi$ の時は Lemma 5 を適用すれば同様にできる。 □

Lemma 7

$p: \widetilde{M} \longrightarrow M$ 2-fold unbranched covering

M: (C.P)-manifold $\Longrightarrow$ $\widetilde{M}$ も (C.P)-manifold

(proof) Hempel [H] の Lemma 10.4 (p96) と同様に示すことができる。

Theorem 2

$p: (M, \widetilde{L}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

(i) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} \Longrightarrow M \cong S^2 \times S^1$

(ii) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2 \Longrightarrow M \cong P^3$

(proof)

(i) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$; [J] により $M \cong S^2 \times S^1 \# \Sigma$ (ここで Σ は homotopy 3-sphere)。Theorem 1 より M は (C.P)。よって Lemma 6 より Σ は (C.P)、つまり $\Sigma \cong S^3$。

(ii) $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$; Theorem 1 より M は (C.P)。$\widetilde{M}$ を M の universal covering space とすると 2-fold covering。よって Lemma 7 より $\widetilde{M}$ は (C.P) で $\widetilde{M} \cong S^3$。M は S^3 を $\mathbb{Z}_2$-action でわったものになるが、[L] より $M \cong P^3$。

References.

[H] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies #86, Princeton Univ. Press.

[J] W. Jaco, Three manifolds with fundamental group a free product, Bull. Amer. Math. Soc 75 (1969) 972-977

[K] M. Kouno, The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, preprint

[L] G.R. Livesay, Fixed point free involutions on the 3-sphere, Ann. of Math. 72 (1960) 603-611