数理解析研究所講究録
第 420 巻 1981 年 33-44

確率的発展方程式

名市大 経済学部　宮原 孝夫

§1. 発展方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ に対して、ランダムな影響が加わったものを考えよう。それが white noise によるものとして、次のような方程式が考えられる。

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + F(u)w(t), \quad w(t) = \dot{B}(t) = \frac{dB(t)}{dt}.$$

たとえば、$\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動を考え、初期分布 $f(x)dx$ を与えたときの t 時間後の分布を $u(t,x)dx$ とすると $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$, $u(0,x)=f(x)$ となるが、単に Brown 運動による拡散だけでなく、$\mathbb{R}^d$ 上の各点でランダムな影響を受けているとすれば、ランダムなものを $w_t(x)$ として

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + F(u)w_t(x)$$

をうる。こゝで、$w_t(x)$ の定義をはっきりさせ方程式を意味あるものにしよう。$w_t(x) = w(t,x)$ を時間・空間の両方に

ついて各点独立な white noise（d+1次元パラメーター white noise）i.e. test function $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ に対して $\langle \varphi, w \rangle$, $\langle \psi, w \rangle$ が平均0の Gaussian random variables であって，covariance が $E[\langle\varphi, w\rangle\langle\psi, w\rangle] = (\varphi, \psi) = \int \varphi \cdot \psi \, dt\, dx$ となるような超過程と考えるのが一番基本的であろう。そのとき，$F(u(t,x))\dot{w}_t(x)$ の意味を適当に解釈すれば上の方程式（2）はHilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の確率微分方程式

(3) $\quad dX_t = \frac{1}{2} \Delta X_t dt + D(X_t) dB_t$

とみなすことができる。こゝで B_t は H 上の cylindrical Brownian motion (c. B. m.)（あるいは，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上の standard Wiener process）である。

Hilbert 空間上の確率微分方程式について少し説明しておこう。有限次元の確率微分方程式は $dx_t = f(x_t)dt + e(x_t)db_t$,（$x_t$, $f(x)$; n-ベクトル，e; $n \times r$ 行列，b_t; r次元 Brown 運動）という形であるが，こゝで f, e を $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $e(x): \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ なる線型変換と見て，$e: \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n)$ となる。こゝで $n, r \to \infty$ にするとき $\mathbb{R}^n \to H_1$, $\mathbb{R}^r \to H_2$ とみなして，形式的に次の方程式が導かれる。

(4) $\quad dX_t = f(X_t)dt + e(X_t)dB_t$

ここで，$f: H_1 \to H_1$，$e; H_1 \longrightarrow \mathcal{L}(H_2 \to H_1)$ である。実際この方程式は，B_t：H_2 上の c. B. m.，$e: H_1 \to \sigma_2(H_2, H_1)$，$\sigma_2(H_2, H_1) = \{H_2$ から H_1 への Hilbert-Schmidt 作用素の全体$\}$，という場合には well-defined になっている。そして，$H_2 = H = L^2(R^d)$ という場合には，B_t の時間微分が $(d+1)$-パラメーターの white noise $W(t,x)$ になっている。

方程式 (4) において，$f(X) = AX$ とおいたものが (1) に対応したものと考えられる（$A = \frac{1}{2}\Delta$ なら，(3) になる）。（ただし，A が非有界で $\mathcal{D}(A) \subsetneqq H$ の場合を考えるので，解ののっている空間を気をつける必要がある。）上のような立場で扱かっているものとして [2, 3, 4, 5, 11, 12] 等がある。

方程式 (2) において $F(u) = u$ とおいたとき，対応する確率微分方程式 (3) における作用素 $D(X)$ は積作用素 $X\cdot$ となり，いわゆる双線型（bilinear）方程式

(5) $\quad dX_t = \frac{1}{2}\Delta X_t\, dt + X_t \cdot dB_t$

が得られる。この方程式はこのままでは $H = L^2(R^d)$ 上，又はそれを拡張した Hilbert scale ([3]) 上でも解は求まらない。（注．$dX_t = -AX_t dt + X_t \cdot dB_t$，A；正定値，は，$A^{-1}$ が Hilbert-Schmidt ならば解は unique に定まる（[4]）。しかし，その他の場合には，一般には解は H 又は A による Hilbert scale 内に解は定まらない。一例は [9] で説明してあり，それについては §3 で述べる。)

そこで，考えられる方法の1つは，(5) を修正して，

$$(5')\quad dX_t = \frac{1}{2}\Delta X_t\,dt + X_t\cdot S\,dB_t$$

を考察してみることであろう。ここで，S は H 上の作用素で smoothing operator と呼ばれる。dB_t を $S\,dB_t$ に置き代えるということは，各点独立な white noise を考える代りに，Gaussian random field を考えることになっている。

§2. ここでは，[6] に従って c.B.m. B_t の代りに空間的に一様な correlation のある Gaussian process $W(t)$，すなわち，covariance function $Q(x) \geqq 0$ により

$$E[\langle W(t), \phi\rangle\langle W(s), \psi\rangle] = \min(s,t)\iint \phi(x)\psi(y)\,Q(x-y)\,dx\,dy$$

で定められる $W(t)$ を採用した話しを紹介する (注．$Q(x) = \delta(x)$ のとき，$W(t)=B(t)$ である)。

考える方程式は，形式的に書けば

$$(6)\quad \frac{\partial X(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta X(t,x) + \sigma X(t,x)\,W'(t,x),\quad X(0,x) = C = \mathrm{const.},$$

σ は正の定数，$W'(t,x)$ は $W(t,x)$ の時間微分，で与えられ，$\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動に，各点 $x\in\mathbb{R}^d$ で密度に比例した大きさのランダムな作用が加わったときの，分布の時間的変化

を見ている方程式である。方程式 (6) の厳密な定義は

(7) $X(t,x) = C + \sigma \iint_0^t p(t-s, x, y) X(s,y) W(ds, dy)$,

$p(t,x,y)$; $\frac{1}{2}\Delta$ の基本解

で与えられる。ただし, "$=$" は $\mu \times P$ a.e. (μ は R^{d+1} 上の Lebesgue 測度) で等しいことを意味し, 右辺の積分は確率積分である。(注. (7) は, (5′) の形の方程式で述べれば, $Q(x)$ に可積分性を仮定して, S^2 を $Q(x-y)$ を積分核に持つ積分作用素 (非負定値である) とし, $S=\sqrt{S^2}$ とおいて, この S を用いたときの方程式 (5′) に相当する。)

方程式 (7) の解は逐次近似により構成できる。実際,

$X_0(t,x) \equiv C$, - - - - - ,

$X_n(t,x) = \sigma \int_0^t \int p(t-s; x, y) X_{n-1}(s,y) W(ds, dy), n=1,2,\cdots$

とおいて $X(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t,x)$ を考えると, compact 集合 K ($K \subset R^d$) に対して, $[0,T] \times K$ 上で $L^2([0,T]\times K \times \Omega, \mu \times P)$ の意味で収束し, 更に概収束することも分る。そしてこの $X(t,x)$ が (7) の unique な解である。

$X(t,x)$ は, 初期分布の密度を $C=\text{const.}$ としたときの, t 時間後の密度と考えられる。$X(t,x)$ が空間的な一様性を持った random field であることに注意して

$$q(t,x) = E[X(t,y) X(t, y+x)]$$

とおく。（注。$E[X(t,x)]=C$ であるから $q(t,x)-C^2$ が x だけ離れた2点間の covariance である。）

このとき，$q(t,x)$ に関して次の定理が成立する。

定理（[6]） 条件 $Q(x)\longrightarrow 0$ （$|x|\to\infty$） の下で，$q(t,x)$ は次の方程式の解である。

$$(8)\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial t}(t,x)=\Delta q(t,x)+\sigma^2 Q(x)q(t,x), \\ q(0,x)=C^2。\end{cases}$$

次に，$t\to\infty$ のときの $q(t,x)$ の極限を考察しよう。方程式（8）に Feynman-Kac formula を使って

$$q(t,x)=C^2 E_x\left[\exp\int_0^t \sigma^2 Q(b_s)ds\right],$$

b_s ; $Var(b_s)=2s$ の1次元 Brown 運動

となる。従って極限 $q^*(x)=\lim_{t\to\infty} q(t,x)$ が存在したとすると

$$q^*(x)=C^2E_x[\exp\sigma^2 T]\geqq C^2\sigma^2E_x[T],$$
$$T=\int_0^\infty Q(b_s)ds$$

となり，従って

"$\lim_{t\to\infty} q(t,x)$ が収束 $\Rightarrow E_x[T]<\infty$"

をうる。ところで，$E_x[T]=\int Q(y)dy\int_0^\infty P(2s,x,y)ds$

であるから $\int_0^\infty p(2s,x,y)\,ds<\infty$ が必要となり，これより $d\geqq 3$ が必要となる。このとき，次の定理が得られる。

定理([6]) $d\geqq 3$ とし，$\int |x-y|^{(2-d)}Q(y)\,dy \leqq L_2<\infty$ for $\forall x\in\mathbb{R}^d$，とする。このとき，次の (a)〜(c) が成立。

(a) $g^*(x)=\lim_{t\to\infty} g(t,x)<\infty$ が存在して連続。

(b) K : compact set in $\mathbb{R}^d$ に対して
$$\lim_{t\to\infty} E\left[\left(\int_K X(t,x)\,dx\right)^2\right]<\infty。$$

(c) g^* は次の方程式の解である。
$$\begin{cases}\Delta g^*(x)+\sigma^2 Q(x)\,g^*(x)=0\\ \lim_{|x|\to\infty} g^*(x)=C^2。\end{cases}$$

(注．(b) における $\int_K X(t,x)\,dx$ は K 内の個体数である。)

covariance function $Q(x)$ が compact support のときには $g^*(x)$ の $|x|\to\infty$ のときの挙動まで分って，

$$(*)\quad g^*(x)-C^2 \sim |x|^{2-d}$$

の評価が得られる。定理の (c) 又は (*) より $cov(X(t,x);X(t,y))\longrightarrow 0$ $(|x-y|\to\infty)$ となり，空間的に離れた点では次第に独立に近い状態になっていくといえよう。この結果として，Tchebycheff の不等式を使って

" $\forall \delta > 0$ に対して

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{t\geq 0} \left\{P\left(\left|\frac{X(t,A_K)}{|A_K|} - c\right| > \delta\right)\right\} = 0 \text{"}$$

が分る。こゝで，A_K は一辺の長さが K の cube を示し，$X(t,A_K) = \int_{A_K} X(t,x)\,dx$ である。(従って，$X(t,A_K)/|A_K|$ は A_K 上の平均密度である。)

§3. この節では，[10] に従って，Hilbert 空間 $H = L^2([0,\pi])$ 上の次の方程式を考察する。

$$(9) \quad dX_t = -\hat{\omega} X_t dt + X_t \cdot R\, dB_t,$$

こゝで，$\hat{\omega} = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{-\frac{d^2}{d\sigma^2}}$，$\Delta$; *Laplacian on H with Neumann boundary condition*，R ; $Rf(\sigma) = \int_0^\pi R(\sigma,\sigma')f(\sigma')d\sigma'$ なる作用素である。この方程式の意味は次のように見れる。$[0,\pi]$ 上の反射壁 Brown 運動 $\hat{b}(t)$ を指数 $\frac{1}{2}$ の片側安定過程 ξ_t で time change (subordination) したマルコフ過程 $y_t = \hat{b}(\xi_t)$ の generator が $-\hat{\omega}$ である。従って，そのようなプロセスに，第2項によるランダムな影響が加わった場合の密度関数の時間的変化を見ていることになる。そして，作用素 $\hat{\omega}^{-1}$ が Hilbert-Schmidt 型ではないので，§1 で注意したように，$X_t \cdot dB_t$ そのものではなく $X_t \cdot R\,dB_t$ に直したものを見ている。

上の問題を white noise analysis（[7, 8]）の立場でながめてみよう。Gelfand triple

$$\mathcal{E} \subset L^2((-\infty,\infty)\times[0,\pi]) \subset \mathcal{E}'$$

を1つとり，$\mathcal{E}'$ 上の Gaussian measure μ（2-パラメーター white noise）を次のものと定める。

$$\int_{\mathcal{E}'} e^{i\langle\eta,\omega\rangle} d\mu(\omega) = \exp\{-\tfrac{1}{2}\|\eta\|^2\}, \qquad \|\eta\|^2 = \iint_0^\pi \eta\, dt\, d\sigma.$$

このとき $B_t(\xi) = \langle \xi \otimes \chi_{[0,t]}, \omega\rangle$ により B_t を定めると，B_t は $H = L^2([0,\pi])$ 上の C.B.m. である。方程式 (9) における B_t をこの C.B.M. にとったとすると，その解 $X(t)$ が，$X(t) \in L^2(\mathcal{E}' \to H)$ に求まる。$L^2(\mathcal{E}'\to H)$ を

$$L^2(\mathcal{E}'\to H) = \sum \oplus \mathcal{H}_n(H) \qquad \text{(Wiener-Itô 分解)}$$

と直和分解して，$X(t)$ の各成分を $X_n(t)$ とおく（$X(t) = \sum X_n(t)$, $X_n(t) \in \mathcal{H}_n(H)$）。各 $X_n(t)$ には積分表現の核 Φ_n, $\Phi_n \in \widehat{L^2}(([0,\pi]\times(-\infty,\infty))^n \to H)$, が対応しており，又，次のような対応の図式がなりたつ。

$$\begin{array}{ccc}
X(t) \longleftrightarrow \{X_n(t)\}_{n=0,1,\dots} & \longleftrightarrow & \{\Phi_n(t)\}_{n=0,1,2,\dots} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\{U(t;\eta) : \eta\in\mathcal{E}\} & \longleftrightarrow & \{U^{(n)}(t;\eta) ; \eta\in\mathcal{E}\}_{n=0,1,\dots}
\end{array}$$

$$U(t;\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t;\eta)$$

$$U^{(n)}(t;\eta)=\int\cdots\int \Phi_n(t;x_1,\cdots,x_n,\cdot)\,\eta^{n\otimes}(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \in H.$$

$U(t,\eta)$ は H-valued であることを注意しておく。

定理（[10]）. $\eta=\xi\otimes\zeta\in\mathcal{E}$ の形のとき，$U(t,\eta)$ は H 上の次の方程式の解である。

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dU(t;\eta)}{dt}=-\hat{\omega}\,U(t;\eta)+\zeta(t)\,G(\xi)\,U(t;\eta), & t>0 \\ U(0;\eta)=X_0\in H, \end{cases}$$

ここで，$G(\xi)$ は $G(\xi)h=(R\xi)\cdot h$ なる H 上の作用素である。（注．方程式 (9) の第2項 $X_t\cdot R\,dB_t$ を "X_t に $R\,dB_t$ が作用している" という見方をすれば自然な形。）こうして，(9) は，Hilbert 空間上の常微分方程式の系 (10) と同値になった。

次に，$X(t)$ の covariance function について見る。

$$(11)\quad E[(X(t),f)(X(t),g)]=\int_0^\pi\int_0^\pi V(t;\sigma,\sigma')f(\sigma)g(\sigma')\,d\sigma\,d\sigma'$$

をみたす関数 $V(t;\sigma,\sigma')$ を $X(t)$ の covariance function と呼ぶことにする。このとき，次の定理をうる。

定理（[10]）. $V(t;\sigma,\sigma')$ は次の方程式の解である。

$$(12)\quad \frac{\partial V}{\partial t}=-\tilde{\omega}V+\hat{R}\cdot V,\qquad \tilde{\omega}=\begin{bmatrix}\hat{\omega} & 0\\ 0 & \hat{\omega}\end{bmatrix}\ \text{on } H\times H,$$

$\hat{R}$; $\hat{R}(\sigma,\sigma')=\int_0^\pi R(\sigma,x)R(\sigma',x)\,dx$ による積分作用素。

この $V(t;\sigma,\sigma')$ は，§2における $g(t,x)$ と同様のものであるが，今の場合，Rが特別な場合を除いて，$t\to\infty$ のとき $V(t;\sigma,\sigma')$ は発散する。

以上，方程式(9)に対して述べてきたが，同様の議論は，§1における方程式(5')等に対しても可能なことを注意しておこう。

最後に，1次元Brown運動だけの場合，すなわち，空間方向の x が1点のみからなっているとき，方程式は

$$dz(t) = az(t)dt + \sigma z(t)db(t)$$

の形となるが，この方程式の解は $z(t) = c\exp\{\sigma b(t) - \frac{1}{2}a\sigma^2 t\}$ で与えられ，$t\to\infty$ のとき $z(t)\to 0$ (a.e.) となる。上に見てきたように，空間方向に広がりのあるときには事情がかなり異なることが分る。

参考文献

[1] A.V. Balakrishnan, Stochastic Optimization Theory in Hilbert Spaces 1, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 1, No. 2(1974), 97-120.

[2] R.F. Curtain and P.L. Falb, Stochastic Differential Equations on Hilbert Space, J. Differential Equations, Vol. 10 (1971), 412-430.

[3] Yu.L. Daletskii, Infinite Dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them, Uspekhi. Math. Nauk. t. 22(1967).

[4] D.A. Dawson, Stochastic Evolution Equation, Mathematical Biosciences, Vol. 15(1972), 287-316.

[5] D.A. Dawson, Stochastic Evolution Equations and Related Measure Processes, J. Multivariate Analysis, Vol. 5(1975), 1-55.
[6] D.A. Dawson and H. Salehi, Spatially Homogeneous Random Evolutions, J. of Multivariate Analysis Vol. 10(1980), 141-180.
[7] T. Hida, Analysis of Brownian Functionals, Carleton Math. Lecture Notes No. 13, 2nd ed., Ottawa, Canada, 1978.
[8] T. Hida, Brownian Motion, Springer, 1980.
[9] Y. Miyahara, Infinite Dimensional Langevin Equation and Fokker- Planck Equation, to appear in Nagoya Math. J., Vol. 81 (1981).
[10] Y. Miyahara, White Noise Analysis and an Application to Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces, to appear.
[11] A. Shimizu, Construction of a Solution of Linear Stochastic Evolution Epuations on a Hilbert Space, Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976, 385-395.
[12] M. Yor, Existence et Unicité de Diffusions à Valeurs dans un Espace de Hilbert, Annales de l'Institut Henri Poincare, Section B, Vol. 10, No. 1(1974), 55-88.