数理解析研究所講究録
第 421 巻 1981 年 208-217

On Weak Persistency of Petri Nets

東工大理学部情報科学科
山崎 秀記

1. まえがき

persistent Petri net の到達可能集合が semilinear set であることを、Landweber および Robertson [2] が示した。Grabowski [1] は、与えられた Petri net P が persistent か否かを判定し、しかも P が persistent ならその到達可能集合を semilinear set の形で求めるアルゴリズムを与えた。

ここでは、彼らのアイデアがより広いクラスの Petri net に対して適用できることを示す。すなわち weakly persistent (w.p.) net を定義し、その到達可能集合が計算可能な semilinear set であることと、与えられた Petri net が w.p. か否かが判定可能であることを示す。また、semilinear set が w.p. net の到達可能集合の射影による像として特徴づけられることを示し、最後に w.p. net の到達可能集合を実際に求めるときに有用と思われる定理を証明する。

2. 定義

$\mathbb{Z}$で整数の集合、$\mathbb{N}$で非負整数の集合、$\mathbb{Z}^X$ ($\mathbb{N}^X$) で集合Xから$\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$) への関数の全体を表わすものとする。ここではXが有限集合$\{x_1, \cdots, x_n\}$の場合だけを扱うので、$f \in \mathbb{Z}^X$と$\mathbb{Z}$上のn次元ベクトル$(f(x_1), \cdots, f(x_n))$を同一視する。各$f, g \in \mathbb{Z}^X$, $z \in \mathbb{Z}$に対し、和$f+g$, スカラー積zf, 半順序関係$\leq$を成分毎の和、積、大小関係で定義する。

<u>Petri net</u> Pは<u>places</u>の有限集合Q、<u>transitions</u>の有限集合T、<u>incidence function</u> $A \in \mathbb{N}^{Q \times T \cup T \times Q}$、<u>初期マーキング</u>$M_0 \in \mathbb{N}^Q$からなるシステムである。

各transition tに対し、2つのベクトル$t^I, t^O \in \mathbb{N}^Q$を

$$\forall q \in Q, \quad t^I(q) = A(q, t) \quad \text{かつ} \quad t^O(q) = A(t, q)$$

で定義する。するとPetri net Pは、各transition tに対するベクトルt^I, t^Oと初期マーキングM_0を与えれば定めることができる。この論文ではplacesの集合Qおよび各transition tに対するベクトルt^I, t^Oを任意に固定して考える。したがってPetri net Pの要素QやAを省略して、簡単に$P = (M_0, T)$と書く。

Petri net Pの<u>マーキング</u>Mは$\mathbb{N}^Q$に属するベクトルである。transition tは$M \geq t^I$のとき、Mで<u>発火可能</u>といい、tを<u>発火</u>させるとマーキングが$M' = M - t^I + t^O$にか

わる。このとき $M \xrightarrow{t} M'$ 又は $M \xrightarrow{t}$ と書く。また t の発火による マーキングの変化、$-t^I + t^O$、を $\bar{t}$ で表わす。上に述べた記法は、発火列と呼ばれる transition の有限列 ($\in T^*$) に自然に拡張して用いる。すなわち、$M_1 \xrightarrow{t_1} M_2, \cdots, M_n \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$ ならば $M_1 \xrightarrow{t_1 \cdots t_n} M_{n+1}$ と書き、$M_{n+1} = M_1 + \overline{t_1 \cdots t_n}$ である。とくに空列 ε に対しては、$M \xrightarrow{\varepsilon} M$ で $\bar{\varepsilon} = 0$ (ゼロベクトル) である。

Petri net $P = (M_0, T)$ の到達可能集合、$R(P)$ 又は $R(M_0, T)$ と書く、は初期マーキング M_0 から到達可能なマーキングの集合 $\{M \mid {}^{\exists}\alpha \in T^*, M_0 \xrightarrow{\alpha} M\}$ で定義される。

T^* 上の Parikh map $PK : T^* \to \mathbb{N}^T$ を、$PK(\alpha)(t)$ は発火列 α 中の t の出現回数である、と定義する。$PK(\alpha) \leq PK(\beta)$ のとき β は α を覆うといい、$PK(\alpha) = PK(\beta)$ のとき β は α の並べかえであるということにする。

Petri net P が persistent であるというのは、任意の互に異なる transitions t, t' とマーキング $M \in R(P)$ に対して $M \xrightarrow{t}$ かつ $M \xrightarrow{t'}$ ならば $M \xrightarrow{tt'}$ がなりたつときである。

Petri net P が weakly persistent (w. p.) であるというのは、任意の、transition t、発火列 α、マーキング $M \in R(P)$ に対して、$M \xrightarrow{t}$ かつ $M \xrightarrow{\alpha t}$ ならば $M \xrightarrow{t\beta}$ なる α の並べかえ β が存在するときである。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "t"'] & {} \arrow[d, dashed, "t"] \\ {} \arrow[r, dashed, "t'"'] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "t"'] & {} \arrow[d, "t"] \\ {} \arrow[r, dashed, "\beta : \alpha の並べかえ"'] & {} \end{tikzcd}$$

persistent　　　　weakly persistent

補題1. Petri net P は persistent ならば w.p. である。

(証明) P を persistent net とする。発火列α中に t が現れないときには、任意の $M \in R(P)$ に対して $M \xrightarrow{t}$ と $M \xrightarrow{\alpha}$ から $M \xrightarrow{t\alpha}$ がいえる。よって一般に任意の $M \in R(P)$ に対して、$M \xrightarrow{t}$ かつ $M \xrightarrow{\alpha t}$ ならば αt から最も左に現れる t を除いた列を β とすると $M \xrightarrow{t\beta}$ である。

補題2. Petri net P が w.p. であるための必要十分条件は、任意の、発火列α、αを覆うβ、マーキング $M \in R(P)$ に対して $M \xrightarrow{\alpha} M'$ かつ $M \xrightarrow{\beta} M''$ ならば $M' \xrightarrow{\gamma} M''$ かつ $\alpha\gamma$ は β の並べかえであるような γ が存在することである。

(証明) α の長さに関する帰納法。

3. Semilinear Set と Weakly Persistent Net

この節では次の定理3、4を証明する。

定理3. $\mathbb{N}$ 上のベクトルの集合 V が semilinear であるための必要十分条件は、V が w.p. net の到達可能集合の射影による像であることである。

定理4. 与えられた Petri net P が w.p. か否かを判定し、

もし P が w.p. ならば semilinear set $R(P)$ を求めるアルゴリズムが存在する。

X を有限集合とする。$U \subseteq \mathbb{N}^X$ および $Y \subseteq X$ に対し U の $\mathbb{N}^X$ から $\mathbb{N}^Y$ への射影による像 $U|_Y$ は、

$U|_Y = \{ v \mid \exists u \in U, \forall y \in Y, v(y) = u(y) \}$ で与えられる。

$U, V \subseteq \mathbb{N}^X$ に対して、$L(U, V)$ を次のように定義する。

$L(U, V) = \{ u + v_1 + \cdots + v_n \mid u \in U, n \geq 0, v_1, \cdots, v_n \in V \}$

ある $u \in \mathbb{N}^X$ と有限集合 $V \subseteq \mathbb{N}^X$ が存在して $W = L(\{u\}, V)$ と書ける集合を <u>linear set</u> といい、linear sets の有限和で表わされる集合を <u>semilinear set</u> という。

$U \subseteq \mathbb{N}^X$ に対し、U の極小ベクトルの集合を $Min\, U$ と書く。$Min\, U = \{ u \in U \mid \forall v \in U, v \leq u \Rightarrow v = u \}$

X は有限集合なので、任意の U に対し $Min\, U$ は有限集合である。

Petri net $P = (M_0, T)$ とする。以下到達可能集合 $R(P)$ のかわりにそれを拡張した集合

$ER(P) = \{ (PK(\alpha), M) \mid M_0 \xrightarrow{\alpha} M, \alpha \in T^* \}$ を主に考える。

補題 5. Petri net P が w.p. のとき $ER(P)$ は semilinear set である。

(証明) $M \xrightarrow{\alpha}$ かつ $\bar{\alpha} \geq 0$ ならば、α は M で繰り返し発火可能である。 $F_M = Min \{ (PK(\alpha), \bar{\alpha}) \mid M \xrightarrow{\alpha}, \bar{\alpha} \geq 0, \alpha \neq \varepsilon \}$

とし、$F=\bigcup_{M\in N^Q} F_M$ とおくと F は有限集合であることがいえる。また $\mathcal{P}$ が補題2に述べた条件を満たせば、

$$ER(\mathcal{P})=\bigcup_{G\subseteq F} L(Min\{(PK(\alpha),M)\in ER(\mathcal{P}) \mid F_M=G\}, G)$$

と書ける。（この証明は Landweber および Robertson [2] の証明を w.p. net の場合に拡張したものである。）

（定理3の証明）十分条件であることは、semilinear set の射影による像は semilinear なので補題5よりいえる。逆を示そう。linear set は persistent net の到達可能集合として表わせる。また $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ を places の集合 Q 上の w.p. net とすると、$R(\mathcal{P}_1)\cup R(\mathcal{P}_2)=R(\mathcal{P})|Q$ となる w.p. net $\mathcal{P}$ をいくつかの制御用の places を付け加えて構成することができる。（[3]）

（定理4の証明）$\mathcal{P}=(M_0,T)$ とする。定理4に述べたアルゴリズムを次のように構成する。

アルゴリズムは $(0,M_0)$ から始めて、発火可能な transition を次々に発火させて集合 $ER(\mathcal{P})$ を列挙する。ある時点で $E_n=\{(u_0,M_0),\cdots,(u_n,M_n)\}$ が列挙されたとする。semilinear set S_n を次のように定義する。

$$S_n=\bigcup_{i=1}^{n} L(\{(u_i,M_i)\}, F_i^{(n)})$$

但し、$F_i^{(n)}=\{(PK(\alpha),\bar{\alpha}) \mid M_i \xrightarrow{\alpha}, \bar{\alpha}\geq 0, (u_i,M_i)+(PK(\alpha),\bar{\alpha})\in E_n\}$

（$F_i^{(n)}$ は有限集合で具体的に求まる。$S_n\subseteq ER(\mathcal{P})$ である。）

次に S_n に対し2つのテストを行う。第一のテストでは $S_n = ER(P)$ か否かを検査するために次の式 $\mathfrak{A}_n$ の真偽を調べる。

$$\mathfrak{A}_n = \forall (u, M) \bigwedge_{t \in T} [(u, M) \in S_n \wedge M \geq t^I \Rightarrow (u, M) + (PK(t), \bar{t}) \in S_n]$$

第二のテストでは、S_n 中に P が w.p. でないことを示す実例がないかどうかを検査するために、次の式 $\mathfrak{B}_n$ の真偽を調べる。

$$\mathfrak{B}_n = \forall (u, M) \forall (u', M') [(u, M) \in S_n \wedge (u', M') \in S_n \wedge u \lneq u'$$
$$\Rightarrow \bigvee_{t \in T} (u(t) \lneq u'(t) \wedge M \geq t^I)]$$

(S_n は semilinear set の形で与えられているので、式 $(u, M) \in S_n$、したがって $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ はすべて Presburger arithmetic の式で、決定可能である。)

$\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ が共に真のとき：$ER(P) = S_n$ かつ P は w.p. である。

$\mathfrak{A}_n$ が真で $\mathfrak{B}_n$ が偽のとき：P は w.p. でないが、$ER(P) = S_n$。

$\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ が共に偽のとき：P は w.p. でない。

以上3つの場合にはアルゴリズムは止まる。

$\mathfrak{A}_n$ が偽で $\mathfrak{B}_n$ が真のとき：アルゴリズムは $ER(P)$ の次の元 (u_{n+1}, M_{n+1}) を生成し、E_{n+1} に対し同様のことを行う。

上記のアルゴリズムが正しい事は容易に示せる。任意の Petri net P を与えたとき止まることを示そう。P が w.p. でなければ、$\mathfrak{B}_n$ がいつかは偽となりアルゴリズムは止まる。

もしPがw.p.なら補題5の証明より、あるlについて
$ER(P)=\bigcup_{i=1}^{l} L(\{(u_i,M_i)\}, F_{M_i})$と書けるので、少くとも
$E_n \supseteq \bigcup_{i=1}^{l}\{(u_i+PK(\alpha), M_i+\bar{\alpha}) \mid \alpha=\varepsilon$ 又は $(PK(\alpha),\bar{\alpha})\in F_{M_i}\}$ となった時点で$\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n$が共に真となる。したがってアルゴリズムは止まる。（この証明はGrabowski [1] を応用した。）

4. 到達可能集合の計算

定理4のアルゴリズムはその計算の複雑さがprimitive recursiveのクラスに属するか否かさえ分っていない。ここでは実際にある種のw.p. netの到達可能集合を計算するのに役立つと思われる定理を示す。

定理6. $P=(M_0,T)$をw.p. netとし$M\in R(P)$とする。
$M_1 \xrightarrow{t_1} M_2 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$ ならば

$$R(M_1,T)=\bigcup_{i=1}^{n} R(M_i, T-\{t_i\}) \cup R(M_{n+1},T)、$$

さらに$\overline{t_1\cdots t_n}\geq 0$ならば、$\ddagger$を$\ddagger^I=0$, $\ddagger^O=\overline{t_1\cdots t_n}$なる新しいtransitionとして、

$$R(M_1,T)=\bigcup_{i=1}^{n} R(M_i, T\cup\{\ddagger\}-\{t_i\})、$$

またとくに$\overline{t_1\cdots t_n}=0$ならば $R(M_1,T)=\bigcup_{i=1}^{n} R(M_i,T-\{t_i\})$ である。

（証明）$M_1 \xrightarrow{t_1} M_2$ならば、$M_1$から$t_1$を含む発火列で到達可能なマーキングは、補題2より$M_2$から到達可能である。故に、 $R(M_1,T)=R(M_1,T-\{t_1\})\cup R(M_2,T)$。よって、

定理の前半はnに関する帰納法で証明できる。$\overline{t_1 \cdots t_n} \geq 0$ ならば $t_1 \cdots t_n$ はMで繰り返し発火可能であるので、

$M_1 \xrightarrow{t_1} M_2 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} M_{n+1} \xrightarrow{t_1} \cdots \xrightarrow{t_n} M_{kn+1} \xrightarrow{t_1} M_{kn+2} \xrightarrow{t_2} \cdots$

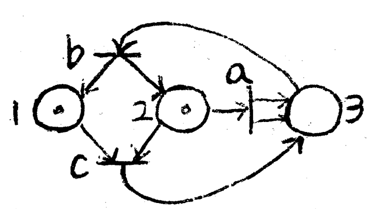
とおく。 $R(M_1, T) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} R(M_{kn+i}, T - \{t_i\}) \right)$ 。

$M_{kn+i} = M_i + k\overline{\tau}$ かつ τは常に発火可能であるので、

$R(M_1, T) = \bigcup_{i=1}^{n} R(M_i, T \cup \{\tau\} - \{t_i\})$ である。

例. $Q = \{1, 2, 3\}$ 上の Petri net P を

P



$a^I = (0, 1, 0)$, $a^O = (0, 0, 2)$, $b^I = (1, 1, 0)$

$b^O = (1, 1, 0)$, $c^I = (1, 1, 0)$, $c^O = (0, 0, 1)$

かつ $P = ((1,1,0), \{a, b, c\})$ として定義する。このときPは w.p. net である。([3])

$(1, 1, 0) \xrightarrow{c} (0, 0, 1) \xrightarrow{b} (1, 1, 0)$ かつ $\overline{cb} = 0$ より

$R(P) = R((1,1,0), \{a, b, c\})$

$\quad = R((1,1,0), \{a, b\}) \cup R((0,0,1), \{a, c\})$

ところで a も c も $(0,0,1)$ で発火可能でないので、

$R((0,0,1), \{a, c\}) = \{(0,0,1)\}$ である。

また $(1,1,0) \xrightarrow{a} (1,0,2) \xrightarrow{b} (2,1,1)$ より、$d^I = 0$, $d^O = \overline{ab} = (1,0,1)$

として、 $R((1,1,0), \{a, b\}) = R((1,1,0), \{b, d\}) \cup R((1,0,2), \{a, d\})$。

Petri net $P' = ((1,0,2), \{a, d\})$ では、aは決して発火可能にならないので、 $R(P') = R((1,0,2), \{d\}) = \{(m+1, 0, m+2) \mid m \geq 0\}$。

$(1, 1, 0) \xrightarrow{d} (2, 1, 1) \xrightarrow{b} (3, 2, 0)$ より、$e^I = 0$, $e^O = \overline{db} = (2, 1, 0)$

として、$R((1,1,0),\{b,d\}) = R((1,1,0),\{b,e\}) \cup R((2,1,1),\{d,e\})$。

ここで $R((1,1,0),\{b,e\}) = \{(2n+1,\ n+1,\ 0) \mid n \geq 0\}$,

$R((2,1,1),\{d,e\}) = \{(m+2n+2,\ n+1,\ m+1) \mid n, m \geq 0\}$。

以上をまとめて

$$R(\ell) = \{(0,0,1)\} \cup \{(m+1,\ 0,\ m+2) \mid m \geq 0\} \cup \{(2n+1,\ n+1,\ 0) \mid n \geq 0\}$$
$$\cup \{(m+2n+2,\ n+1,\ m+1) \mid n, m \geq 0\}。$$

参考文献

[1] Grabowski, J.: The decidability of persistence for vector addition systems. Inf. Proc. Letters, 11 (1980) 20-23

[2] Landweber, L. H. & E. L. Robertson: Properties of conflict free and persistent Petri nets. JACM 25 (1978) 352-364

[3] Yamasaki, H.: Weakly persistent Petri nets. Res. Report C-32 (1980)