数理解析研究所講究録
第420巻 1981年 77-92

Volterra 型半線型拡散方程式について

名大　理学部　山田義雄

§1. Volterraのモデル

Volterra [5]は，彼の有名な著書の中で，数種類の生物間の生存競争をモデルとする数学的問題を扱った。特に，preyとpredatorの間の相互作用を記述する方程式として，

$u=u(t)$: preyの個体数，$v=v(t)$: predatorの個体数

とおいたとき，

$$\frac{u_t}{u}=a-bv,\qquad \frac{v_t}{v}=-p+qu \tag{1.1}$$

の形のものを提起した（但し，a, b, p, qは正定数）。この形の方程式は，その後，様々の変形を加えられ，常微分方程式のみならず，偏微分方程式の問題としても，多くの人々によって研究されてきた．

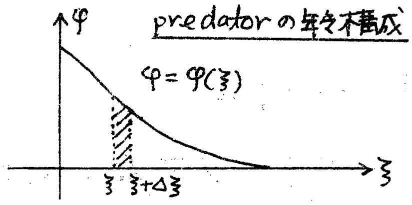
しかし，Volterraのモデル(1.1)に対して，当時，次のような批判があった．preyは，predatorのえじきとなると同時に個体消滅してしまうわけであるから，$-bv$という項を加

えることは確かに現実的である．けれども，predator が prey をえさとしても，即座に新個体の産れるわけがない．例えば，妊娠期間などを考えねばならないから，gu という項を加えるのはおかしいというわけである．そこで，Volterra は批判に答える形で，“履歴項”（＝“時間遅れを含む項”）のあるモデル

$$
(1.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_t}{u} = a - bv \\[2mm] \dfrac{v_t}{v} = -p + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k(t-s)u(s)ds \end{cases}
$$

も扱った．(1.2)の下の方程式は，過去の履歴が現在にも影響していることを意味する．導き方は，大ざっぱに言って，次のようである．

predator の生令構成は時間に無関係に一定であるとする．



左の図は，年令が $(\xi, \xi+\Delta\xi)$ にある predator の比率が $\varphi(\xi)\Delta\xi$ であるのを意味．

年令が $t-\tau$ 以上の predator の割合 $= \displaystyle\int_{t-\tau}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi \equiv f(t-\tau)$.

時間 t において生存している predator の個体数 $= v(t)$.

過去の時間 $\tau\,(<t)$ においても生存していた predator の個体数（年令が $t-\tau$ 以上のもの）$= f(t-\tau)v(t)$

$(\tau, \tau+\Delta\tau)$ の間に摂取した prey の個体数 $= \gamma f(t-\tau)v(t)u(\tau)\Delta\tau$

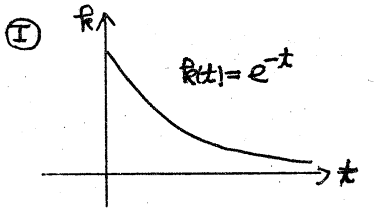
$(\tau, \tau+\Delta\tau)$ の間の predator の増殖 $= \gamma\Psi(t-\tau)f(t-\tau)v(t)u(\tau)\Delta\tau$

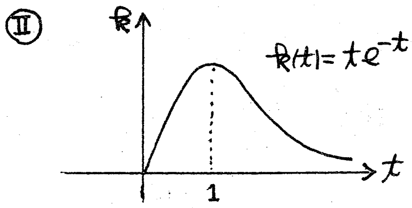
$\Psi(t-\tau)$をかけるのは、妊娠期間などを考慮するわけである。
相互作用による predator の増殖数は、積分することにより、

$$\gamma\int_{-\infty}^{t}\Psi(t-\tau)f(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\cdot v(t)$$

で表される。 $k(t)=\gamma\Psi(t)f(t)$ とおけばよい。

以後、我々は、核関数の例として、次のような関数





を考えることにする。Iのタイプの場合、過去の影響は指数関数的に減少し、IIのタイプの場合は、過去の影響は、ある一定時刻前が最大となる。

(1.2)のように、積分項による遅れ時間を含む問題は、常微分方程式の問題としては、Cushing [1] らによって精力的に研究されていることに注意しておこう。

さて、(1.2)のモデルに拡散効果を加えて考えてみよう。

ΩをR^nの有界領域とし、境界$\partial\Omega$は十分に滑らかとする。
Ωの中で、prey $u=u(x,t)$, predator $v=v(x,t)$ が次の関係をみたしているものとする。

$$(1.3)\quad \begin{cases} u_t = \mu\Delta u + u(a - bu - cv), & \Omega\times[0,\infty) \\ v_t = \nu\Delta v + v\left(pu + \int_0^t k(t-s)u(s)\,ds - r\right), & \Omega\times[0,\infty) \end{cases}$$

但し，$\mu, \nu > 0$, $a, b, c > 0$，$p \geqq 0$, $r > 0$. $k(t)$ は滑らかな $L^1(0,\infty)$ 関数．$\partial\Omega$ 上では，Neumann 条件

$$(1.4) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \qquad \partial\Omega \times [0,\infty)$$

を置く．初期条件

$$(1.5) \qquad u(x,0) = u_0(x) \geqq 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geqq 0. \qquad \Omega$$

を与えることによって，初期値境界値問題 (1.3)-(1.5) を考えよう．この種の問題に対しては，研究が非常に少く，単一種モデルを扱った Schiaffino の研究 [4]，prey-predator モデルの安定性を扱った Pozio の研究 [2] ぐらいしかない．遅れ時間が一定の場合に，Hopf bifurcation を扱った，吉田清氏の研究 [8] にも注意しておこう．

我々は，(1.3)-(1.5) に関して，特に，次のことを問題としたい．

問題

1．有界な大域解が存在するか？

2．有界な大域解が存在するとすれば，$t \to \infty$ での挙動はどのようになるか？

3．特に，履歴項が存在することによって，解の挙動は如何なる影響を受けるか？

これらの問題を以下の §§ で考えて行こう．

§2. 安定性

§1 の方程式 (1.3), (1.4) の "平衡点" の候補を考えてみよう。一般に, $u(t) \longrightarrow u_\infty$ $(t \to \infty)$ ならば,

$$\int_0^t k(t-s)u(s)ds \longrightarrow \int_0^\infty k(t)dt \cdot u_\infty \qquad (t \to \infty)$$

であるから, (u, v)-平面の第一象限にあるものとして,

$$E_1: \qquad u_\infty = \frac{a}{b}, \qquad v_\infty = 0$$

$$E_2: \qquad u_\infty = \frac{r}{p+\alpha}, \qquad v_\infty = \frac{a(p+\alpha)-br}{(p+\alpha)c}, \quad \text{但し}, \ \alpha = \int_0^\infty k(t)dt.$$

が考えられる。これらの平衡点 E_1, E_2 の安定性を調べるために, 通常, (u_∞, v_∞) の近傍で線型化を施し, 線型方程式の解の挙動を調べることが多い。

$$u_1 = u - u_\infty, \qquad v_1 = v - v_\infty$$

とおいて, (1.3)-(1.5) を u_1, v_1 に関する問題に変えよう。改めて, u_1, v_1 を u, v によって表し,

$$U = U(x, t) = {}^t(u(x,t), v(x,t))$$

とおくと, 次の形の問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbb{D}\Delta U + (\mathbb{B} + \mathbb{B}_1(t))U + \int_0^t \mathbb{C}(t-s)U(s)ds + F(U) + H(t), \qquad x \in \Omega, \ t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \ t \geq 0 \tag{2.2}$$

$$U(x, 0) = U_0(x) = {}^t(u_0 - u_\infty, v_0 - v_\infty), \qquad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

となる。但し, すべて実数の範囲で考え,

$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \nu\end{pmatrix}$, $\mathbb{B}$: 2×2 定数行列.

$\mathbb{B}_1(t)$: 2×2・行列.　　$\mathbb{B}_1(t)\longrightarrow 0$ as $t\to\infty$

$\mathbb{C}(t)$: 2×2・行列.

$F(U)$: 2×1・ベクトル.　$F(0)=0$, かつ Uに関する2次以上の項から成る.（例えば, uv, $v\int_0^t k(t-s)u(s)ds$ など）

$H(t)$: 2×1・ベクトル.　$H(t)\longrightarrow 0$ as $t\to\infty$

この問題(2.1)-(2.3)の $U=0$ の安定性を調べよう. 線型部分を調べることが重要であるが, 積分項が含まれるため, 出来合の理論を使うことができない.

安定性に関する理論を構築しよう. (2.1)の線型部分.

(2.4)
$$\frac{\partial U}{\partial t}=\mathbb{D}\Delta U+\mathbb{B}U+\int_0^t \mathbb{C}(t-s)U(s)ds,\quad x\in\Omega,\ t\geq 0$$

を考え, 初期値 U_0 に対して, (2.4), (2.2), (2.3)の解 $U(t)$ を対応させる. この対応を $\mathbb{R}(t)$ とおく:

(2.5)
$$U(t)=\mathbb{R}(t)U_0$$

さて, $\mathbb{C}(t)$に対し,

(A.1)
$$\int_0^\infty |\mathbb{C}(t)|dt<\infty,\quad \int_0^\infty t|\mathbb{C}(t)|dt<\infty,\quad |\cdot|=行列ノルム.$$

を仮定する. $\mathbb{C}(t)$に対する Laplace 変換

$$\mathbb{C}^*(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathbb{C}(t)dt$$

が, $\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$ に対して定義できる.

更に, 次を仮定する.

(A.2). 任意の $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0$ に対して

$$\begin{cases} (\lambda I - \mathbb{D}\Delta - \mathbb{B} - \mathbb{C}^*(\lambda))U = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{if and only if} \quad U = 0$$

注意 仮定(A.2)は、固有値問題

(2.6) $$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の固有値を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\cdots$ とおくとき、次と同値である。

$$\det(\lambda I + \lambda_i \mathbb{D} - \mathbb{B} - \mathbb{C}^*(\lambda)) \neq 0. \quad \text{for } {}^\forall \mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0,\ i = 0, 1, 2, \cdots.$$

(2.5)で定義した作用素 $\mathbb{R}(t)$ に対して次の定理が成立する。(cf. Yamada [7]).

定理 2.1. (i) 仮定(A.1), (A.2) の下で、任意の $P \geqq 1$ に対して、ある正数 M_P, M が存在して、次の評価が成り立つ。

$$\int_0^\infty \| \mathbb{R}(t) U_0 \|^P dt \leqq M_P \| U_0 \|^P, \quad {}^\forall U_0 \in \{L^2(\Omega)\}^2.$$

$$(1+t) \| \mathbb{R}(t) U_0 \| \leqq M \| U_0 \|, \quad {}^\forall t \geqq 0,\ {}^\forall U_0 \in \{L^2(\Omega)\}^2.$$

但し、$\|\cdot\| = \{L^2(\Omega)\}^2$-ノルム。

(ii)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mathbb{D}\Delta U + \mathbb{B}U + \displaystyle\int_0^t \mathbb{C}(t-s) U(s) ds + F(t), & \Omega \times [0, \infty) \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times [0, \infty) \\ U(x, 0) = U_0(x), & \Omega \end{cases}$$

の解は

$$U(t) = \mathbb{R}(t) U_0 + \int_0^t \mathbb{R}(t-s) F(s) ds$$

によって表現される。

定理2.1を用いると，(2.1)−(2.3)に対する $U=0$ の安定性を主張する次の定理が得られる (cf. Yamada [7])。

<u>定理2.2.</u> 仮定(A.1),(A.2)の下で，滑らかな初期値 U_0 に対して，

$$\|U_0\|,\quad \|\mathrm{grad}\,U_0\|,\quad \int_0^\infty |\mathbb{B}_1(t)|\,dt,\quad \int_0^\infty |H(t)|\,dt$$

が十分小さいならば，(2.1)−(2.3)は有界な大域解 U を一意にもち，しかも，

$$\lim_{t\to\infty} U(x,t)=0 \qquad \text{uniformly for } x\in\overline{\Omega}$$

が成立する。

<u>注意</u> 単独の方程式に対しても，定理2.1，2.2と同様の結果が成立する。

§3. 周期解の分岐

§2において，初期値境界値問題(2.1)−(2.3)に対して，仮定(A.1),(A.2)の下で，$U=0$ は局所的漸近安定であることを示した。それでは，仮定(A.2)が成立しなくなるとどうであろうか。(2.1)において，$\mathbb{B}_1(t)\equiv 0$, $F(t)\equiv 0$ とおき，$\mathbb{B}$, $\mathbb{C}(t)$, F が，パラメーター γ に依存するものとしよう。

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mathbb{D}\Delta U + \mathbb{B}(\gamma)U + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mathbb{C}(t-s;\gamma)U(s)\,ds + F(U;\gamma), & \Omega\times(-\infty,\infty) \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0 & \partial\Omega\times(-\infty,\infty) \end{cases}$$

を考える．例えば，(1.3)における積分範囲を $(0,t)$ から $(-\infty,t)$ に置き換えれば，(この置換は本質的でない！)，(3.1)の形の方程式が得られる．

(A.2)が成立しなくなる．次の場合を仮定しよう．

(B.1) 固有値問題（$\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$ で考える）．

$$\begin{cases} (\lambda I - \mathbb{D}\Delta - \mathbb{B}(\gamma) - \mathbb{C}^*(\lambda;\gamma))U = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は，$\gamma=\gamma_0$ のときに，単純固有値 $\pm i\omega_0$ $(\omega_0>0)$ をもち，その他の固有値は，$\pm i\omega_0$ の整数倍にない．

この仮定(B.1)は，固有値問題(2.6)のある単純固有値 λ_N を用いて，

$$P(\lambda;\gamma)\equiv \det A(\lambda;\gamma)=0, \qquad \text{但し } A(\lambda;\gamma)=\lambda I+\lambda_N\mathbb{D}-\mathbb{B}(\gamma)-\mathbb{C}^*(\lambda;\gamma)$$

が，$\gamma=\gamma_0$ のときに，純虚数の根 $\pm i\omega_0$ をもつことを意味する．$\gamma=\gamma_0$ のときに，$i\omega_0$ となる根（$P(\lambda;\gamma)=0$ の根）を，$\lambda(\gamma)$ で表そう．

$$A(i\omega_0;\gamma_0)\Phi=0, \qquad {}^tA(-i\omega_0;\gamma)\Psi=0 \qquad \text{'}t\text{'}=\text{転置}$$

をみたす $\Phi,\Psi\in\mathbb{C}^2$ をとり，$(\Phi,\Psi)=1$ となるように規格化しておく．(B.1)の他に，更に，

$$(B.2) \qquad \operatorname{Re}\lambda'(\gamma_0) \neq 0, \quad かつ$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\mathbb{C}^*(\lambda;\gamma)\Phi, \Psi)\Big|_{\substack{\lambda = i\omega_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \neq 1$$

を仮定する．このとき，Hopf-bifurcation に関する Sattinger [3] の議論を応用して．次の結果を示すことができる．

<u>定理3.1.</u> 仮定 (B.1), (B.2) の下で．(3.1) は．パラメーター $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ （ε_0 はある正数）によって

$$U(x, t; \varepsilon) = \varepsilon V(x, \omega t; \varepsilon) \quad (\neq 0)$$

$$\omega = \omega(\varepsilon), \qquad \gamma = \gamma(\varepsilon)$$

の形で表される周期解をもつ．但し，$\omega(0) = \omega_0$，$\gamma(0) = \gamma_0$．かつ．$V(x, t; \varepsilon)$ は周期 2π の関数．

このシンポジウムで講演された．吉田氏の結果 [8] も参照していただきたい．

§4. 単一種モデル

§2.3 の結果を．議論を簡単にするため．単一種モデルに適用してみよう．拡散項のある成長方程式に．履歴項を付加えた．次のような問題を考える．

$$(4.1)\quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u\left(a - bu - \int_0^t k(t-s)u(s)ds\right), & \Omega\times[0,\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega\times[0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geqq 0,\ (\text{smooth}, \not\equiv 0) & \Omega \end{cases}$$

但し，$a>0$，$b\geqq 0$，かつ．

$$k \geqq 0 : \text{smooth},\quad \int_0^\infty k(t)dt \equiv \alpha < \infty,\quad \int_0^\infty tk(t)dt < \infty.$$

(4.1) の "平衡点" の候補として．

$$u_\infty = \frac{a}{b+\alpha}$$

がある．$u = u_\infty$ の近傍で線型化を施し，(A.2) を確かめよう．

(A.2) は．

$$(4.2)\quad \lambda + u_\infty(b + k^*(\lambda)) \notin \sigma(\Delta) = \{-\lambda_i : i = 0,1,2,\cdots\} \quad \text{for } \mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0$$

(λ_i は (2.6) の固有値) と同値である．

核関数 k として §1 で挙げた例に沿って説明してみよう．

4.1. ① のタイプの核関数 $k(t) = \frac{\alpha}{T}e^{-\frac{t}{T}}$ を考えてみよう．$k^*(\lambda) = \frac{\alpha}{1+\lambda T}$ となり，(4.2) は常に成立する．一般に，k がこのように，非負，単調非増加な凸関数ならば，(4.2) は常に成立することがわかり，定理 2.2 より $u = u_\infty$ は局所的漸近安定であることが示される．実は，Lyapunov 関数

$$(4.3)\quad \int_\Omega \left\{u(x,t) - u_\infty - u_\infty \log\frac{u(x,t)}{u_\infty}\right\}dx$$

を用いれば，より強い次の定理を示せる (cf. Yamada [6])．

定理4.1. $(-1)^j k^{(j)}(t) \ge 0$ $(j=0,1,2)$ とする．（$b=0$ のときは $u_\infty \int_0^\infty t k(t)\,dt < 1$ も仮定する．）このとき，任意の滑らかな初期値 $u_0 \ge 0$ に対して，(4.1)は有界な大域解 $u(x,t)$ をもち，

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_\infty \quad \text{uniformly for } x\in\overline{\Omega}$$

となる．

注意 遅れを含む項 $\int_0^t k(t-s)u(s)ds$ を遅れのない項 αu で置換えても，定理4.1同様，$u=u_\infty$ の大域的漸近安定性がある．この意味で，k が非負，単調非増加な凸関数の場合は，遅れ時間の影響があまり本質的でないことがわかる．

4.2. Ⅱのタイプの核関数 $k(t)=\frac{\alpha}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}$ について考えてみよう．この場合，$k^*(\lambda)=\frac{\alpha}{(1+\lambda T)^2}$ であるから，(4.2)はHurwitzの判定条件を用いて，

$$2b^2u_\infty^2T^2+(5bu_\infty-a)T+2>0$$

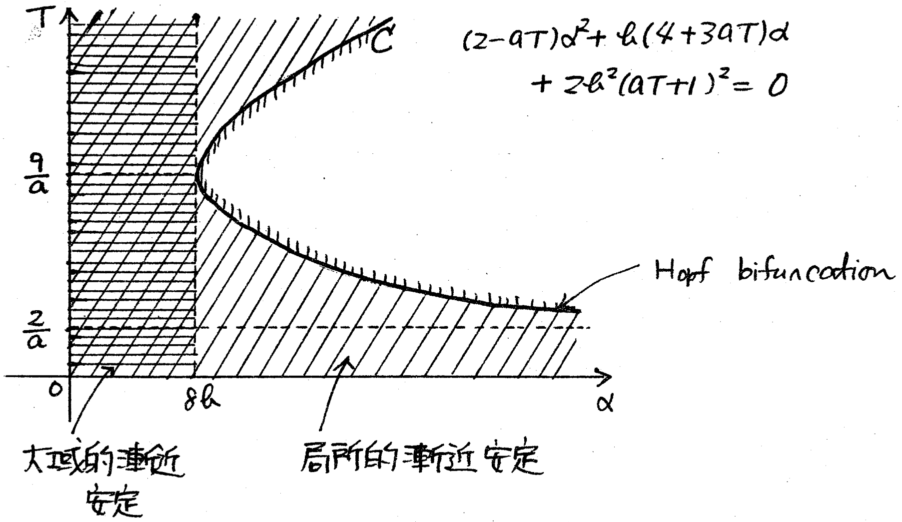
の形に言換えることができる．$u_\infty=\frac{a}{b+\alpha}$ を用いれば，これは，

(4.4) $(2-aT)\alpha^2+b(4+3aT)\alpha+2b^2(aT+1)^2>0$

と同値になる．定理2.2より，(4.4)が成立していれば，$u=u_\infty$ は局所的漸近安定であるが，Lyapunov関数(4.3)を使って，大域的漸近安定性に関する結果も導ける(cf. Yamada [6])．

<u>定理4.2.</u> $\alpha < 8b$ ならば $u = u_\infty$ は大域的漸近安定である.

α, T をパラメーターとみて, 他の定数を固定しておくと, 以上の状況は次の図のようになる.



それでは, (4.4) の左辺 $=0$ となる場合はどうであろうか? この場合は, (4.2) において,

$$(4.5) \qquad \lambda + \frac{a}{b+\alpha}\left(b + \hat{k}^*(\lambda)\right) = 0$$

が, 純虚数の根をもつことに対応している. T を固定して, α が上図の曲線 C を左から右へ横切るとき, (4.5) の純虚数根も, 虚軸を左から右へ横切ることがわかる. 仮定 (B.1), (B.2) を確かめることができ, 定理 3.1 より, 安定性の条件が破れると, 周期解の分岐することがわかる.

このように, 例えば, 核関数 k が大きくなり, 過去の影響

が大きくなってくると"平衡点"の安定性は失われ，その近傍に周期解が分岐してくる．

§5. prey-predator モデル．

§1で挙げた問題(1.3)−(1.5)に§2.3の結果を適用してみよう．

考察が簡単なのは，$a(p+\alpha)-br<0$ の場合である．この時は，$(u_\infty, v_\infty)=(\frac{a}{b}, 0)$ が，大域的漸近安定となる．すなわち，predator は，初期値 (u_0, v_0) をどのようにとっても，絶滅してゆくわけである．

しかし，$a(p+\alpha)\geq br$ の場合，§4程，事情は簡単でない．

$$u_\infty=\frac{r}{p+\alpha} \quad , \quad v_\infty=\frac{a(p+\alpha)-br}{(p+\alpha)c}$$

とおく．仮定(A.2)が成立する場合を求めて，定理2.2を適用してみよう．

$$\text{Ⅰ} \quad k(t)=\frac{\alpha}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad ,\text{Ⅱ} \quad k(t)=\frac{\alpha}{T^2}te^{-\frac{t}{T}}$$

いずれの核関数にしても，$T>0$ が十分小さいならば，(u_∞, v_∞) は局所的漸近安定となることがわかる．

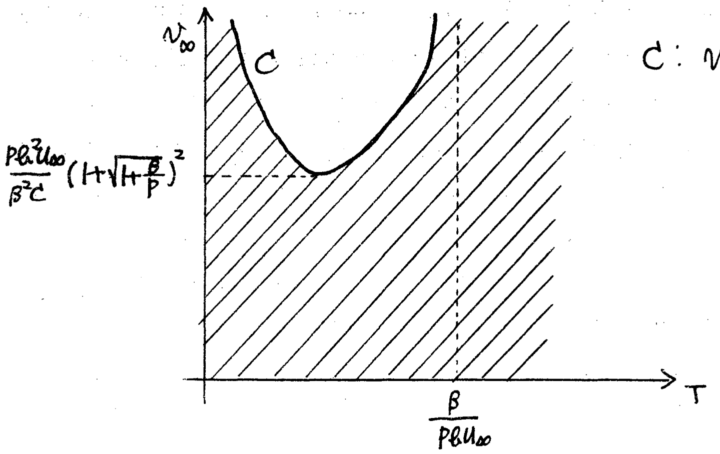
Ⅱのタイプの核関数の場合は，かなり複雑になるから，Ⅰのタイプの核関数について詳しく調べてみよう．

$k^*(\lambda)=\frac{\alpha}{1+\lambda T}$ であるから，仮定(A.2)と同値な条件を，

Hurwitz の判定条件を用いて，書き下してみよう．

(5.1) $\quad b(bu_\infty T+1) > cv_\infty T(\beta - pbu_\infty T)$

となる．a, T をパラメーターとみて，他の定数は固定しておく．これは，v_∞, T をパラメーターとみるのと同じである．(5.1)が成立する状況を図示すると，下図のようになる．



$$C:\ v_\infty = \frac{b(bu_\infty T+1)}{cT(\beta - pbu_\infty T)}$$

(T, v_∞)が，上図の斜線にあるとき，(u_∞, v_∞)は局所的漸近安定である．しかし，曲線C上においては，固有値問題

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda - \mu\Delta + bu_\infty & cv_\infty \\ -v_\infty(p+k^*(\lambda)) & \lambda - \nu\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が，純虚数の固有値をもち，しかも，

$$P(\lambda; v_\infty) \equiv \det\begin{pmatrix} \lambda + bu_\infty & cv_\infty \\ -v_\infty(p+k^*(\lambda)) & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

の根は，v_∞ が曲線Cを越えて大きくなってゆくとき，虚軸を左から右へ横切ってゆくことがわかる．よって，定理3.1の仮

定がすべて満されることがわかり．(u_∞, v_∞) の近傍に．周期解が分岐してくることもわかる．

参考文献

[1] J. M. Cushing: Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics, Lecture Notes in Biomathematics 20, 1977, Springer.

[2] M. A. Pozio: Behabiour of solutions of some abstract functional differential equations and application to predator-prey dynamics, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 4 (1980), 917-938.

[3] D. H. Sattinger: Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics 309 , 1973, Springer.

[4] A. Schiaffino: On a diffusion Volterra equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 3 (1979), 595-600.

[5] V. Volterra: Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, 1931.

[6] Y. Yamada: On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations (preprint).

[7] Y. Yamada: Stability for some Volterra diffusion systems (in preparation).

[8] K. Yoshida: Existence of periodic solutions for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology (preprint).