数理解析研究所講究録
第421巻 1981年 61-76

回転入力をもつ2次元オートマタ
(和形と積形の関係)

山口大・工学部　井上克司
高浪五男
谷口弘

1. まえがき

この数年間、2次元テープ上で動作する各種のオートマタが導入され、その受理能力、閉包性などが詳細に調べられてきた。[1]~[7] それらのオートマタの中には、入力2次元テープを1方向的に(例えば、上から下の方向へ、あるいは左上から右下の方向へ)走査してそのテープの受理の可否を判定するものがある。[1]~[3] 筆者らは先に、このような1方向的な走査を行なうオートマトンをいくつか組合せて用い、入力2次元テープの受理の可否を決定するという性質をもつ新しいタイプの2次元オートマトンを提案した。[5],[6] そこでは特に、入力テープを様々な方向からながめるひとつの手段として、入力テープを(90°, 180°, あるいは270° だけ時計方向に)回転させ、各回転された入力をそれぞれ1方向直並列アレイアクセプタ[1],[2] により走査し、走査して得られた結果

を積(∧)形式あるいは和(∨)形式で組合せて受理の可否を判定する２次元オートマタの受理能力について考察した。

本稿では、各回転された入力を１方向直並列アレイアクセプタによって走査し、走査して得られた結果を積形式で組合せる場合と和形式で組合せる場合とで、受理能力の間にいかなる関係が生じるかについて議論する。

２. 準備

記号の有限集合Σ上の２次元テープとは、Σの要素からなるm行n列($m, n \geqq 1$)の方形配列をいう。Σ上のすべての２次元テープの集合を$\Sigma^{(2)+}$と記す。２次元テープ$x \in \Sigma^{(2)+}$に対し、$l_1(x)$, $l_2(x)$はそれぞれxの行の数，列の数を表し、又、$x_{i,j}$($1 \leqq i \leqq l_1(x)$, $1 \leqq j \leqq l_2(x)$)は、i行j列に位置するx上の記号を表す。更に、$x[(i, j), (i', j')]$は、$1 \leqq i \leqq i' \leqq l_1(x)$且つ$1 \leqq j \leqq j' \leqq l_2(x)$のときのみ次の(i),(ii) を同時に満たす２次元テープzとして定義される。

(i) $l_1(z) = i' - i + 1$ & $l_2(z) = j' - j + 1$.

(ii) 各k, r($1 \leqq k \leqq l_1(z)$, $1 \leqq r \leqq l_2(z)$)に対し、

$$z_{k,r} = x_{k+i-1, r+j-1}.$$

$x[(i, j), (i', j')]$をxの$[(i, j), (i', j')]$－部分と呼ぶ。２次元テープ$x \in \Sigma^{(2)+}$に対し、xを90°時計方向に回転

して得られる２次元テープをx^Rと記す。$(x^R)^R$, $((x^R)^R)^R$をそれぞれx^{RR}, x^{RRR}と書くこともある。すなわち、x^{RR}, x^{RRR}はそれぞれxを180°, 270°時計方向に回転して得られるテープを表す。明らかに、$(x^{RR})^{RR}=x$, $(x^{RRR})^R=x$などが成り立つ。Tをある２次元テープの集合とする。このとき、

$$T^R=\{x^R \mid x\in T\},$$
$$T^{RR}=\{x^{RR} \mid x\in T\},$$
$$T^{RRR}=\{x^{RRR} \mid x\in T\}$$

とする。演算'R','RR','RRR' をそれぞれ90°, 180°, 270°回転演算と呼ぶ。明らかに、$(T^{RRR})^R=T$などが成り立つ。

次に、本稿で議論の対象となる２次元オートマタを導入しよう。まず、いくつかの２次元オートマタを積(∧)形式で組合せて得られるオートマトンを導入する。M_1, M_2, M_3, M_4をある２次元オートマタとする。このとき、$M=(M_1\wedge M_2^R\wedge M_3^{RR}\wedge M_4^{RRR})$は、$M_1, M_2, M_3, M_4$から構成される次のような２次元オートマトンである。xをMへの入力２次元テープとする。x, x^R, x^{RR}, x^{RRR}がそれぞれM_1, M_2, M_3, M_4に入力されて受理の可否が調べられ、$x\in T(M_1)$且つ$x^R\in T(M_2)$且つ$x^{RR}\in T(M_3)$且つ$x^{RRR}\in T(M_4)$[‡]であるときに限って、x

‡ Nをある２次元オートマトンとする。Nで受理されるすべての２次元テープの集合を$T(N)$と記す。

はMで受理される。すなわち、Mで受理されるすべての２次元テープの集合T(M)は、次のように定義される。

$$T(M)=\{x \mid x\in T(M_1)\wedge x^{R}\in T(M_2)\wedge x^{RR}\in T(M_3)\wedge x^{RRR}\in T(M_4)\}$$ ‡

同様に、M_1, M_2, M_3, M_4から種々の２次元オートマトンが定義される。

$M'=(M_1\wedge M_2^{R}\wedge M_3^{RR})$.

$M''=(M_2\wedge M_1^{R}\wedge M_3^{RRR})$.

$M'''=(M_4\wedge M_3^{RR}\wedge M_1^{RRR})$.

$N\ =(M_1\wedge M_2^{R})$.

$N'=(M_2\wedge M_3^{RR})$.

$N''=(M_3\wedge M_4^{RRR})$.

などがそうである。例えば、M''は、M_1, M_2, M_3から構成される２次元オートマトンであり、M''への入力２次元テープxは、xがM_2で受理され、x^{R}がM_1で受理され、しかもx^{RRR}がM_3で受理されるときに限って、M''で受理される。すなわち、

$$T(M'')=\{x \mid x\in T(M_2)\wedge x^{R}\in T(M_1)\wedge x^{RRR}\in T(M_3)\}$$

である。‡‡ 同様に、

---

‡ '$\wedge$' は、'且つ' を表す。

‡‡ 定義から推察されるように、$(M_1^{R}\wedge M_2\wedge M_3^{RRR})$, $(M_2\wedge M_3^{RRR}\wedge M_1^{R})$などはすべて$M''=(M_2\wedge M_1^{R}\wedge M_3^{RRR})$と同じオートマトンを表すと考えてよい)。

$T(M') = \{ x \mid x \in T(M_1) \wedge x^R \in T(M_2) \wedge x^{RR} \in T(M_3) \}$,

$T(M''') = \{ x \mid x \in T(M_4) \wedge x^{RR} \in T(M_3) \wedge x^{RRR} \in T(M_1) \}$,

$T(N) = \{ x \mid x \in T(M_1) \wedge x^R \in T(M_2) \}$,

$T(N') = \{ x \mid x \in T(M_2) \wedge x^{RR} \in T(M_3) \}$,

$T(N'') = \{ x \mid x \in T(M_3) \wedge x^{RRR} \in T(M_4) \}$,

である。

いま、C_1, C_2, C_3, C_4をそれぞれ2次元テープ上のあるオートマタの集合とする。このとき、次のような2次元テープの集合の族を考えることができる。

$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}] = \{ T \mid$ ある$M = (M_1 \wedge M_2^R \wedge M_3^{RR} \wedge M_4^{RRR})$に対し、$T = T(M)$(但し、各$i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$に対し$M_i \in C_i$ $)\}$†,

$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR}] = \{ T \mid$ ある$M = (M_1 \wedge M_2^R \wedge M_3^{RR})$に対し、$T = T(M)$(但し、各$i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$に対し$M_i \in C_i$ $)\}$,

$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR}] = \{ T \mid$ ある$M = (M_1 \wedge M_2^{RR})$に対し、$T = T(M)$(但し、$M_1 \in C_1$, $M_2 \in C_2$ $)\}$。

$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RRR}]$, $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR} \wedge C_3^{RRR}]$, $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR}]$, $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RRR}]$なども同様に定義される。

上記の∧(且つ)を'∨'(または)に書き換えることにより、

---

† $\mathcal{L}[C_2^R \wedge C_1 \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}]$, $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_3^{RR} \wedge C_2^R \wedge C_4^{RRR}]$などはすべて$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}]$と同じ2次元テープの集合の族を表わすと考えてよい。

いくつかの２次元オートマタを和(∨)形式で組合せて得られるオートマタ，並びにそれらのオートマタで受理される２次元テープの集合の族を導入することができる。これらの和形式のオートマタに関する諸定義については、文献〔6〕,〔7〕を参照されたい。

本稿では、1方向決定性直並列アレイアクセプタ(1WDPSA)[‡] 並びに1方向非決定性直並列アレイアクセプタ(1WPSA)[‡] を積形式で組合せて得られる２次元オートマタと和形式で組合せて得られる２次元オートマタの間の受理能力の関係を明らかにする。以下、簡単のため、すべての1WDPSA(1WPSA)の集合を$\mathbf{D}$($\mathbf{N}$)と記す。いま、Cを２次元テープ上のあるオートマタの集合とする。このとき、

$\mathcal{L}$〔C〕＝{ T｜あるM∈Cに対し、T＝T(M)}

とする。

なお、本稿では、入力２次元テープはすべて正方形に限定されているものとする。

文献〔5〕,〔6〕で得られている主な結果を示して、本章を終る。

<u>定理1</u>　各$\theta \in \{\wedge, \vee\}$に対し、$\mathcal{L}$〔$\mathbf{N}$〕には含まれるが

‡ 1WDPSA，1WPSAの定義については、文献〔1〕,〔2〕を参照されたい。1WDPSA，1WPSAは文献〔1〕では、それぞれDOWPS，OWPSと記されている。

$\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R} \theta \mathbf{D}^{RR} \theta \mathbf{D}^{RRR}]$には含まれない集合が存在する。

<u>定理2</u>　各$\theta \in \{\wedge, \vee\}$に対し、次が言える。

(1) $\mathcal{L}[\mathbf{D}] \subsetneq \mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R}] \subsetneq \mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R} \theta \mathbf{D}^{RR}] \subsetneq \mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R} \theta \mathbf{D}^{RR} \theta \mathbf{D}^{RRR}]$.

(2) $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{RRR}]$は、互いに比較不能である。

(3) $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R} \theta \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{R} \theta \mathbf{D}^{RRR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \theta \mathbf{D}^{RR} \theta \mathbf{D}^{RRR}]$は、互いに比較不能である。

<u>定理3</u>　各$\theta \in \{\wedge, \vee\}$に対し、次が言える。

(1) $\mathcal{L}[\mathbf{N}] = \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{RR}]$.

(2) $\mathcal{L}[\mathbf{N}] \subsetneq \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{R}]$

(3) $\mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{R}] = \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{RRR}] = \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{R} \theta \mathbf{N}^{RR} \theta \mathbf{N}^{RRR}]$

<u>注 1</u>　定理3の(3)より、例えば、各$\theta \in \{\wedge, \vee\}$に対し、$\mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{R} \theta \mathbf{N}^{RR}] = \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{R} \theta \mathbf{N}^{RRR}] = \mathcal{L}[\mathbf{N} \theta \mathbf{N}^{RR} \theta \mathbf{N}^{RRR}]$であることが示される。

3. <u>和型と積型の関係</u>

1WDPSA, 1WPSAを和形式で組合せた2次元オートマタと積形式で組合せた2次元オートマタの受理能力の関係については、既に文献[6]で一部考察が行なわれており、次

の結果の成り立つことが示されている。

<u>定理4</u>　$\mathcal{L}[\mathbf{N} \vee \mathbf{N}^R \vee \mathbf{N}^{RR} \vee \mathbf{N}^{RRR}]$には含まれないが$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$には含まれる集合が存在する。

次の定理の(1)が示すように、$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RR}]$に対しては、定理4と類似な関係は成立しない。

<u>定理5</u>　(1)　$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RR}] \subsetneqq \mathcal{L}[\mathbf{N}]$

(2)　$\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RR}] \subsetneqq \mathcal{L}[\mathbf{N}]$

<u>証明</u>　明らかに、各$\theta \in \{\wedge, \vee\}$に対し、$\mathcal{L}[\mathbf{D} \,\theta\, \mathbf{D}^{RR}] \subseteq \mathcal{L}[\mathbf{N} \,\theta\, \mathbf{N}^{RR}]$である。このことと定理3の(1)より、$\mathcal{L}[\mathbf{D} \,\theta\, \mathbf{D}^{RR}] \subseteq \mathcal{L}[\mathbf{N}]$。真の包含性の成り立つことは、定理1と$\mathcal{L}[\mathbf{D} \,\theta\, \mathbf{D}^{RR}] \subseteq \mathcal{L}[\mathbf{D} \,\theta\, \mathbf{D}^R \,\theta\, \mathbf{D}^{RR} \,\theta\, \mathbf{D}^{RRR}]$であることから明らか。

次に、本稿の主要結果である三つの定理を導こう。

<u>定理6</u>　$\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R \vee \mathbf{D}^{RR} \vee \mathbf{D}^{RRR}]$には含まれないが、$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RR}]$には含まれる集合が存在する（証明中の$T_1$がそのような集合の一例である）。

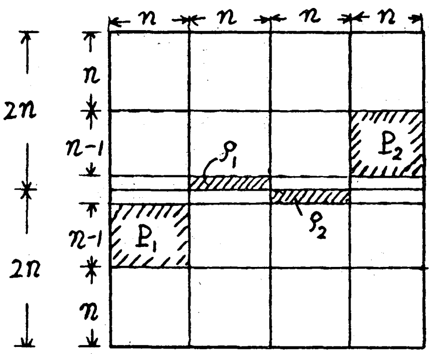
<u>証明</u>　$T_1 = \{x \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid {}^{\exists}n \geqq 2\ [\ l_1(x) = l_2(x) = 4n\ \&\ {}^{\exists}i\ (2n+2 \leqq i \leqq 3n)[x[(i, 1), (i, n)] = x[(2n, n+1), (2n, 2n)]]\ \&\ {}^{\exists}j\ (n+1 \leqq j \leqq 2n-1)[x[j, 3n+1), (j, 4n)] = x[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)]]]\}$とする（図1に$T_1$に含まれるテープの

例を示す)。

また、$T_2=\{x\in\{0,1\}^{(2)+} \mid \exists n\geq 2\,[\,\ell_1(x)=\ell_2(x)=4n\ \&\ \exists i\,(2n+2\leqq i\leqq 3n)\,[\,x[(i,1),(i,n)]=x[(2n,n+1),(2n,2n)]\,]\,]\}$とする。容易に確かめられるように、$T_2$を受理するような1WDPSA M'が存在する。M'を組合せて得られる$M''=(M'\wedge M'^{RR})$に対し、$T(M'')=T_1$が成り立つことは明らかである。従って、$T_1\in\mathcal{L}[\mathbf{D}\wedge\mathbf{D}^{RR}]$である。以下に、$T_1\notin\mathcal{L}[\mathbf{D}\vee\mathbf{D}^{R}\vee\mathbf{D}^{RR}\vee\mathbf{D}^{RRR}]$を示す。いま、$T_1$を受理するような$M=(M_1\vee M_2^{R}\vee M_3^{RR}\vee M_4^{RRR})$(各$M_i\in\mathbf{D}$)が存在するとし、$M_i$の各セルの状態数を$k_i$とする($1\leqq i\leqq 4$)。いま、各$n\geqq 2$に対し、

$V_1(n)=\{x\in\{0,1\}^{(2)+} \mid \ell_1(x)=\ell_2(x)=4n\ \&\ (x[(n+1,3n+1),(2n-1,4n)],\ x[(2n,n+1),(2n,2n)],\ x[(2n+1,2n+1),(2n+1,3n)],\ x[(2n+2,1),(3n,n)]$ はすべて$\{0,1\}^{(2)+}$に含まれ、これ以外のxの部分は記号'0'のみからなる)$\}$,

$V_2(n)=V_1(n)^{R}$,



ρ_1部分がP_1部分のある行に一致し、しかもρ_2部分がP_2部分のある行に一致している。

図1. T_1に含まれるテープの例

$Y_1(n) = \{ y \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid l_1(y) = n-1 \ \& \ l_2(y) = n \}$,

$Y_2(n) = Y_1(n)^R$,

$W(n) = \{ w \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid l_1(w) = 1 \ \& \ l_2(w) = n \}$

とする（図2に$V_1(n)$に含まれるテープの例を示す）。各$y \in Y_1(n)$に対し、

$row(y) = \{ w \in W(n) \mid \exists i \, (1 \leqq i \leqq l_1(y) = n-1)[w = y[(i, 1), (i, n)]] \}$

とし、$Y_1(n)$の中の2つのテープy, y'の間の関係'E'を次のように定義する。

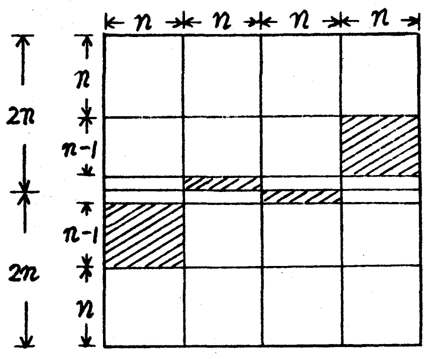
$$y \, E \, y' \Longleftrightarrow row(y) = row(y')$$

関係Eは同値関係であり、この同値関係のもとで$Y_1(n)$のテープを類別したときの同値類の総数$p(n)$は、

$$p(n) = \binom{2^n}{1} + \binom{2^n}{2} + \cdots\cdots + \binom{2^n}{n-1}$$

となる。この$p(n)$個の同値類を$C_1, C_2, \cdots\cdots C_{p(n)}$と記す。いま、各$y \in Y_1(n)$に対し、

$conf_1(y)(conf_3(y)) \triangleq$ その$[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)]$-部分が$y$であるような$V_1(n)$に含まれ



斜線部分は$\{0,1\}^{(2)}$に含まれ，斜線部分以外はすべて記号'0'からなる．

図2．$V_1(n)$に含まれるテープの例．

るテープ[↓]を $M_1(M_3)$ が読むときに、そのテープの第 $2n-1$ 行目を下方に離れた直後の $M_1(M_3)$ のコンフィグレイション[#]とし、又、各 $y \in Y_2(n)$ に対し、

$conf_2(y)(conf_4(y))$ ≙ その $[(1, n+1), (n, 2n-1)]$-部分が y であるような $V_2(n)$ に含まれるテープ[##]を $M_2(M_4)$ が読むときに、そのテープの第 n 行目を下方に離れた直後の $M_2(M_4)$ のコンフィグレイション

とする。$M_1(M_3)$ が $V_1(n)$ に含まれるテープを読むときに、それらのテープの第 $2n-1$ 行目を下方に離れた直後に入り得る $M_1(M_3)$ の異なるコンフィグレイションの総数を $g_1(n)$($g_3(n)$) とすると、

$$g_1(n) \leqq k_1^{4n},$$
$$g_3(n) \leqq k_3^{4n}$$

である。また、$M_2(M_4)$ が $V_2(n)$ に含まれるテープを読むときに、それらのテープの第 n 行目を下方に離れた直後に入り得る $M_2(M_4)$ の異なるコンフィグレイションの総数を $g_2(n)$($g_4(n)$) とすると、

$$g_2(n) \leqq k_2^{4n},$$

↓ これらのテープの $[(1,1),(2n-1,4n)]$-部分は、y によって一意的に定まることに注意。

入力テープを読むセル配列の状態の組合せをコンフィグレイションと呼ぶ。

これらのテープの $[(1,1),(n,4n)]$-部分は、y によって一意的に定まることに注意。

$$g_4(n) \leqq k_4^{4n}$$

である。従って、十分大きなnに対しては、

$$P(n) > g_1(n) \times g_2(n) \times g_3(n) \times g_4(n)$$

となる。このような十分大きなnに対しては、あるi, j ($1 \leqq i, j \leqq P(n)$, $i \neq j$), あるy, y' ($y \in C_i$かつ$y' \in C_j$)が存在して、次の(1)~(4)が成り立つ。

$$conf_1(y) = conf_1(y') \qquad (1)$$

$$conf_3(y) = conf_3(y') \qquad (2)$$

$$conf_2(y^{RRR}) = conf_2(y'^{RRR}) \qquad (3)$$

$$conf_4(y^{RRR}) = conf_4(y'^{RRR}) \qquad (4)$$

yとy'とはE-同値ではないので、ある$\rho \in W(n)$が存在して、

$$\rho \in row(y) \text{ 且つ } \rho \notin row(y')$$

(あるいは、$\rho \notin row(y)$ 且つ $\rho \in row(y')$)

となる。いま、$\rho \in row(y)$且つ$\rho \notin row(y')$とする(他の場合に対しても同様に証明される)。x, x'を次の(i)~(iv)を満たす$V_1(n)$に含まれるテープとする(図3の(a)にxを、(b)にx'を示す)。

(i) $x[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)] = y$ &

$x'[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)] = y'$

(ii) $x[(2n, n+1), (2n, 2n)] = \rho^{RR}$ &

$x[(2n+1,\ 2n+1),(2n+1,\ 3n)] = \rho$

(iii) $x[(2n+2,\ 1),\ (3n,\ n)] = y^{RR}$

(iv) $x'[(2n,\ 1),\ (4n,\ 4n)] = x[(2n,\ 1),\ (4n,\ 4n)]$

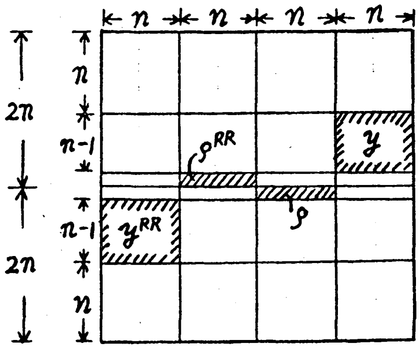
またx''を次の(v)～(vii)を満たす$\nabla_1(n)$に含まれるテープとする（図3の(c)にx''を示す）。

(v) $x''[(n+1,\ 3n+1),\ (2n-1,\ 4n)] = y$

(vi) $x''[(2n,\ n+1),\ (2n,\ 2n)] = \rho^{RR}$ &

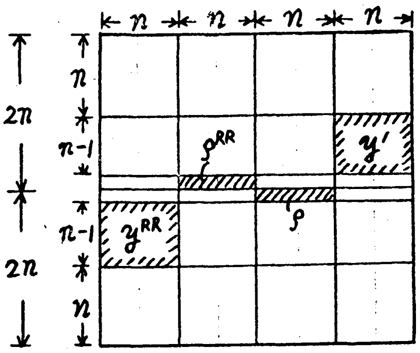
$x''[(2n+1,\ 2n+1),\ (2n+1,\ 3n)] = \rho$

(vii) $x''[(2n+2,\ 1),\ (3n,\ n)] = y'^{RR}$

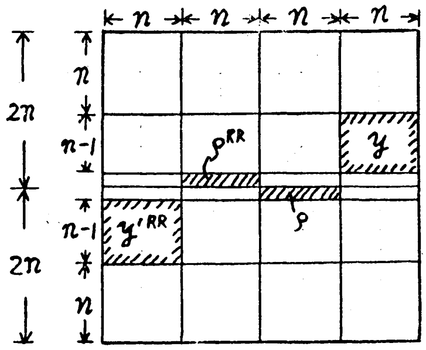


容易に確かめられるように、$x \in T_1$であり、従って、$x \in T(M_1)$, $x^R \in T(M_2)$, $x^{RR} \in T(M_3)$または$x^{RRR} \in T(M_4)$のいずれかが成立しなければならない。

(a) x



(b) x'



(c) x''

図3. 定理6の証明のための図

① $x \in T(M_1)$の場合：　上記の(1)式と(i)より、xとx'の第$2n-1$行目を下方に離れるときのM_1のコンフィグレイションは同一である。このことと上記の(iv)より、x'もまたM_1で受理され、従ってx'はMで受理されることになる。これは矛盾である($x'[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)] = \rho$は$row(y') = row(x'[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)])$には含まれず、従って$x' \notin T_1$であることに注意されたい)。

② $x^{RR} \in T(M_3)$の場合：　明らかに$x^{RR} = x$であるから、$x \in T(M_3)$である。上記の(2)式と(i)より、xとx'の第$2n-1$行目を下方に離れるときのM_3のコンフィグレイションは同一である。このことと上記の(iv)より、$x' = (x'^{RR})^{RR}$もまたM_3で受理され、従ってx'^{RR}はMで受理されることになる。これは矛盾である($x'^{RR} \notin T_1$であるから)。

③ $x^R \in T(M_2)$の場合：　$x^R[(1, n+1), (n, 2n-1)] = y^{RRR}$, $x''^R[(1, n+1), (n, 2n-1)] = y'^{RRR}$であることと上記の(3)式より、$x^R$と$x''^R$の第$n$行目を下方に離れるときの$M_2$のコンフィグレイションは同一である。このことと$x^R[(n+1, 1), (4n, 4n)] = x''^R[(n+1, 1), (4n, 4n)]$であることから、$x''^R$もまた$M_2$で受理され、従って$x''$は$M$で受理されることになる。これは矛盾である($x''[(2n, n+1), (2n, 2n)] = \rho^{RR}$は、$row(y'^{RR}) = row(x''[(2n+2, 1), (3n, n)$

]）には含まれず、従って $x'' \notin T_1$ であることに注意）。

④　$x^{RRR} \in T(M_4)$ の場合：　明らかに、$x^{RRR} = x^R$ であるから、$x^R \in T(M_4)$ である。このとき、上記の (4) 式を用いて、③と同様にして、$x''^R = (x''^{RR})^{RRR}$ もまた M_4 で受理されることが示され、従って、x''^{RR} は M で受理されることになる。これは矛盾である（$x''^{RR} \notin T_1$ であるから）。

以上で、すべての場合に対して矛盾が示された。故に、$T_1 \notin \mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R \vee \mathbf{D}^{RR} \vee \mathbf{D}^{RRR}]$ である。

次の定理7、定理8の成立することは、文献(8)に示されている。

<u>定理7</u>　$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R \wedge \mathbf{D}^{RR} \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$ には含まれないが $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RRR}]$ には含まれる集合が存在する。

<u>定理8</u>　$\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R \wedge \mathbf{D}^{RR} \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$ には含まれないが $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RR}]$ には含まれる集合が存在する。

以上の定理4，6，7，8を用いれば、例えば、次の系の成り立つことが示される。

<u>系1</u>　(1) $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RRR}]$ は、それぞれ $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$ と比較不能である。

(2) $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R \vee \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^R \vee \mathbf{D}^{RRR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \vee \mathbf{D}^{RR} \vee \mathbf{D}^{RRR}]$ は、それぞれ $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R \wedge \mathbf{D}^{RR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^R \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}^{RR} \wedge \mathbf{D}^{RRR}]$ と比較不能である。

(3) $\mathcal{L}[\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}^R \wedge \mathcal{D}^{RR} \wedge \mathcal{D}^{RRR}]$ と $\mathcal{L}[\mathcal{D} \vee \mathcal{D}^R \vee \mathcal{D}^{RR} \vee \mathcal{D}^{RRR}]$ は比較不能である。

実は、定理4，6，7，8を用いることにより、1WDPS A を和形式で組合せて得られるオートマタと積形式で組合せて得られるオートマタの受理能力の関係をすべて求めることができる。

文　献

[1] A. Rosenfeld and D.L.Milgram ： IPL.2, P.43 (1973).

[2] 井上，中村 ： 信学論(D)，58−D，3，P.167 (昭50−03).

[3] 井上，中村 ： 信学論(D)，J59−D，4，P.229 (昭51−04).

[4] 森田，梅尾，菅田 ： 信学論(D)，J60−D，12，P.1077 (昭52−12).

[5] 井上，高浪，谷口 ： 信学論(D)，J63−D，9，P.747 (昭55−09).

[6] 井上，高浪，谷口 ： 信学論(D)，1981年2月号予定

[7] 井上，高浪，谷口 ： 信学論オートマトンと言語研資 AL79−103，1980年1月.

[8] 井上，高浪，谷口 ： ‘回転入力をもつ2次元オートマタ(和形と積形の関係’ 文部省昭和55年度総合研究A報告書「多オートマトン系の研究」