

大型機の標準関数と  
連立一次方程式解法サブルーチンの性能比較

名大 大型計算機センター 桑野 昇世  
工学部 二宮 市三

1. はじめに

大型電子計算機に組み込まれている標準関数(基本外部関数)及び、連立一次方程式解法サブルーチンの精度と実行時間を測定したので、その結果を報告し、これらの数学ソフトウェアの性能評価を行う。

テストの対象として、日本電気社の NEAC ACOS 900、日立製作所の HITAC M200H、富士通社の M200 をえらんだ。これらは、現在、各メーカーでの最新、最大の計算機システムであり、全国共同利用施設としての七大学(北海道大学、東北大学、東京大学、名古屋大学、京都大学、大阪大学、九州大学)の大型計算機センターにおいて稼働している。今回テストに使用した計算機システムの概要を表1に示す。

2. 基本外部関数

2.1 測定方法

表1. テストに使用した計算機システムの概要一覧

調査機関	名古屋大学	北海道大学, 東京大学 分子科学研究所	大阪大学
ハードウェア	FACOM M200	HITAC M200H	ACOS 900
オペレーティング・システム	OS TF/F4	VOS 3	ACOS 6
実数型	仮数部 24ビット(10進6.3~22桁) 指数部 -79~+75	左に同じ	符号+27ビット(22~81桁) -155~+152
倍精度	仮数部 56ビット(10進15.9~16.8) 指数部 -79~+75		符号+63ビット(18.0~18.9) -155~+152
4倍精度	仮数部 112ビット(10進22.9~33.7) 指数部 -79~+75		符号+123ビット(36.1~37) -137~+152
複素数型	実数型 27		左に同じ
倍精度複素数型	倍精度実数型 27		
4倍精度複素数型	4倍精度実数型 27		
整数型	$-2^{31} \sim 2^{31} - 1$		
C.P.U速度	約 10 MIPS	約 11 MIPS	3.4 MIPS
FORTRAN コンパイラ名とそのオプション	FORTRAN-HE OPT(2)	FORTRAN 77 OPT(3) 基本外部関数; NOIAP 連立一次方程式; NOIAPとIAP	FORTRAN 16進モード、切捨て 基本外部関数; リビジョン R008 最適化なし 連立一次方程式; リビジョン R007 最適化あり
備考	VOS3システムとアセンブリソース、ロード・モジュールの互換性あり	内蔵型トレイ・プロセスサ(IAP)あり	16進と2進、及び切捨てと0捨入の選択可能

精度についての測定量として、単精度関数については対応する倍精度関数の値を、倍精度関数については対応する、4倍精度関数の値を真値として誤差を求める。図1に単精度関数の誤差を用いるためのサブルーチンを示す。例えばSQRT

の誤差を求めるには仮引数AFUNC, BFUNCに実引数としてS, QRT, DSQRTを指定する。引数Aには、測定しようとする関数の引数の範囲、Nには分点数を指定する。N等分点上の誤

図1 単精度関数の誤差を測定するプログラム

```

SUBROUTINE ERRRR1(AFUNC,BFUNC,ICH,IND,A,N)
C     REAL          ARGUMENT,FUNCTION
DIMENSION ICH(2),NCH(2)
REAL      AFUNC,A(2),S,X,X1,X2
REAL*8    BFUNC,XB,RA,RB,ERR,A1,A2,ZERO,ONE,BABS
DATA NCH/4HREL.,4HABS./
INDEX=IND
INDMAX=IND
ZERO=0
ONE=1
S=(A(2)-A(1))/FLOAT(N-1)
X=A(1)
A1=-ONE
A2=-ONE
X1=ZERO
X2=ZERO
DO 1110 I1=1,N
XB=X
RA=AFUNC(X)
RB=BFUNC(XB)
ERR= DABS(RA-RB)
BABS= DABS(RA)
C     GO TO (2010,2020,2030),IND
C     RELATIVE ERROR
2010 IF(BABS.NE.ZERO) ERR=ERR/BABS
C     GO TO 2100
C     ABSOLUTE ERROR
2020 GO TO 2100
C     CONDITIONAL RELATIVE ERROR
2030 IF(BABS.GT.ONE) GO TO 2035-
INDEX=2
GO TO 2100
2035 INDEX=1
IF(BABS.NE.ZERO) ERR=ERR/BABS
2100 CONTINUE
IF(A1.GE.ERR) GO TO 2110
A2=A1
X2=X1
A1=ERR
X1=X
INDMAX=INDEX
GO TO 1110
2110 IF(A2.GE.ERR) GO TO 1110
A2=ERR
X2=X
1110 X=X+S
INDEX=INDMAX
WRITE(7,1300) ICH,NCH(INDEX),N,A1,X1,A,S
1300 FORMAT(1X,2A4,A4,I5,6E10.3)
RETURN
END

```

差の絶対値の最大値 (最大誤差) 及び、その分点の値を出力する。Nは誤差関数、余誤差関数を100、それ以外は1000とした。関数の種類と引数の範囲によって相対誤差か、絶対誤差か、条件付き誤差かの選択をするための引数INDを設けた。ここで条件付き誤差とは、IND=3を指定したときで、関数値が1より小さい場合は絶対誤差を、1より大きい場合は相

図2 関数の実行時間を測定するプログラム

```

SUBROUTINE RRTYP1(FUNC, ICH, A, B, N)
REAL ARGUMENT, REAL FUNCTION
DIMENSION ICH(2)
S=(B-A)/FLOAT(N)
X=A
CALL CLOCKM(JTM1)
DO 1100 I1=1, N
R=R
X=X+S
1100 CONTINUE
CALL CLOCKM(JTM2)
JTM=JTM2-JTM1
X=A
CALL CLOCKM(JTM1)
DO 1110 I1=1, N
R=FUNC(X)
X=X+S
1110 CONTINUE
CALL CLOCKM(JTM2)
ITM=(JTM2-JTM1)-JTM
WRITE(7, 1130) ICH, ITM, N, A, B
1130 FORMAT(1X, 2A4, I5, I6, 4E10.3)
RETURN
END

```

対誤差をとるという条件の下での最大誤差をいう。

関数副プログラムの実行時間(CPU使用時間)を測定するためのサブルーチンを図2に示す。例えばSIN関数の場合、仮引数FUNCの実引数にSINを指定し、SINの引数の下限、上限を

A, Bに、分点数をNに指定する。先ず関数の引用なしのN回ループの実行時間を求め、次に関数SINを引用するループの実行時間を求めてその差をSIN関数N回分の計算時間とするNはすべて10000とした。

## 2.2 測定結果

各システムにおける関数の最大誤差の測定値を表2-1, 表2-2に示す。同一関数名が2つ以上あるのは、引数の範囲が異なることによる。右端のrangeの欄にその下限・上限を示す。errorの欄の3組の数値は左からM200, M200H, ACOS 900の最大誤差である。括弧内はそのときの分点の値を示す。ただし複素数型関数については、実数部分のみ示した。M200HのDEXP2, DEXP10, DLOG2, DGAMMA, DLGAMAの

表2-1 基本外部関数の誤差(複素数型, 実数型)

NO	name	M200 FORTRAN-HE error ( X )	M200H FORTRAN77 error ( X )	ACOS error ( X )	Index	range
1	CEXP	1.4E-06( 9.7E-04)	1.2E-06( 9.3E-04)	5.6E-08( 9.8E-04)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
2	CLOG	9.8E-07( 4.6E-01)	9.8E-07( 4.3E+00)	4.7E-08( 3.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
3	CSIN	1.6E-06(-6.2E+00)	1.7E-06(-1.4E+00)	5.6E-08(-4.4E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
4	CCOS	1.8E-06( 9.3E+00)	1.6E-06( 9.3E+00)	5.6E-08(-4.4E-04)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
5	CSQRT	7.5E-07(-1.0E+00)	7.7E-07(-1.0E+00)	5.7E-08( 1.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
7	CDEXP	6.3E-16( 4.8E-01)	3.6E-16( 9.0E-04)	1.1E-17( 1.0E+01)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
8	CDLOG	2.7E-16( 4.4E+00)	2.9E-16( 5.8E-01)	3.4E-18( 1.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
9	CDSIN	6.7E-16(-8.9E+00)	4.4E-16( 4.5E+00)	1.1E-17( 1.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
10	CDCOS	7.0E-16( 1.0E+01)	4.0E-16( 6.4E-01)	1.1E-17( 1.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
11	CDSQRT	1.8E-16( 9.4E-01)	1.9E-16( 3.9E-01)	2.3E-18(-1.0E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 1.0E+01
12	EXP	4.6E-07( 1.1E+01)	4.6E-07( 1.1E+01)	1.4E-09( 4.1E+00)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
13	EXP2	4.7E-07(-2.0E+01)	4.6E-07(-2.0E+01)	1.2E-09(-6.0E-02)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
14	EXP10	4.3E-07(-9.6E+00)	4.3E-07(-9.6E+00)	1.4E-09( 1.5E+00)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
15	SINH	1.1E-06(-9.0E+00)	8.8E-07(-1.1E+00)	8.7E-09(-6.0E-02)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
16	SINH	8.1E-07( 8.8E-01)	8.1E-07( 8.8E-01)	1.7E-08(-7.1E-02)	R	-1.0E+00 <sup>-</sup> 1.0E+00
17	COSH	1.0E-06( 1.9E-01)	9.7E-07( 7.0E-01)	8.3E-10(-7.0E-01)	R	-1.0E+00 <sup>-</sup> 1.0E+00
18	COSH	1.1E-06(-9.0E+00)	9.9E-07( 6.3E+00)	1.4E-09( 4.1E+00)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
19	SQRT	4.2E-07( 1.1E+00)	4.2E-07( 1.1E+00)	1.5E-18( 1.1E+00)	R	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
20	CBRT	9.0E-07(-1.9E+00)	7.4E-07(-1.1E+00)	4.7E-14( 8.0E+00)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
21	ATAN	1.0E-06(-2.1E+00)	1.0E-06( 2.0E+00)	1.1E-10( 3.0E-01)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
22	ATAN	8.4E-07( 6.4E-02)	8.4E-07( 6.4E-02)	1.9E-10(-1.0E-01)	R	-4.1E-01 <sup>-</sup> 4.1E-01
23	TANH	3.8E-07( 1.4E-01)	2.5E-07( 1.0E-01)	4.6E-09(-6.0E-02)	R	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
24	TANH	7.9E-07( 7.0E-02)	4.3E-07(-6.7E-02)	1.8E-08(-3.6E-02)	R	-5.0E-01 <sup>-</sup> 5.0E-01
25	COS	1.2E-07(-1.2E+01)	1.3E-07(-2.0E+01)	4.5E-10( 1.9E+01)	A	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
26	COS	1.1E-07( 5.2E-01)	1.1E-07( 7.1E-01)	4.8E-10( 7.8E-03)	A	-1.6E+00 <sup>-</sup> 1.6E+00
27	ARCOS	1.3E-06(-5.1E-01)	1.2E-06(-4.1E-01)	1.3E-09( 4.8E-01)	A	-1.0E+00 <sup>-</sup> 1.0E+00
28	ARSIN	9.2E-07( 6.4E-02)	5.8E-07( 6.3E-02)	2.5E-09(-1.6E-01)	R	-5.0E-01 <sup>-</sup> 5.0E-01
29	ARSIN	9.3E-07(-9.7E-01)	9.5E-07(-9.7E-01)	6.3E-10(-5.1E-01)	A	-1.0E+00 <sup>-</sup> -5.0E-01
30	ARSIN	9.3E-07( 9.5E-01)	9.4E-07( 9.9E-01)	6.3E-10( 5.1E-01)	A	5.0E-01 <sup>-</sup> 1.0E+00
31	SIN	7.5E-07(-6.5E-02)	7.5E-07(-6.5E-02)	1.2E-10(-7.8E-01)	R	-7.8E-01 <sup>-</sup> 7.8E-01
32	SIN	1.1E-07(-1.1E+01)	1.4E-07(-2.3E+00)	4.9E-10(-1.1E+01)	A	-2.0E+01 <sup>-</sup> -7.9E-01
33	SIN	1.1E-07( 1.7E+01)	1.5E-07( 1.0E+01)	5.0E-10( 4.7E+00)	A	7.9E-01 <sup>-</sup> 2.0E+01
34	ALOG	7.3E-07( 3.0E+00)	9.0E-07( 2.8E+00)	1.2E-10( 1.8E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
35	ALOG2	7.8E-07( 3.2E+00)	1.3E-06( 3.0E+00)	1.7E-10( 1.8E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
36	ALOG10	1.0E-06( 1.3E+01)	1.2E-06( 1.1E+01)	5.2E-11( 1.8E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
37	TAN	1.5E-06(-1.0E-01)	1.6E-06( 6.5E-02)	2.2E-11( 4.7E-01)	R*	-7.8E-01 <sup>-</sup> 7.8E-01
38	TAN	1.0E-06(-1.7E+01)	1.5E-06(-7.9E+00)	2.2E-11(-7.2E+00)	R*	-2.0E+01 <sup>-</sup> -7.9E-01
39	TAN	9.9E-07( 8.6E+00)	1.2E-06( 1.7E+01)	2.2E-11( 7.2E+00)	R*	7.9E-01 <sup>-</sup> 2.0E+01
40	COTAN	9.9E-07(-7.4E-01)	8.9E-07( 7.8E-01)	2.2E-11(-4.7E-01)	R*	-1.6E+00 <sup>-</sup> 1.6E+00
41	COTAN	1.0E-06( 1.0E+01)	1.7E-06(-1.3E+01)	2.2E-11(-1.5E+01)	R*	-2.0E+01 <sup>-</sup> 2.0E+01
42	GAMMA	2.2E-05( 1.9E+01)	2.1E-06( 6.7E+00)	5.7E-06( 2.0E+01)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
43	GAMMA	2.4E-06( 6.7E+00)	2.4E-06( 6.7E+00)	1.3E-10( 2.5E-02)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 8.0E+00
44	ALGAMA	1.2E-06( 3.3E+00)	1.5E-06( 3.3E+00)	1.8E-07( 1.7E+01)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 2.0E+01
45	ALGAMA	1.1E-06( 3.5E+00)	1.3E-06( 3.3E+00)	2.3E-10( 2.1E+00)	R*	1.0E-03 <sup>-</sup> 8.0E+00
46	ERFC	8.9E-07(-5.8E-02)	8.9E-07(-5.8E-02)	2.3E-11( 5.0E-01)	R	5.0E-01 <sup>-</sup> 5.0E-01
47	ERFC	1.5E-05( 5.8E+00)	1.8E-06( 9.0E+00)	1.6E-08( 6.1E-01)	R	-1.0E+01 <sup>-</sup> 1.0E+01
48	ERF	8.5E-07( 5.8E-02)	8.5E-07( 5.8E-02)	2.2E-11(-5.0E-01)	R	-5.0E-01 <sup>-</sup> 5.0E-01
49	ERF	1.2E-07(-7.6E-01)	1.2E-07(-7.6E-01)	6.4E-09(-6.0E-01)	A	-4.0E+00 <sup>-</sup> -5.0E-01
50	ERF	1.1E-07( 7.1E-01)	1.1E-07( 7.1E-01)	6.5E-09( 6.0E-01)	A	5.0E-01 <sup>-</sup> 4.0E+00

行の空白は対応する4倍精度関数が用意されていないことによる。Indexの欄のR, A, R\*は順に相対誤差、絶対誤差、条件付き相対誤差を意味する。

各システムでの関数の実行速度の測定結果を表3-1, 3-2

表 2-2 基本外部関数の誤差 (倍精度実数型)

NO	name	M200 FORTRAN-HE error ( X )	M200H FORTRAN77 error ( X )	ACOS error ( X )	Index	range
51	DEXP	1.9E-16(-5.5E+00)	1.9E-16(-8.2E+00)	2.0E-17( 1.9E+01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
52	DEXP2	1.8E-16( 1.2E+01)		2.2E-18(-1.2E+01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
53	DEXP10	1.8E-16( 2.0E-02)		2.1E-17( 2.0E+01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
54	DSINH	4.8E-16(-6.3E+00)	3.3E-16(-1.7E+01)	2.0E-17( 2.0E+01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
55	DSINH	2.0E-16( 7.0E-02)	2.0E-16( 7.0E-02)	4.1E-18(-3.8E-01)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
56	DCOSH	4.8E-16( 9.0E+00)	3.2E-16( 1.8E+01)	2.0E-17( 2.0E+01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
57	DCOSH	4.0E-16(-1.2E-01)	2.1E-16(-6.2E-02)	1.2E-18( 4.6E-01)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
58	DSQRT	9.9E-17( 1.2E+00)	9.9E-17( 1.2E+00)	8.0E-19( 4.1E+00)	R.	1.0E-03~ 2.0E+01
59	DCBRT	2.5E-16( 1.1E+00)	1.8E-16( 1.0E+00)	1.6E-18(-3.4E-01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
60	DATAN	2.1E-16( 1.6E+00)	2.7E-16(-1.6E+00)	3.5E-17( 1.0E-01)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
61	DATAN	1.7E-16( 6.5E-02)	2.5E-16( 7.2E-02)	3.9E-17(-1.1E-01)	R.	-4.1E-01~ 4.1E-01
62	DTANH	1.2E-16(-5.8E-01)	1.2E-16(-5.8E-01)	5.3E-18(-1.1E+00)	R.	-2.0E+01~ 2.0E+01
63	DTANH	1.7E-16(-6.5E-02)	1.7E-16(-6.5E-02)	4.4E-18( 6.9E-02)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
64	DCOS	1.9E-15(-1.4E+01)	3.0E-17(-1.6E+01)	3.3E-18( 1.8E+01)	A.	-2.0E+01~ 2.0E+01
65	DCOS	1.1E-16( 8.4E-01)	2.3E-17(-8.4E-01)	5.6E-19(-1.6E-03)	A.	-1.6E+00~ 1.6E+00
66	DARCOS	3.2E-16(-9.6E-01)	3.4E-16(-6.0E-01)	2.3E-18(-4.5E-01)	A.	-1.0E+00~ 1.0E+00
67	DARSIN	4.0E-16(-6.3E-02)	2.0E-16( 6.5E-02)	3.8E-18(-4.6E-01)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
68	DARSIN	3.6E-16(-5.2E-01)	2.2E-16(-9.0E-01)	1.4E-18(-9.6E-01)	A.	-1.0E+00~ -5.0E-01
69	DARSIN	3.4E-16( 5.2E-01)	2.2E-16( 8.7E-01)	1.3E-18( 9.6E-01)	A.	5.0E-01~ 1.0E+00
70	DSIN	2.3E-16( 6.5E-02)	2.0E-16( 6.4E-02)	1.4E-18( 1.0E-01)	R.	-7.8E-01~ 7.8E-01
71	DSIN	1.9E-15(-1.3E+01)	2.9E-17(-2.3E+00)	3.2E-18(-1.9E+01)	A.	-2.0E+01~ -7.9E-01
72	DSIN	2.0E-15( 1.3E+01)	2.6E-17( 1.1E+01)	3.5E-18( 1.9E+01)	A.	7.9E-01~ 2.0E+01
73	DLOG	2.1E-16( 3.0E+00)	2.0E-16( 2.9E+00)	1.4E-18( 2.1E+00)	R*	1.0E-03~ 2.0E+01
74	DLOG2	2.0E-16( 3.0E+00)		1.9E-18( 2.1E+00)	R*	1.0E-03~ 2.0E+01
75	DLOG10	2.8E-16( 1.2E+01)	2.5E-16( 1.0E+01)	6.1E-19( 8.4E+00)	R*	1.0E-03~ 2.0E+01
76	DTAN	3.7E-16( 9.5E-02)	3.3E-16(-7.0E-02)	1.9E-18( 7.9E-02)	R*	-7.8E-01~ 7.8E-01
77	DTAN	5.2E-13(-1.4E+01)	2.8E-16(-4.8E+00)	1.1E-17(-1.7E+01)	R*	-2.0E+01~ -7.9E-01
78	DTAN	5.9E-13( 1.4E+01)	2.9E-16( 1.1E+01)	4.1E-18( 1.7E+01)	R*	7.9E-01~ 2.0E+01
79	DGAMMA	4.8E-16( 6.7E+00)			R*	1.0E-03~ 8.0E+00
80	DGAMMA	7.6E-15( 2.0E+01)			R*	1.0E-03~ 2.0E+01
81	DLGAMA	2.8E-16( 3.4E+00)			R*	1.0E-03~ 8.0E+00
82	DLGAMA	3.1E-16( 1.2E+01)			R*	1.0E-03~ 2.0E+01
83	DERFC	1.9E-16(-3.5E-02)	6.9E-16( 5.0E-01)	4.9E-17( 4.6E-01)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
84	DERFC	3.5E-15( 6.4E+00)	3.3E-14( 9.1E-01)	7.1E-17( 5.3E-00)	R.	-1.0E+01~ 1.0E+01
85	DERF	1.1E-16( 8.6E-02)	6.5E-16(-5.0E-01)	1.0E-16( 2.9E-01)	R.	-5.0E-01~ 5.0E-01
86	DERF	1.8E-17(-1.2E+00)	1.0E-14(-1.0E+00)	2.0E-17(-5.0E-01)	A.	-4.0E+00~ -5.0E-01
87	DERF	2.2E-17( 8.2E-01)	1.0E-14( 1.0E+00)	2.0E-17( 5.0E-01)	A.	5.0E-01~ 4.0E+00

に示す。測定値は関数10000回分の実行時間をミリ秒単位で示す。よく利用される三角関数、指数関数の計算時間はM200 H, M200 で数マイクロ秒、ACOS 900 では30~40マイクロ秒といったところである。なお、M200とM200 HのFORTRANコンパイラには、INLINEオプションがあり、これらの重要な関数は組み込み関数と同じ扱いをうける機能がある。今回の測定では、このオプションは指定しなかった。

以上の結果を各システム間で比較するために次のような規

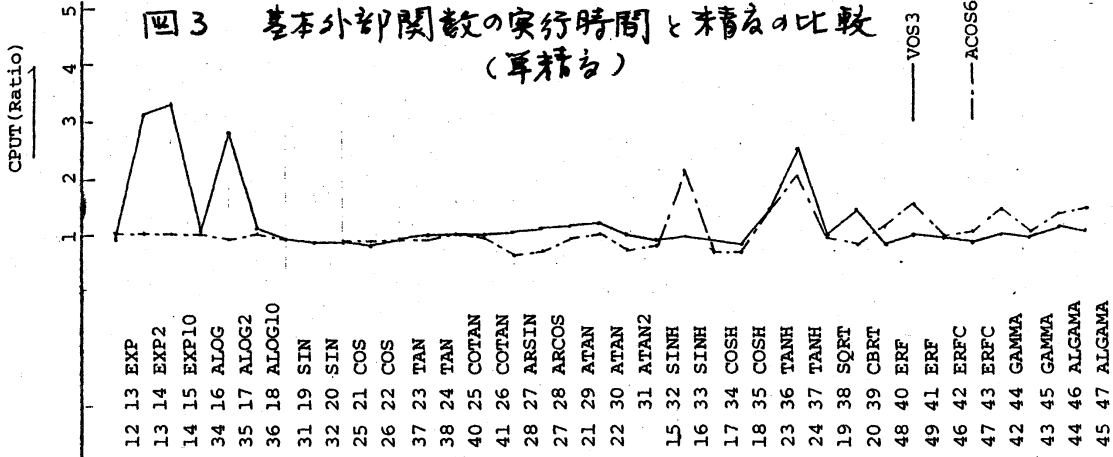
表3-1 基本外部関数のCPU使用時間

NO	name	CPU time			range
		msec/10000			
		M200	M200H	ACOS	
1	CEXP	190	155	887	1.00E-03 ~ 1.00E+00
2	CLOG	209	170	1100	1.00E-03 ~ 1.00E+00
3	CSIN	219	173	1138	1.00E-03 ~ 1.00E+00
4	CCOS	221	177	1146	1.00E-03 ~ 1.00E+00
5	CSQRT	165	168	939	1.00E-03 ~ 1.00E+00
7	CDEXP	254	219	1242	1.00E-03 ~ 1.00E+00
8	CDLOG	288	202	1387	1.00E-03 ~ 1.00E+00
9	CDSIN	289	243	1522	1.00E-03 ~ 1.00E+00
10	CDCOS	292	243	1530	1.00E-03 ~ 1.00E+00
11	CDSQRT	250	200	1001	1.00E-03 ~ 1.00E+00
13	EXP	69	52	324	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
14	EXP2	66	165	306	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
15	EXP10	65	171	318	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
16	ALOG	70	60	334	1.00E-03 ~ 2.00E+01
17	ALOG2	75	168	327	1.00E-03 ~ 2.00E+01
18	ALOG10	71	62	333	1.00E-03 ~ 2.00E+01
19	SIN	67	50	282	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
20	SIN	64	44	268	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
21	COS	69	49	288	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
22	COS	67	43	282	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
23	TAN	75	58	314	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
24	TAN	74	59	306	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
25	COTAN	71	59	328	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
26	COTAN	73	60	324	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
27	ARSIN	106	88	327	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
28	ARCOS	102	91	342	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
29	ATAN	60	55	265	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
30	ATAN	54	51	256	-4.13E-01 ~ 4.13E-01
31	ATAN2	91	72	303	1.00E+00 ~ *
32	SINH	113	81	423	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
33	SINH	45	35	441	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
34	COSH	121	86	415	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
35	COSH	121	84	411	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
36	TANH	66	77	425	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
37	TANH	46	94	442	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
38	SQRT	78	63	349	1.00E-03 ~ 2.00E+01
39	CBRT	101	116	395	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
40	ERF	69	47	370	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
41	ERF	104	82	743	-4.00E+00 ~ 4.00E+00
42	ERFC	101	77	467	-1.00E+01 ~ 1.00E+01
43	ERFC	74	51	371	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
44	GAMMA	89	71	613	1.00E-03 ~ 8.00E+00
45	GAMMA	155	120	781	1.00E-03 ~ 2.00E+01
46	ALGAMA	150	127	893	1.00E-03 ~ 8.00E+00
47	ALGAMA	137	115	926	1.00E-03 ~ 2.00E+01

規格化を試みた。精度については、各関数毎に、M200の最大誤差の値で割る(M200の関数すべての値を1とする)。こうするとM200Hの値が1より大きいか小さいかでM200と比較したときの能率の良し悪しを判断できる。一方ACOS 900の場合はM200, M200Hよりハードウェアの有効桁数は10進で約1〜2桁長いことを考慮する必要がある。

る。CPU時間の規格化のために、先ず各関数毎にM200の測定値で割り、更に各システムのCPU速度比を規格化定数とし

図3 基本外部関数の実行時間と精度の比較  
(単精度)



(倍精度)

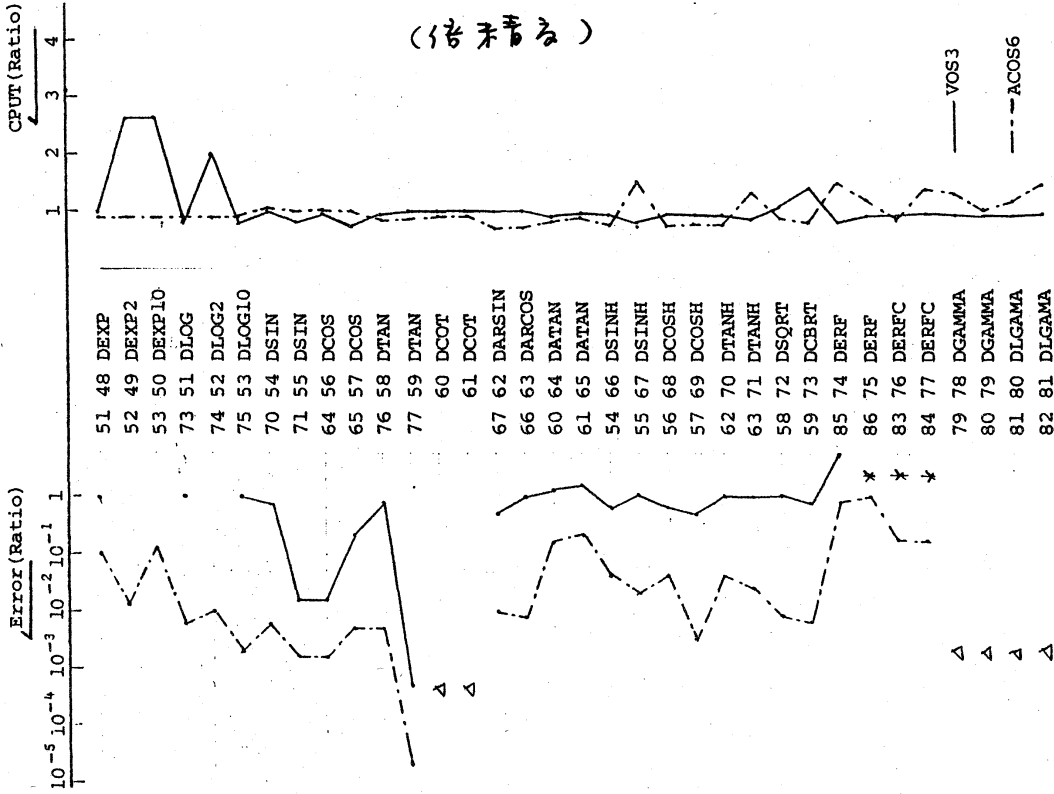




表 3-2 基本外部関数のCPU使用時間

NO	name	CPU time			range
		msec/10000			
		M200	M200H	ACOS	
48	DEXP	99	78	414	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
49	DEXP2	95	196	403	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
50	DEXP10	95	202	415	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
51	DLOG	104	65	465	1.00E-03 ~ 2.00E+01
52	DLOG2	109	176	456	1.00E-03 ~ 2.00E+01
53	DLOG10	107	66	464	1.00E-03 ~ 2.00E+01
54	DSIN	80	63	397	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
55	DSIN	80	52	378	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
56	DCOS	83	62	408	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
57	DCOS	84	51	401	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
58	DTAN	99	76	396	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
59	DTAN	96	75	388	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
60	DCOTAN	95	77	410	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
61	DCOTAN	94	77	406	-1.57E+00 ~ 1.57E+00
62	DARSIN	141	115	469	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
63	DARCOS	139	117	481	-9.99E-01 ~ 9.99E-01
64	DATAN	93	69	351	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
65	DATAN	86	67	343	-4.13E-01 ~ 4.13E-01
66	DSINH	147	112	512	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
67	DSINH	60	39	416	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
68	DCOSH	155	118	508	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
69	DCOSH	152	117	498	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
70	DTANH	145	109	515	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
71	DTANH	77	53	477	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
72	DSQRT	86	72	352	1.00E-03 ~ 2.00E+01
73	DCBRT	135	149	485	-2.00E+01 ~ 2.00E+01
74	DERF	112	69	763	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
75	DERF	195	142	1097	-4.00E+00 ~ 4.00E+00
76	DERFC	199	146	775	-1.00E+01 ~ 1.00E+01
77	DERFC	118	71	758	-4.99E-01 ~ 4.99E-01
78	DGAMMA	143	106	863	1.00E-03 ~ 8.00E+00
79	DGAMMA	233	166	1083	1.00E-03 ~ 2.00E+01
80	DLGAMA	238	172	1266	1.00E-03 ~ 8.00E+00
81	DLGAMA	211	150	1413	1.00E-03 ~ 2.00E+01

て乗ずる。このよ  
うな処理の結果、  
値が1より大きけ  
ればM200の関数  
より能率が悪いと  
判断できる。CPU  
速度比として、M  
200 : M200H :  
ACOS 900 = 1 : 1、  
25 : 0.21 を用い  
た。この数値の根  
拠については後で  
述べる。  
以上のようにし  
て、CPU時間と、

誤差の大きさを規格化した値をグラフにしたのが図3である。  
図の中央の関数名の2つの数字は、左側が、2-1, 2-2の通し  
番号に、右側が3-1, 3-2の通し番号に対応する。△印は該当  
データなし、\*印はスケールアウトを示す。

### 2.3 結果の評価

さて、我々の行った調査の結果をどのように解釈し、評価

したらよいのであろうか。以下に評価のために必要な予備知識についての解説を交えて、我々の見解を述べることにする。

### 2.3.1 精度

先づ、関数の精度を測るためには、絶対誤差と相対誤差のどちらをしらべるべきであろうか？ 浮動小数点表示の建前から言えば、なるべく相対誤差を用いるのが望ましい。しかし関数の種類と引数の範囲によっては、相対誤差を考慮することが無理であり、あるいは無意味である場合がある。それは、原点もしくは無限遠点以外の零点附近のことである。このような引数に対しては、相対誤差の意味での精度を関数値に要求することは、原理的に無理であり、したがって絶対誤差を使わざるを得ない。原点以外の零点のまわりの三角関数、1の附近の対数関数などがその典型である。これに対して、原点や無限遠点が零点の場合には、関数値がどのように小さくても、相対誤差の意味での精度を達成することが可能であるので、このような場合には是非とも相対誤差を用いなければならない。原点附近の  $\sin$ ,  $\arctan$ ,  $\sinh$  などがそういう例である。以上のような方針に従って、引数の範囲の分割や、二つの誤差の使い分けを行った。しかし、すべての関数について丁寧に引数範囲を分割して、二つの誤差を使い分けるのは繁雑であるので、そのための便法として比較的重要でない

関数については条件付き誤差なるものを用いた。

精度というものを以上のように考えることにすると、次に問題になるのは精度の目安となる規準値である。これには、いわゆる“丸めの相対誤差の限界”といわれるものが適当である。幸いにも、今回の調査の対象となった3機種はすべて16進表示、切捨方式（ACOS 900は自由選択により2進モードにも零捨入モードにもなる）を採用しているので話は簡単である。即ち仮数部のビット数を $n$ とすると、 $2^{-(n-4)}$ をとればよい。このようにして規準値は次のようになる。

	単精度	倍精度
M200, M200H	$2^{-20} \approx 9.54 \times 10^{-7}$	$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$
ACOS 900	$2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$	$2^{-69} \approx 1.73 \times 10^{-18}$

以上のような観点から、表2-1, 表2-2, 図3を眺めて見よう。先ず、大まかなところでは、次の点が指摘できる。

(a) M200とM200Hでは少くとも重要な関数については、殆んど甲乙がなく、ほぼ及第点に達している。

(b) ACOS 900は規準値に比べて精度が良く、特に単精度においてその傾向が著しい。

ACOSの精度が良い理由の一つは、アキュムレータ上でかなり余分の桁数が使われていることにあるが、より本質的理由は、採用されている算法や近似式の精度が良すぎることにあ

ると推理される。精度が良すぎるのは一見好ましいことのように思われるが、本当はそうではない。精度を必要十分なまでに切り下げて、その分だけ速度向上に努めるべきである。

次に、もう少し細い点に焦点を絞ることにしよう。

(c)  $M200$  の倍精度の三角関数の精度が低い。これは区間縮小のための変換乗数  $4\pi$  の乗算に余分の桁数を用いるという配慮がなされていないためであると推察される。指数関数では同様の処置が実行されているので、これは片手落ちである。

(d)  $M200H$  の倍精度誤差関数の精度が低い。2底の対数、 $e$  と  $10$  のベキ乗が提供されていない。

(e)  $ACOS900$  のガンマ関数と倍精度誤差関数の精度が低い。

以上で精度の評価を終り、速度の評価に移る。

### 2.3.2 速度

関数の良否を判定するためのもう一つの尺度である速度は、精度と相補的な関係にあるが、重要性においてやや劣り、しかも絶対評価ができないという難点をもっている。我々の得た結果も、必ずしも100%信用できない速度比を用いた相対評価でしかない。

表3-1, 3-2, 図3を調べて気がつく点は次のとおりである。

(a) 大体の線では、3機種<sup>の</sup>相対的な到達度は均等である。

(b) M200では特に悪いものはない。

(c) M200HではTANH, CBRT, DCBRTが遅い。しかしもっと目につくのはEXP2, EXP10, ALOG2及びこれらの倍精度版の遅さである。これらの関数の結果は北大で得られたもので、前機種FACOM230-75との互換性のための移行措置として臨時的に提供されているものに過ぎないとのことである。しかし、そういう点を割引きしてもその遅さは全く諒解に苦しむ。例えば  $2^x = e^{x \cdot \log_2 e}$  であるから、EXP2の計算はEXPの計算時間に一つの乗算の時間を加えた時間でできる筈である。

(d) ACOS 700ではSINH, TANH及びその倍精度版ならびに誤差関数、ガンマ関数が悪い。又SQRTとDSQRTとが殆んど同じ速さであるのが興味深い。

以上で評価を終るが、絶対評価の立場から言えば、速度に関してはまだまだ十分改良の余地があるものと考えられる。

### 3. 連立一次方程式解法サブルーチン

#### 3.1 測定方法

$$N \text{元連立一次方程式} \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

において、与えられた  $A_{ij}$  と  $b_i$  に対する  $x_j$  を求めるサブ

ルーチンの実行時間と得た数値解  $\tilde{x}_j$  の精度を測定する。精度の測定には、誤差  $e = \max_j (|\tilde{x}_j - x_j|)$  を求めることにする。速度については、すべての  $A_{ij}$  と  $b_i$  が与えられて後、すべての  $\tilde{x}_j$  を得るまでの CPU 使用時間を測定する。テスト問題は、

- (a) 元数  $N$  は 16, 36, 64, 100.
- (b) 真値  $x_j$  がすべて 1 となるように  $b_i$  を定める。

図4 テスト用係数行列

(問題 I) 実対称正値行列  $A_{ij} = N + 1 - \min(i, j)$

(問題 II) 実対称正値 帯行列  $n = \sqrt{N}$  とすると、

$$A = \begin{pmatrix} 4I_n & X & & & 0 \\ X & 4I_n & & & \\ & & \dots & & \\ & & & X & 4I_n & X \\ 0 & & & X & 4I_n \end{pmatrix}, n^2 \times n^2$$

ここで、

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, n \times n$$

であり、また、 $I_n$  は  $n$  次の単位行列である。

(問題 III) 非対称行列  $A_{ij} = \begin{cases} d_i \delta_{ij} - c(d_i - d_j + \sigma), & j \leq k \\ d_i \delta_{ij} + c(d_i - d_j + \sigma), & k+1 \leq j \leq N \end{cases}$

ここで、 $c=1, k=N/2, \sigma=-k^2, d_i=i (i=1, 2, \dots, N)$  とする。

すなわち

$$b_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$$

(c) 係数行列は図

4 の 3 種類。

とする。1 つのサブルーチンについて  $4 \times 3$  又は  $4 \times 2$  ケースのテストを行う。

方程式の数値解の精度を予測するのに、係数行列の条件数が用いられる。12 のテスト行列の条件数を表 4 に示す。得られる解にお

Table 4 Condition numbers of test matrices.

N \ prob	1	2	3
16	4.38E+02	4.79E+00	3.40E+04
36	2.16E+03	9.62E+00	1.18E+06
64	6.74E+03	1.61E+01	1.42E+07
100	1.64E+04	2.42E+01	9.54E+07

いて、最悪の場合この条件数の大きさ程度の桁落ちを覚悟しなければならぬ。したがって、問題2は易しい問題で、ハードウェアの有効桁数一杯の精度を期待してよい。問題1はやや条件が悪く、問題3は非常に条件が悪く、64元、100元の場合、単精度計算では全く解が得られなくても仕方がない

表5 連立一次方程式解法サブルーチンの概要

サブルーチン名		解法 注)	作成者	備考
単精度	倍精度			
LEQLUS	LEQLUD	LU分解法	名大.ニ宮市三	分解成分の再利用可
GAUELS	GAUELD	LU分解法	"	
LAX	DLAX	LU分解法	富士通 SSLII	分解成分の再利用可
SIMEQS	SIMEQD	ガウスジョルダン法*	" SSL	
SWEEPS	SWEEP D	ガウスジョルダン法*	"	
CHOLFS	CHOLFD	コレスキー法	名大.ニ宮市三	正値対称行列
CHOLCS	CHOLCD	コレスキー法	"	圧縮型正値対称行列
CHOLSK	CHOLSD	コレスキー法	"	正値対称行列
LSX	DLSX	改訂コレスキー法	富士通. SSLII	圧縮型正値対称行列
LSIX	DLSIX	ブロック対角表示法	"	圧縮型対称行列
CHOLES	CHOLED	改訂コレスキー法	" SSL	正値対称行列
CHLSKS	CHLSKD	改訂コレスキー法	"	圧縮型正値対称行列
¥SLF1M	¥DLF1M	ガウスの消去法	日立. MSLII	
LINS2	DLINS2	ガウスの消去法	" MSL	
LINLU	DLINLU	LU分解法	"	分解成分の再利用可
LINSN3	DLNSN3	ガウスジョルダン法*	"	
¥SLF2M	¥DLF2M	改訂コレスキー法	" MSLII	圧縮型正値対称行列
¥SLF4M	¥DLF4M	コレスキー法	"	正値対称行列
LINLD	DLINLD	改訂コレスキー法	" MSL	正値対称行列
LINLL	DLINLL	コレスキー法	"	圧縮型正値対称行列
SBELIM	WBELIM	ガウスの消去法 *	日電. MATHUB 6	
SWEEPS	SWEEP D	ガウスの消去法	阪大. 林 正	
INVERS	INVERD	ガウスの消去法		逆行列用
SBCHOL	WBCHOL	改訂コレスキー法	日電. MATHUB 6	正値対称行列

注) \*印は完全軸選択を行う

ような問題である。

### 3.2 テストしたサブルーチン

テストしたサブルーチンの概要一覧を表5に示す。直接解法のみ注目し、反復解法によるものは除外した。サブルーチンは、いずれも各計算機センターに登録され、一般利用者に広く使用されているものばかりである。

富士通社、日立社の数学的ソフトウェア・パッケージには、各々2種類が用意されている。富士通のそれは、SSL, SSLII, 日立はMSL, MSLIIと呼ばれる。SSLIIとMSLIIは各々最新システムM200, M200Hの機能を充分生かすよう改良されたもので、パッケージ全体が体系化されるなど、ソフトウェアの総合的評価も高いものといえる。ここでは、それらのことには触れず、サブルーチンの実行速度と解の精度のみに注目して評価を行う。

### 3.3 連立一次方程式求解におけるCPUの速度比

3種のシステムについて、数値計算におけるCPUの速度比の目安を得るために次のような実験を行った。

(a) FORTRAN言語で書かれたサブルーチンLEQLUS/Dを3システムの下で翻訳、実行したときの、求解部分の実行時間を測定する。

(b) サブルーチンLEQLUS/Dをテストするプログラム全



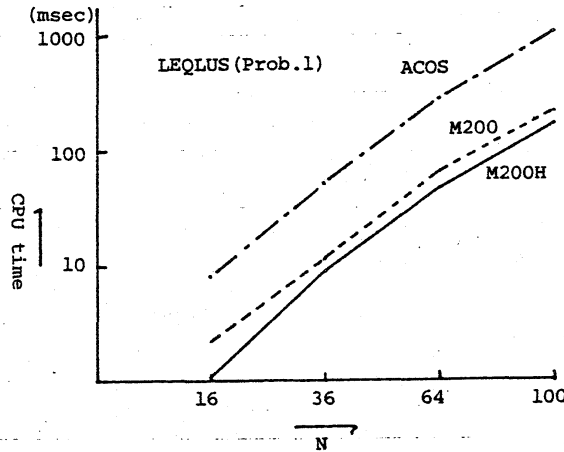


Fig.5 CPU time versus matrix size by three systems

体(コンプリートプログラムの)のロード・モジュールをM200の下で作成し、M200とM200Hで実行したときの、求解部分の実行時間を測定する。

テスト問題は3.1で述べた12ケースで行った。図5

にLEQLUSの問題1の実測値を図示する。ACOS(鎖線)は(a)の結果で、M200(破線)、M200H(実線)は(b)の結果である。3種の行列について、 $N=64$ と $100$ の場合の測定値の平均をとることによって、CPUの速度比 $M200 : M200H : ACOS900 = 1 : 1.25 : 0.21$ を得た。ここでの実験結果の一部は表6-1、6-2の中にも添えた。

### 3.4 測定結果

次元数 $N$ が $100$ の場合の測定結果を表6-1、6-2に示す。対称もしくは正値対称行列専用サブルーチンについては、問題は不適当なので、その欄は空白とした。\*印は未測定を意味する。アセンブリ言語で書かれたLEQLUS/D, GAUELS/D, CHCLFS/Dについては、M200Hによる測定値も添える。Hard wareの欄で、M200H IAPとあるのは、コンパイラ・オプション

表6-1 連立一次方程式解法サブルーチンの実行時間と精度

Single Precision				CPU time(msec)			error		
Subroutine	Language	Hardware	processor	prob.1	prob.2	prob.3	prob.1	prob.2	prob.3
1	LEQLUS	FT-HE	M200	203	208	216	2.3E-02	1.9E-06	1.2E+00
2	LEQLUS	ASM	"	195	197	207	2.8E-05	3.0E-07	1.8E-03
3	GAUELS	ASM	"	195	196	206	2.8E-05	3.0E-07	1.8E-03
4	LAX	FT-HE	"	254	259	266	3.8E-03	1.9E-06	7.5E-02
5	SIMEQS	FT-HE	"	557	277	554	1.6E-03	7.3E-05	4.2E-03
6	SWEEPS	FT-HE	"	539	271	541	7.9E-04	7.6E-06	5.5E-02
7	CHOLFS	ASM	"	93	93		3.6E-04	1.1E-06	
8	CHOLCS	ASM	"	92	93		3.6E-04	1.1E-06	
9	CHOLSK	ASM	"	95	99		3.6E-04	1.1E-06	
10	LSX	FT-HE	"	124	127		3.1E-04	3.0E-07	
11	LSIX	FT-HE	"	145	148		1.1E-03	3.0E-06	
12	CHOLCS	FT-HE	"	193	189		5.5E-04	4.8E-07	
13	CHLSKS	FT-HE	"	201	196		5.2E-04	2.6E-06	
14	\$SLF1M	FT-77	M200H	213	227	214	3.1E-03	1.3E-06	2.3E-01
15	LINS2	FT-77	"	277	42	275	3.8E-03	1.2E-05	9.7E-03
16	LINLU	FT-77	"	340	352	341	0.0	2.6E-06	9.8E-03
17	LINSN3	FT-77	"	648	668	*	2.4E-03	7.5E-06	*
18	LEQLUS	FT-77	"	191	203	191	2.3E-02	1.9E-06	1.2E+00
19	LEQLUS	ASM	"	160	174	162	2.8E-05	3.0E-07	1.8E-03
20	GAUELS	ASM	"	159	159	162	2.8E-05	3.0E-07	1.8E-03
21	\$SLF2M	FT-77	"	134	150		5.3E-04	2.4E-06	
22	\$SLF4M	FT-77	"	139	151		5.0E-04	2.2E-06	
23	LINLD	FT-77	"	93	100		5.3E-04	2.4E-06	
24	LINLL	FT-77	"	92	101		5.0E-04	2.2E-06	
25	CHOLFS	ASM	"	84	84		3.6E-04	1.1E-06	
26	\$SLF1M	FT-77	M200H IAP	49	49	50	2.5E-03	1.5E-06	4.8E-02
27	LINS2	FT-77	"	52	17	53	2.8E-03	1.3E-05	3.4E-02
28	LINLU	FT-77	"	343	350	335	0.0	2.6E-06	9.8E-03
29	LINSN3	FT-77	"	406	408	*	5.7E-04	8.7E-06	*
30	LEQLUS	FT-77	"	82	81	81	7.1E-03	9.5E-07	6.9E-02
31	\$SLF2M	FT-77	"	78	80		5.3E-04	3.0E-06	
32	\$SLF4M	FT-77	"	79	79		5.3E-04	2.4E-06	
33	LINLD	FT-77	"	93	102		5.3E-04	3.0E-06	
34	LINLL	FT-77	"	92	96		5.3E-04	2.4E-06	
35	SBELIM	FORTTRAN	ACOS900	4038	3990	4103	1.5E-05	2.4E-07	5.4E-05
36	LEQLUS	FORTTRAN	"	1005	1003	1000	3.7E-03	1.3E-07	1.3E+00
37	SWEEPS	FORTTRAN	"	162	174	1034	2.8E-03	1.0E-06	1.7E-02
38	INVERS	FORTTRAN	"	1617	1095	2954	7.9E-04	1.8E-06	3.4E-02
39	SBCHOL	FORTTRAN	"	1222	1243		2.2E-03	1.2E-07	

ョンでIAPを指定したことを示す。

### 3.5 結果の評価

結果の評価に入る前に、連立一次方程式の解法の名称が必ずしも厳格に区別されていないということにふれておかなければならない。ガウス・ジョルダンの消去法の別名である掃き出し法が、単に消去法の意味に使われたり、ガウスの消去法と

表6-2 連立一次方程式'解法'サブルーチンの実行時間と精度

Double Precision				CPU time(msec)			error		
Subroutine	Language	Hardware	Processor	prob.1	prob.2	prob.3	prob.1	prob.2	prob.3
1	LEQLUD	FT-HE	M200	270	265	282	4.8D-12	4.4D-16	8.3D-08
2	LEQLUD	ASM	"	228	222	240	7.8D-13	2.8D-16	3.8D-11
3	GAUELD	ASM	"	221	212	232	8.1D-13	2.6D-16	3.9D-11
4	DLAX	FT-HE	"	452	458	510	9.1D-13	2.2D-16	9.5D-11
5	SIMEQD	FT-HE	"	708	349	704	4.9D-13	1.7D-15	3.2D-13
6	SWEEP	FT-HE	"	689	327	691	1.9D-13	1.8D-15	8.0D-11
7	CHOLFD	ASM	"	109	106		5.4D-12	4.4D-16	
8	CHOLCD	ASM	"	110	106		5.4D-12	4.4D-16	
9	CHOLSD	ASM	"	117	111		1.6D-12	5.0D-16	
10	DLSX	FT-HE	"	249	234		5.2D-13	2.5D-16	
11	DLSIX	FT-HE	"	265	249		1.5D-12	8.5D-16	
12	CHOLED	FT-HE	"	137	134		5.6D-12	6.7D-16	
13	CHLSKD	FT-HE	"	155	151		5.4D-12	6.4D-16	
14	\$DLF1M	FT-77	M200H	232	248	234	8.1D-13	2.8D-16	3.9D-11
15	DLINS2	FT-77	"	315	45	311	7.2D-13	3.0D-15	1.8D-11
16	DLINLU	FT-77	"	427	431	416	0.0	8.1D-16	1.8D-11
17	DLNSN3	FT-77	"	686	687	*	5.6D-13	1.8D-15	*
18	LEQLUD	FT-77	"	208	222	210	4.8D-12	4.4D-16	8.3D-08
19	LEQLUD	ASM	"	180	194	182	7.8D-13	2.8D-16	3.8D-11
20	GAUELD	ASM	"	173	176	179	8.1D-13	2.6D-16	3.9D-11
21	\$DLF2M	FT-77	"	105	113		7.9D-12	6.1D-16	
22	\$DLF4M	FT-77	"	103	110		6.9D-12	6.1D-16	
23	DLINLD	FT-77	"	106	113		5.6D-12	6.1D-16	
24	DLINLL	FT-77	"	104	109		6.9E-12	6.1D-16	
25	CHOLED	ASM	"	92	94		5.4D-12	4.4D-16	
26	\$DLF1M	FT-77	M200H IAP	68	69	68	8.1D-13	2.8D-16	3.9D-11
27	DLINS2	FT-77	"	78	21	77	7.2D-13	3.0D-15	1.8D-11
28	DLINLU	FT-77	"	424	431	414	0.0	8.1D-16	1.8D-12
29	DLNSN3	FT-77	"	441	441	*	5.6D-13	1.8D-15	*
30	LEQLUD	FT-77	"	93	91	93	4.8D-12	4.4D-16	8.3D-08
31	\$DLF2M	FT-77	"	37	37		7.9D-12	6.1D-16	
32	\$DLF4M	FT-77	"	37	36		6.9D-12	6.1D-16	
33	DLINLD	FT-77	"	41	39		5.6D-12	6.1D-16	
34	DLINLL	FT-77	"	38	38		6.9D-12	6.1D-16	
35	WBELIM	FORTTRAN	ACOS900	3782	3709	3862	1.3D-15	1.2D-17	2.2D-14
36	LEQLUD	FORTTRAN	"	1363	1362	1359	3.9D-14	1.1D-18	1.1D-09
37	SWEEP	FORTTRAN	"	203	215	1409	4.6D-15	1.4D-19	4.8D-14
38	INVERD	FORTTRAN	"	2303	1571	4038	7.1D-16	2.5D-18	5.9D-14
39	WBCHOL	FORTTRAN	"	1386	1412		4.2D-14	1.7D-18	

LU 分解法とが混同されたりする例がある。今回の調査の対象となった多くのサブルーチンで用いられている解法の名称は各々のサブルーチンの説明書の記述を信用したものであって、サブルーチンの中味を調べて確認したものでないことを予めお断りしておく。

さて、表6-1, 6-2を眺めて目につくいくつかの要点を列

記して見よう。

(a) 完全軸選択を行っているサブルーチン SIMEQS/D, SWEEPS/D (SSL), (D) LINSN3, (W) SBELIM (この中の前三者は掃き出し法、最後の者はガウスの消去法を採用している) は、非常に遅い。その原因の一端は掃き出し法にあるが、その大半は完全軸選択にある。完全軸選択は時間がかかるけれども精度の点では優れているといわれるが、今度の実験の範囲ではそれ程のこともないし、又記憶容量さえ許せば、桁数を増すことによって精度の困難は容易に克服できるので、その有用性はかなり疑わしい。少くとも、掃き出し法と共に常用に価する方法ではない。

(b) 精度の点で最悪の結果は、問題3における LEQLUS/D FORTRAN版(左の番号1, 18, 30, 36)である。アセンブラ版(左の番号2, 19)が他のものに比べて同程度の精度を出しているのに、なぜであろうか。このサブルーチンは筆者の作品なので、少し長くなるが、説明することにする。その秘密は、LU分解法のみならず、線形計算一般において最も重要な積和計算のコーディングの仕方にある。結論を言うと、積和の初期値を零にとるかあるいは、積和を最後に加える(あるいは引く)べき値にとるかの差である。問題3は表4の条件数から解るように、7桁程度の有効桁の損失が予想される

たちの悪い問題である。このような問題では、0から出発して積和を作ると、積和自体の精度はその方が良いが、その結果を最後に加えたり引いたりするとき大きな桁落ちが一気に発生する。ところが積和の初期値をその積和を最終的に加えるべき値にとれば、桁落ちは少しづつ進行する。M200やM200Hのアキュムレータには保護桁 (Guard Digit) というものが4ビットあって、これがその範囲内の小さな桁落ちを喰い止めている。したがって小さな桁落ちなら、少々づいでも損害は軽微ですむが、大きな桁落ちはそのまま精度の損失につながるといわけである。実はこの知見は、今回の実験結果の評価の過程で初めて得られたもので、数値計算というものの奥の深さを改めて痛感した次第である。LEQLUSのFORTRAN版では、更に悪いことに、積和の計算に単精度計算を使った。これが、LEQLUSのFORTRAN版が非常に精度が悪い原因である。

(C) CHOLDS/D, CHLSKS/D,  $\$ \{D\} LF2M$ ,  $\$ \{D\} LF4M$  などの速度の結果は異常である (12, 13, 21, 22, 31, 32)。単精度のものが倍精度のものより明らかに遅い。この原因はソースリストを見て判明した。単精度版は積和計算を精度よく行うために、例えば  $S = DBLE(A(I)) * DBLE(B(I)) + S$  というようなことをしている。結局この部分は倍精度版と同じ

だけ時間がかかる上に、単精度から倍精度への変換時間が上のせされるというわけである。

ともかく、積和計算を精度よく行うことは線形計算のサブルーチンでは最も重んずべき要点である。しかしだからといって倍精度の積和計算に4倍精度を導入する必要があるであろうか。DLAX, DLSX, DLSIX(4, 10, 11)がそれの例であるが、他のもの比べてかなり遅いのが目につく。

(d) ガウスの消去法で極端に速い結果が出ている例がある。(D) LINS2(16, 27), SWEEPS/D(37)がそれである。この原因は問題1と2の特殊性にある。問題2は始めから零係数が多く、問題1は解法によっては消去の過程で新しく零係数が多く発生する。ガウスの消去法にはこのような零係数に対して、一行分又は一列分の消去演算を省略する機能が入れられる。即ち、ゼロスキップがその原因である。このようなことは実際にはそんなに頻繁には現れないので、ガウスの消去法の優劣性よりは、むしろ、問題の選択の不適切を結論すべきである。積和計算を精度よく行う手段のあるLU分解法に比べて、ガウスの消去法はやはり影が薄いと見るべきであろうか。

(e) アレイプロセッサ(IAP)の威力が目ざましい。ここでも仔細に見るとIAPの全く効かないもの(28, 29, 33, 34)

や、単精度と倍精度の速度の逆転(31, 32, 33, 34)が見られる。IAPが働く一番内部のループで、混合演算や、精度変換があるのが原因と思われる。ともかく、IAPがまともに働いた時の効果は絶大で、3~4倍の速度向上がみられる。今後の大型計算の進むべき道を示唆するものといえる。

#### 4. おわりに

ここに述べたような調査は以前にも行ったことではあるが調査のたびに、その評価過程で新しい知見が得られた。今後も、基本関数、連立一次方程式関係ばかりでなく、他の数学的ソフトウェア、例えば、固有値問題、数値微分・積分などについても性能調査を行い、より良い数学ソフトウェアの整備、開発に努めたいと考える。又、本報告が、各計算機センターにおける、プログラム・ライブラリーの開発、整備の上で、活用されれば幸いである。

測定には、大阪大学の犬中助手、東京大学の唐木助手、北海道大学の天野助手、分子科学研究所の西本技官に協力して頂き、感謝する。

#### 参考文献

- 1) J. R. Rice: "Mathematical Software," Academic Press, Inc. (1971).
- 2) 全国共同利用大型計算機センター運用会議、プログラム

- ライブラリー研究会資料、第15回(1973)、第16回(1974)、第17回(1974)
- 3) 二宮市三: "Mathematical Software", 東京大学大型計算機センターニュース Vol. 7, No. 1, P.31 (1975)
  - 4) 二宮市三, "基本外部関数および、SSLの改良" 名古屋大学大型計算機センターニュース, Vol. 3, No. 4, P.289 (1972)
  - 5) 二宮市三, 桑野舜世, 中川雅俊, "SSLプログラムの精度及び速度調査" 名古屋大学大型計算機センターニュース, Vol. 6, No. 4, P.299 (1975)
  - 6) "ライブラリー利用の手引", 名古屋大学大型計算機センター (1978)
  - 7) "センター・ライブラリー利用の手引", 大阪大学大型計算機センター (1980)
  - 8) 日本電気: "MATHLIB-6 マニュアル"
  - 9) 日立: "プログラムプロダクト VOS 2 / VOS 3 数値計算副プログラムライブラリー MSL II 機能編 行列計算" (1979)
  - 10) 日立: "HITAC VOS 1 / VOS 2 / VOS 3 / 数値計算副プログラムライブラリー MSL 機能編 線形計算" (1979)
  - 11) 富士通: "FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書" (1979)



- 12) 富士通: "FACOM FORTRAN SSL 使用手引書" (1971)
- 13) 春海佳三郎, 渡辺成良, 室伏誠: "中大型機の基本外部関数の誤差", 数理解析研究所講義録 (1979)