数理解析研究所講究録
第422巻 1981年 140-157

√2倍的に標本数を増す関数入力のFFT

名古屋大学工学部　鳥居　達生
長谷川　武光

1．まえがき

滑らかな周期関数を高速フーリエ変換法（FFT）により離散型フーリエ級数に展開するとき，標本数は2のべきあるいは3のべきで増大することになる。データ入力の場合，その項数は一定であるから収束判定の必要はなく，変換の効率は演算回数だけで測ってよいが，関数入力の場合は，関数を標本化する手間を考えなければならない。したがって許される誤差限界 ε に対し，標本数 $N(\varepsilon)$ はなるべく小さい方がよい。そのためには標本数を2のべきよりゆるく増大させればよいが，これには従来のFFTでは不可能である.

そこでFFTの特長である高速性を生かしつつ，標本数をゆるく増大させることが，問題となる。この際，収束性，安定性の悪化は避け難いが，その程度を評価する必要がある。われわれは，ここで些小の犠牲を払っても，標本数に関する

拘束（２のべきで増大すること）を取除きたい。

以上の観点から，われわれは標本数を√2倍的に増す三角級数展開法を示す。ここで標本数の増大率が√2というのは幾何平均的な意味であって，一例を示すならば

2，3，4，6，8，12，16，24，32，…

である。この数列は，古典的Romberg積分法において標本数の節約のためBulirsch－Stoer［1］が始めて用いたものである。

入力の周期関数が，複素数値の場合に限って述べる。実数値関数とくに偶関数，奇関数のcosine，sine 級数展開，さらに非周期関数のチェビシェフ級数展開にも応用できる。

本方法は，関数の能率的な自動フーリエ級数展開と特長づけることができよう。

２．順変換

周期２π の複素数値関数 X(t) の２N項の離散型フーリエ級数展開は

$$X(t) \sim \sum_{0 \le k < 2N} C_k^{2N} e^{ikt}$$

$$C_k^{2N} = \frac{1}{2N} \sum_{0 \le j < 2N} X_j e^{-\frac{\pi i}{N} kj} \qquad (1a)$$

$$X_j = X\left(\frac{\pi}{N}j\right), \qquad 0 \le j < 2N \qquad (1b)$$

と表わされる。

商単のため，$z = e^{it}$ と変数変換し，$f(z) = X(t)$ とおく。$f(z)$ を任意の多項式とすれば，(1a) の右辺は，$z^{2N}-1$ の零点上における $f(z)$ の補間式であって

$$\sum_{0\le k<2N} C_k^{2N} z^k = f(z), \quad \mathrm{mod}\ z^{2N}-1 \qquad (2)$$

が成立する。

次に N 個の標本

$$X_{j+\frac{1}{4}} = X\left(\frac{2\pi}{N}\left(j+\frac{1}{4}\right)\right), \qquad 0 \le j < N$$

を追加し，その離散型フーリエ係数

$$A_{k,1/4}^N = \frac{1}{N}\sum_{0\le j<N} X_{j+\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{2\pi i}{N}k\left(j+\frac{1}{4}\right)} \qquad (3a)$$

を求める。いうまでもなく，これは $z^N - i$ における $f(z)$ の補間係数であって，補間式は

$$\sum_{0\le k<N} A_{k,1/4}^N z^k = f(z), \quad \mathrm{mod}\ z^N - i \qquad (3b)$$

と表わされる。

そこで多項式 (2)，(3b) を用いて

$$f(z), \quad \mathrm{mod} \quad (z^{2N}-1)(z^N-i) \qquad (4)$$

を陽に表現することを考えよう。換言すれば，ある未知の多項式を $z^{2N}-1$ と z^N-i で割ったときの余りを知って，両者の積で割ったときの余りを求める問題である。これは初等整数論における1次不定方程式の問題と本質的に同じといってよい。

そこで1をつくる恒等式

$$\frac{1}{2}\{(z^N-i)(z^N+i)-(z^{2N}-1)\} = 1$$

において，両辺に $f(z)$ をかけ，$(z^{2N}-1)(z^N-i)$ を法として合同をとれば

$$f(z) = \frac{1}{2}(z^{2N}+1)(\text{多項式}(2)) - \frac{1}{2}(z^{2N}-1)$$

$$\cdot(\text{多項式}(3b)), \quad \mathrm{mod} \quad (z^{2N}-1)(z^N-i)$$

となるが，右辺を

$$\equiv \sum_{0\leq k<3N} \tilde{C}_k^{3N} z^k \qquad (5a)$$

とおけば，この各係数は，離散型フーリエ係数を用いて，次のように表わされる。

$$\tilde{C}_k^{3N} = \frac{1}{2}\{ A_{k,1/4}^N + C_k^{2N} - i\, C_{N+k}^{2N} \}$$

$$\tilde{C}_{N+k}^{3N} = C_{N+k}^{2N}$$

$$\tilde{C}_{2N+k}^{3N} = \frac{1}{2}\{ -A_{k,1/4}^N + C_k^{2N} + i\, C_{N+k}^{2N} \}$$

$$0 \le k < N \quad , \qquad (5b).$$

3N項の補間係数は離散型フーリエ係数ではないことを意識して $\tilde{C}_k^{3N}$ とした。

以上で，2N項のフーリエ級数において，新たにN個の標本を追加し，3N項の補間式（級数）を作ったことになる。

級数の項数が，3Nから4Nへの移行はさらに簡単である。追加すべきN個の標本は

$$X_{j+\frac{3}{4}} = X\left(\frac{2\pi}{N}(j+\frac{3}{4})\right) \quad , \; 0 \le j < N$$

である。この離散型フーリエ係数は

$$A_{k,3/4}^N = \frac{1}{N} \sum_{0 \le j < N} X_{j+\frac{3}{4}}\, e^{-\frac{2\pi i}{N}k(j+\frac{3}{4})} \qquad (6a)$$

となり

$$f(z) = \sum_{0 \le k < N} A_{k,3/4}^N z^k, \quad \mathrm{mod}\,(z^N + i) \quad (6b)$$

が成り立つ。

円周等分割の二つの多項式 $z^N - i$, $z^N + i$ を法として $f(z)$ と合同となるそれぞれの多項式から，積 $z^{2N}+1$ に関して合同となる多項式は

$$\frac{1}{2i}(z^N+i)(\text{多項式 (3b)}) - \frac{1}{2i}(z^N-i)(\text{多項式 (6b)})$$

として作られる。ここで，恒等式

$$\frac{1}{2i}\{(z^N+i) - (z^N-i)\} = 1$$

が使われていることに注意しておこう。

したがって

$$f(z) = \sum_{0 \le k < 2N} B_k^{2N} z^k \quad , \qquad \mathrm{mod}\ z^{2N}+1 \qquad (7a)$$

とおけば，各係数は既知のフーリエ係数を用いて

$$B_k^{2N} = \frac{1}{2}\{A_{k,1/4}^N + A_{k,3/4}^N\}$$

$$B_{N+k}^{2N} = \frac{i}{2}\{A_{k,3/4}^N - A_{k,1/4}^N\} \qquad (7b)$$

$$0 \le k < N$$

と表わされる。これは，いうまでもなく中点公式に基づく $2N$ 項の離散型フーリエ変換である．

同じ項数の台形公式と中点公式による変換 $\{C_k^{2N}\}$, $\{B_k^{2N}\}$ より，周知の合成

$$C_k^{4N} = \frac{1}{2}\{C_k^{2N} + B_k^{2N}\}$$

$$C_{2N+k}^{4N} = \frac{1}{2}\{C_k^{2N} - B_k^{2N}\} \qquad (8)$$

$$0 \le k < 2N$$

によって2倍の項数の台形公式による変換が得られる。

もちろん，ここでは上述の経過に即していえば，恒等式

$$\frac{1}{2}(z^{2N}+1) - \frac{1}{2}(z^{2N}-1) = 1$$

が，基礎となっていることになる。

以上で3N項から4N項への移行が完了したことになる。2Nを改めてNとおき，同様な操作を繰返せば，近倍的に項数が増大する補間式の列が得られる。

例えばNの初期値を2とすれば，係数の列

$$\{C_k^2\},\ \{\tilde{C}_k^3\},\ \{C_k^4\},\ \{\tilde{C}_k^6\},\ \{C_k^8\},\ \cdots$$

が生成される。ただし項数を上つき添字で表わした。

例1．$f(z)$が，高々3N項の多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{3N-1} z^{3N-1}$$

のとき，3N項の変換（5b）は恒等変換となる。

証明．離散型フーリエ係数と本来のフーリエ係数の関係か

ら

$$C_k^{2N} = a_k + a_{2N+k}$$

$$C_{N+k}^{2N} = a_{N+k}$$

$$A_{k,1/4}^{N} = a_k + i\,a_{N+k} - a_{2N+k}$$

$$0 \le k < N$$

となる。これを(5b)の右辺に代入すれば

$$\widetilde{C}_k^{3N} = a_k \qquad 0 \le k < 3N$$

が成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

3．誤差評価

周期関数 $X(t)$ のフーリエ級数の収束の速さは，$X(t)$ の滑らかさに支配される。$X(t)$ を $z=e^{it}$ により複素平面上の関数と考え，それを解析接続した $f(z)$ は単位円板上で解析的とする．

さて，$f(z)$ のべき級数展開を

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{9}$$

とおく。展開係数 a_k は，番号 k とともに指数関数的 $O(r^k)$，$0<r<1$ に減少するとしてよい。

いま，便宜上 4N 項の離散型フーリエ変換（台形公式）を $\{C_k^{4N}\}$ とすれば

$$C_k^{4N} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} a_{4mN+k} \qquad (10)$$

$$0 \le k < 4N$$

が成り立つことは，よく知られている。問題は 3N 項補間式の係数 $\tilde{C}_k^{3N}$ の誤差評価である。そこで 4N 項の離散型フーリエ級数を

$$\sum_{0 \le k < 4N} C_k^{4N} z^k \quad , \qquad \mathrm{mod}\ (z^{2N}-1)(z^N-i) \quad (11a)$$

により 3N 項に縮める．こうして 3N 項の補間係数 $\tilde{C}_k^{3N}$ は，4N 項の離散型フーリエ係数を用いて表わすことができる。

$$\tilde{C}_k^{3N} = C_k^{4N} - i\, C_{3N+k}^{4N}$$

$$\tilde{C}_{N+k}^{3N} = C_{N+k}^{4N} + C_{3N+k}^{4N} \qquad (11b)$$

$$\tilde{C}_{2N+k}^{3N} = C_{2N+k}^{4N} + i\, C_{3N+k}^{4N}$$

$$0 \le k < N$$

必要ならば，右辺は (10) より $\{a_k\}$ を用いて表現できる。
3N 項の補間式の単位円周上における打切り誤差は，(10)，(11b) より

$$\left| f(z) - \sum_{0\le k<3N} \tilde{C}_k^{3N} z^k \right| \simeq 4 \sum_{k=3N}^{\infty} |a_k| + O(a_{4N}) \quad (12)$$

で評価できる。これは，選点直交性を用いた通常の3N項の離散型フーリエ級数の誤差

$$2 \sum_{k=3N}^{\infty} |a_k|$$

と比べて約2倍にすぎない。4N項の離散型フーリエ級数の誤差評価

$$\left| f(z) - \sum_{0\le k<4N} C_k^{4N} \right| \le 2 \sum_{k\ge 4N} |a_k| \qquad (13)$$

はよく知られた事実である。

標本数が十分大なるとき

$$C_k^{4N} \simeq a_k = O(r^k)$$

であるから，補間係数より $f(z)$ の収束半径 r を推定できる。標本数を増しながら級数の収束判定をするためには，(12)，(13)の誤差評価をしなければならない。

まず簡単な2N項変換から述べる。$f(z)$ の収束半径 r は，$\{a_k\}$ の漸近的減少率によって推定できる。

この場合，係数列の偶然性になるべく影響されないように2N個の係数列 $\{C_k^{2N}\}$ の末尾の方の平均的減少率をもって

収束半径を求める。すなわち

$$r = \left\{ \frac{|C_{2N-2}^{2N}| + |C_{2N-3}^{2N}|}{|C_{3N/2-2}^{2N}| + |C_{3N/2-1}^{2N}|} \right\}^{\frac{2}{N}} \qquad (14)$$

Nが十分大きければ，(10)，(13)（正確にいえば(10)の4Nを2Nに置き換えた式）より2N項級数の誤差は

$$E_{2N} = (|C_{2N-2}^{2N}| + |C_{2N-1}^{2N}|)\, r/(1-r) \qquad (15)$$

で評価できる．rはNに依存するが省略した。

3N項級数の誤差評価も同様な考え方に基づき行うことができる。ただし$f(z)$の収束半径は，前段階（(15)式）で求めたrをそのまま用いる。

この場合の打切り誤差は，(10)，(11b)，(13)より

$$\tilde{E}_{3N} = 2\,(|\tilde{C}_{3N-2}^{3N}| + |\tilde{C}_{3N-1}^{3N}|)\, r/(1-r) \qquad (16)$$

で評価できる。選点直交性が利用できる場合の式(15)に比べ，係数2があるところが異なる点である。

入力の関数 $X(t) = f(z)$ の性質に依存して誤差評価の方法も異なるのは当然であるが，ここに級数展開を自動化するときの難しさがある。

4．安定性

標本数の増大とともに，補間法のノルムがどのような速さで増大するかをみよう．選点直交性が成立しない3N項の補間法のノルムの評価が，われわれの主な関心事であるが，後の都合上，直交性が利用できるN項の場合の結果を先にあげる．

N項の離散型フーリエ変換のルベック関数

$$\lambda_N(t) = \sum_{0\le j<N} \left| \frac{\omega_N(z)}{(z-z_j)\,\omega_N'(z_j)} \right| \qquad (17)$$

$$z = e^{it}, \quad \omega_N(z) = z^N - 1$$
$$z_j = e^{it_j}, \quad t_j = \frac{2\pi}{N} j$$

は，次の性質をもつ。

$\lambda_N(t)$ は周期 $2\pi/N$ をもつ偶関数であって，その最大値 Λ_N（ルベック定数）は，各標本点の中点で達成され，

$$\Lambda_N = \max_t \lambda_N(t) = \lambda_N(\pi/N)$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{0\le j<N} 1 \Big/ \sin\frac{\pi}{N}\left(j+\frac{1}{2}\right) \qquad (18)$$

と表わされる。これは $1/\sin\theta$ に対する $(0,\pi)$ における中点公式による積分値とみることもできる。

被積分関数が下に凸のとき，中点公式による和は，真の積分値より小さいので

$$\Lambda_N < 2/(N\sin\frac{\pi}{2N}) + \frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\pi}{2N}$$

$$\simeq \frac{2}{\pi}(1.548\cdots + \log N) \qquad (19)$$

を得る。これがN項離散型フーリエ変換のノルムの評価である。因みに，これよりやや複雑なN項の離散型チェビシェフ級数展開のノルムは

$$1 + \frac{2}{\pi}\log N$$

である．たとえば文献[2]をみよ。

さて，以上のことを前提として，3N項補間のルベック関数

$$\tilde{\lambda}_{3N}(t) = \sum_{0\le j<3N} \left| \frac{\omega_{3N}(z)}{(z-z_j)\,\omega'_{3N}(z_j)} \right|$$

$$\omega_{3N}(z) = (z^{2N}-1)(z^N-i) \qquad (20)$$

z_j ; $\omega_{3N}(z)$ の零点

は周期 $2\pi/N$ をもつ。最大値 $\tilde{\Lambda}_{3N}$ は，$t=3\pi/2N$ で達成され

$$\tilde{\Lambda}_{3N} = \max_t \tilde{\lambda}_{3N}(t) = \tilde{\lambda}_{3N}(3\pi/2N)$$

$$= \sqrt{2}\,\Lambda_{2N} + \Lambda_N \qquad (21)$$

が成り立つ。

Λ_N の漸近表示 (19) を用いれば，$\tilde{\Lambda}_{3N}$ ＝ 定数＋ $(1+\sqrt{2})\frac{2}{\pi}\log N$ となり，3N 項の離散型フーリエ変換のノルム Λ_{3N} に比べ，われわれの方法のノルムは約 $(1+\sqrt{2})$ 倍わるくなる。

表1に，離散型フーリエ変換のノルムとその漸近的評価を示す。

これより Λ_N の上からの評価式 (19) は，精密であることがわかる。

表2において，われわれの方法と離散型フーリエ変換のノルムを比較した。前者の安定性は後者に比べ，高々 2．3 倍わるくなっている。

5．計算法

まとめとして，関数の逐次近似のための計算法を示す。関数 $X(t)$ と許される誤差限界 $\varepsilon>0$ を与えて，次の順序で計算する。便宜上 $f(z)=X(t)$ とおく。

1） 初期値の設定

4項の離散型フーリエ変換を出発値とし，$l=1$ $(N=2^l=2)$ とおく。

2） 2N 項変換の誤差評価

係数列 $\{C_k^{2N}\}$ の減少率（$f(z)$ の収束半径 r）を (14)

表1. ノルム(18)とその評価(19)

N	Λ_N	(19)式
2	1.4142	1.4142
4	1.8478	1.8677
8	2.2870	2.3095
16	2.7278	2.7580
32	3.1689	3.1921
64	3.6102	3.6334
128	4.0514	4.0747
256	4.4926	4.5159
512	4.9338	4.9572
1024	5.3751	5.3985
2048	5.8147	5.8397
4096	6.2559	6.2810
8192	6.6971	6.7223
16384	7.1384	7.1636
32768	7.5533	7.6048

表2. 本方法のノルム $\tilde{\Lambda}_{3N}$ と Λ_{3N} の比較

3N	$\tilde{\Lambda}_{3N}$	Λ_{3N}	$\tilde{\Lambda}_{3N}/\Lambda_{3N}$
6	4.0273	2.1044	1.91
12	5.0821	2.5448	2.00
24	6.1447	2.9858	2.06
48	7.2093	3.4270	2.10
96	8.2744	3.8683	2.14
192	9.3397	4.3094	2.17
384	10.4049	4.7507	2.19
768	11.4701	5.1920	2.21
1536	12.5354	5.6328	2.23
3072	13.5984	6.0727	2.24
6144	14.6619	6.5140	2.25
12288	15.7271	6.9553	2.26
24576	16.7924	7.3715	2.28
49152	17.8204	7.8114	2.28
98304	18.8593	8.2526	2.29

式から求め，（15）式により誤差を評価する。それがεより小ならば，演算を停止し$\{C_k^{2N}\}$を出力する。そうでなければ次にうつる。

3）　3N項変換の誤差評価

誤差評価と次の手順の準備のため，N項変換（3a）により$\{A_{k,1/4}^{N}\}$を求めておく。これと$\{C_k^{2N}\}$より二つの係数$\tilde{C}_{3N-1}^{3N}$，$\tilde{C}_{3N-2}^{3N}$だけ計算する。前段階で得られたrを用い，(16)により誤差評価を行なう。これがεより小ならば，$\{C_k^{2N}\}$と$\{A_{k,1/4}^{N}\}$より(11b)にしたがって$\{\tilde{C}_k^{3N}\}$を合成し出力すればよい。収束条件が満たされなければ，次に進む。

4）　2N項から4N項への移行

N項変換(6a)により$\{A_{k,3/4}^{N}\}$を求める。これと前段階で得られている$\{A_{k,1/4}^{N}\}$を(7b)にしたがって組み合わせれば，2N項変換（中点公式）$\{B_k^{2N}\}$を得る。さらに，これと$\{C_k^{2N}\}$より(8)を用いて4N項変換$\{C_k^{4N}\}$が求まる。

lを1だけ進めて手順2）に戻る。

以上で計算法の説明を終る。最後に演算回数を注意しておこう。

項数が$2N=2^{n+1}$の場合は，通常のFFTであるから複素数乗算回数は$2^n(n+1)$である。項数が$3N=3\cdot2^n$の場合

は，約 $3\cdot 2^{n-1}\cdot n+2^n$ となる。したがってFFTの高速性は保たれる。

6．逆変換

逆変換はデータ入力だから簡単である。項数が2のべきの場合は，基底2のFFTで逆変換はできるので項数を $3N=3\cdot 2^n$ とする。

いま $f(z)$ を $3N$ 項の多項式

$$f(z)=\sum_{0\leq k<3N}\tilde{C}_k^{3N}z^k \qquad (22)$$

とする。これを $2N$ 項と N 項の多項式に次の方法により縮める。

まず，$z^{2N}-1$ を法として $f(z)$ と合同をとり

$$f(z),\ \mathrm{mod}\ z^{2N}-1=\sum_{0\leq k<2N}C_k^{2N}z^k$$

とおけば

$$\begin{aligned} C_k^{2N} &= \tilde{C}_k^{3N}+\tilde{C}_{2N+k}^{3N} \\ C_{N+k}^{2N} &= \tilde{C}_{N+k}^{3N}, \qquad 0\leq k<N \end{aligned} \qquad (23)$$

が成り立つ。

次に z^N-i を法として $f(z)$ と合同をとれば

$$f(z), \quad \mathrm{mod}\ z^N - i = \sum_{0 \le k < N} A^N_{k,1/4}\, z^k$$

$$A^N_{k,1/4} = \tilde{C}^{3N}_k + i\,\tilde{C}^{3N}_{N+k} - \tilde{C}^{3N}_{2N+k}$$

が得られる．

そこで $\{C^{2N}_k\}$ および $\{A^N_{k,1/4}\}$ に対して逆変換（単なるFFTの適用）をほどこせば，それぞれ $\{X(\frac{\pi}{N}j) : 0 \le j < 2N\}$ および $\{X(\frac{2\pi}{N}(j+\frac{1}{4})) ; \ 0 \le j < N\}$ を得る。

参考文献

[1] R. Bulirsch and J. Stoer, Fehlerabschätzungen und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Typus Numer. Math. 6 (1964), 413-427.

[2] T. J. Rivlin, The Chebyshev Polynomials John Wiley & Sons, New York (1974).