数理解析研究所講究録
第 418 巻 1981 年 41-47

定常時系列における推定の高次の漸近有効性

竹内 啓

定常時系列データ $X_1, X_2 \cdots X_T$ が与えられたとき、その分布にふくまれる母数の推定については、Tが大きくなるときの推定量の漸近正規性、および漸近有効性が論ぜられることが多い。

しかし漸近的に有効になるような、いわゆるBAN推定量は一義的でなく、いくつか考えられる。いま $X_1, X_2 \cdots X_T$ がガウス過程に従い、かつ自己回帰過程であるとすると、自己回帰係数の推定量として、最小2乗推定量、Yule-Walker推定量、最尤推定量等が考えられ、これらはいずれもBAN推定量であることが証明される。

次に $\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の漸近分布を $T^{-\frac{1}{2}}$ のorderまで展開したときの分布の限界を計算すると、BAN推定量をそれぞれ2次の漸近中央値不偏性（ないし漸近不偏性）を持つように補正したものは、すべてこの限界を達成すること、すなわち2次の漸近有効性を持つことがわかる（Akahira 1975）.

そこで異なるBAN推定量の間で優劣を考えるには、3次の漸近効率を考えねばならない。そのためには推定量のクラスを限定して、何らかの意味で正則regularと考えられるも

のの中で考えねばならない。しかしその自然なクラスを定義する上で困難がある。

一つはARMA過程などの場合には，十分統計量が存在しないから，指数型分布からの独立標本の場合のように，十分統計量の正則な関数のクラスとして，正則推定量を定義することはできないことである。しかしこのときより抽象的な形で議論を進めようとすると，推定量の分布の形式的な漸近展開について，その正当性を証明するのに困難が生ずる。

もっと簡単な自己回帰ガウス過程の場合でも，十分統計量は存在し，かつその次元は一定であるが，その漸近分布は退化してしまうので，十分統計量の正則関数として表される推定量を扱うとしても，その漸近分布を論ずるのに困難がある。（例えば平均は既知として1階の自己回帰過程を考えると，十分統計量は $\sum_{t=1}^{T-1} X_t^2$ $\sum_{t=2}^{T} X_t^2$ $\sum_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}$ の3つで与えられるが，漸近的に最初の2つは相関1になる。）

ここでは，定常ガウス過程における推定の高次の漸近有効性を扱うための理論的接近の方法を提案したい。その場合，問題の対象を時系列と考えずに，むしろ分散共分散行列が未知の母数をふくんで表現されるような，多次元正規変量の系列として扱う。そうしてそのような形のモデルに対する推定の漸近理論を考える。

$Y_1, Y_2, ---- Y_n$ を多変量正規分布に従う確率変数の系とする。その平均ベクトルはゼロ, 分散共分散行列を $\Sigma_n(\theta)$, θ は実母数とする。

このとき密度関数は

$$f(\underset{\sim}{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_n|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} \underset{\sim}{y}' \Sigma_n^{-1} \underset{\sim}{y}$$

となるから 尤度関数を L とすると

$$\log L = \text{const} - \frac{1}{2} \log|\Sigma_n| - \frac{1}{2} \underset{\sim}{y}' \Sigma_n^{-1} \underset{\sim}{y}$$

となり,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \frac{1}{2} \underset{\sim}{y}' \Sigma_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \underset{\sim}{y} - \frac{1}{2} \text{trace } \Sigma_n^{-1} \dot{\Sigma}_n$$

ただし $\dot{\Sigma}_n = \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma_n$

となる。それゆえ行列方程式

$$|\dot{\Sigma}_n - \lambda \Sigma_n| = 0$$

の根を $\lambda_1 --- \lambda_n$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \frac{1}{2} \Sigma \lambda_i (Z_i^2 - 1)$$

と表すことができる。ただし $Z_1 ... Z_n$ は互いに独立に標準正規分布に従う。

それゆえ $\dfrac{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2}{\Sigma \lambda_i^2} \longrightarrow 0$

ならば

$$\sqrt{\frac{2}{\sum \lambda_i^2}}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\log L = \frac{1}{\sqrt{2\sum \lambda_i^2}}\ \sum \lambda_i (z_i^2-1)$$

は漸近的に平均 0，分散 1 の正規分布に従う。

更により強く

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = O(n) \qquad k=1,\ 2 \cdots$$

とすると，$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log L$ の分布の Edgeworth 展開が可能になる。

そうすると，ふつうの意味で漸近的に有効な推定量 $\hat{\theta}_n$ は，$\sqrt{B_n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ が漸近的に正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うようなものである。ただし

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2/2$$

である。

次に

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L = -\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y}$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{trace}\{\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n-(\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n)^2\}$$

となるから，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L + B_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} + 2B_n\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} - \operatorname{trace}\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n\right)$$

において，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = O(n)$ のとき，オ1項は漸近正規分布に従い，その分散は $\sum \lambda_i^4/n$ となることがわかる。またオ2項については，方程式

$$|\ddot{\Sigma}_n - \mu \Sigma_n| = 0$$

の根 $\mu_1 \cdots \mu_n$ について $\max \mu_i = O(1)$ $\sum \mu_i^2 = O(n)$ ならば正規分布に従うことがわかる。

また更に $\ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} = \dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1}$ が成り立てば $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ と $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ とが同時に直交化されるから，オ1項とオ2項の同時正規性が証明され，従って全体としての漸近正規性が示される。

更にもう一度微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\log L = {} & 3\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} \\
& -\frac{3}{2}\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} - \frac{3}{2}\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} \\
& +\frac{1}{2}\underset{\sim}{y}'\Sigma_n^{-1}\dddot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\underset{\sim}{y} \\
& -\frac{1}{2}\operatorname{trace}\left(\Sigma_n^{-1}\dddot{\Sigma}_n - 3\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n\Sigma_n^{-1}\ddot{\Sigma}_n + 2(\Sigma_n^{-1}\dot{\Sigma}_n)^3\right)
\end{aligned}$$

となるから 上記と同様の条件をつけ加えることによってその漸近正規性を証明することができる。

そうすると θ の最大推定量 $\hat{\theta}$ は

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

の解として与えられるので

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}\log L + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L\cdot(\hat{\theta}-\theta) + \frac{\partial^3}{2\partial\theta^3}\log L\cdot(\hat{\theta}-\theta)^2 + \cdots$$

となり これから最尤推定の stochastic expansion と分布の漸近展開が得られる。

一般に $\hat{\theta}$ をBAN推定量とすると

$$\sqrt{B_n}(\hat{\theta}-\theta) \sim \frac{1}{\sqrt{B_n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log L = U_\theta$$

となる。そこで

$$\sqrt{B_n}(\hat{\theta}-\theta) = U_\theta + \frac{1}{\sqrt{n}}Q_\theta + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

と展開され，かつその漸近分布がEdgeworth展開可能であるような推定量のクラスを考えると，このような推定量のクラスについては，漸近モーメントに関して独立同一分布に従う標本の場合と同様な関係式が成り立つことが補助定理

$$E_\theta(U_\theta T_\theta) = \frac{1}{\sqrt{B_n}}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(T_\theta) - E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}T_\theta\right)\right]$$

を用いることによって証明される

このことから，$\hat{\theta}_n^*$ を最尤推定量を補正した3次漸近中央値不偏推定量（或いは漸近不偏推定量）$\hat{\theta}_n^\circ$ を上記の条件をみたす任意の3次漸近中央値不偏推定量とすると

$$\lim_{n\to\infty} n\left[P_\theta\{|\sqrt{n}(\hat{\theta}^*-\theta)|<a\} - P_\theta\{|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^\circ-\theta)|<a\}\right] \geq 0$$

がすべての θ, a について成り立つことが証明される。すなわち $\hat{\theta}_n^*$ は3次の漸近有効性を持つ

母数が多次元ベクトルである場合には，行列 $\Sigma_n^{-1}(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\Sigma_n)$，$\Sigma_n^{-1}(\frac{\partial^2}{\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta}\Sigma_n)$ 等が積について交換可能であれば，上記のような議論がそのまま適用できて，最尤推定量の高次の漸近有効性が証明される。

定常時系列の場合にもどると，Σ_n，$\dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1}$ 等がすべてToeplitz型 すなわちその要素 c_{ij} について

$$c_{ij} = c_{|i-j|}$$

となっていることが特徴である。従ってToeplitz Formに関する理論（Grenander & Szegö）によって，漸近的にはそれらが同じ直交行列によって対角化されること，またより詳しくは

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

とおくと，任意の連続関数 F について

$$\lim \frac{1}{n}\sum_k F(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(f(x))\,dx$$

となることが示されるから，推定量の漸近キュムラントの評価が可能になる。

具体的なケースについての計算はなお続稿で行いたい。