数理解析研究所講究録
第423巻 1981年 275-293

射の導入による関係データモデルの表現独立性への接近と従属性への応用

富士通（株）　国際情報社会科学研究所
加藤 昭彦

1. はじめに

一般に関係データベース論では属性の全体集合，および各属性に対する定義域を固定して考える．しかし，属性に対応する定義域は必ずしも自明ではない．また，例えば定義域が {red, blue, yellow} と考えられる場合にしても，red, blue, yellow をそれぞれ 0, 1, 2 とコード化して表現することもできる．

そこで著者は関係データベースの要素である関係のデータ構造を研究するにあたり，属性の全体集合は考えず，属性集合とその各定義域は各関係の構成要素として含まれるものとした．このことにより任意の属性集合と定義域を持つ関係を考察することができる．従って2つの関係がある属性を共有していても，それに対する定義域は同じとは限らない．

その代り同じ属性集合を持つ2つの関係の間に射（代数構造における準同型写像にあたる）を導入して構造的な関連付けを行う．特に定義域の表現のみ異なる2つの関係は同型となり必要に応じて同一視される．

さらに，関係演算の射影と自然結合を関手として捕え，これらの間の関連を調べる．

その後，応用として関係をさらに抽象化した構造を考え，従属性（JD, FD）はその構造の上で考えれば十分であることを述べる．

2．関係のカテゴリー

［定義 2.1］ $X=\{X_a\}_{a\in A}$：（A を添字集合とする）集合族とするとき，集合 $\{h:A\to \bigcup_{a\in A}X_a \mid \forall a\in A\,[h(a)\in X_a]\}$ を X の直積といい，$\prod_{a\in A}X_a$，あるいは $\prod X$ とかく．∎

ここで，$h\in\prod X$ は $\langle h(a)\rangle_{a\in A}$ の形にもかかれる．

［定義 2.2］ $X=\{X_a\}_{a\in A}$，$Y=\{Y_a\}_{a\in A}$ が集合族で $f=\langle f_a:X_a\to Y_a\rangle_{a\in A}$ が写像族とする．このとき $\langle h(a)\rangle_{a\in A}\in\prod X$ に $\langle f_a(h(a))\rangle_{a\in A}$ を割り当てる写像 $\prod X\to\prod Y$ を f の直積といい $\prod_{a\in A}f_a$，あるいは $\prod f$ とかく．∎

［定義 2.3］ 関係とは3つ組 $R=\langle A, X, V\rangle$ である．こ

こで，A：<u>属性集合</u>，$X=\{X_a\}_{a\in A}$：集合族（X_a $(a\in A)$ を属性 a に対する<u>定義域</u>という），$V\subset\Pi X$：<u>実現値集合</u>．■

以下，上の定義における A, X, X_a, V $(a\in A)$ をそれぞれ αR, DR, D_aR, $\overline{R}$ とかく．

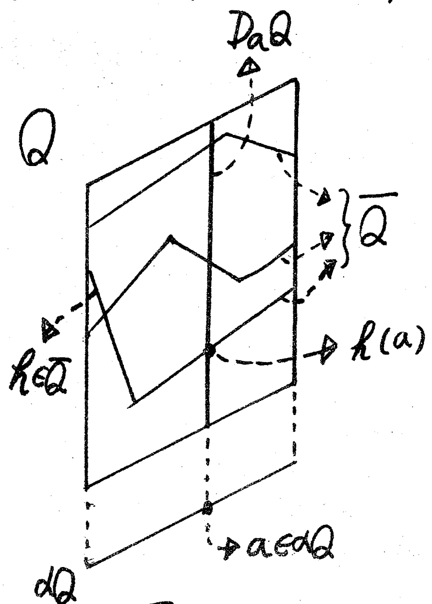
［定義 2.4］ Q, R を $\alpha Q=\alpha R=A$ なる関係とする．このとき，写像族 $f=\langle f_a : D_aQ\to D_aR\rangle_{a\in A}$ が $\Pi f(\overline{Q})\subset\overline{R}$ を満たすとき，これを Q から R への<u>(A-)射</u>といって $f:Q\to R$，あるいは $Q\xrightarrow{f}R$ とあらわす．

射 $f:Q\to R$ に対し，$\Pi f:\Pi DQ\to\Pi DR$ の $\overline{Q}\to\overline{R}$ への制限を $\bar{f}:\overline{Q}\to\overline{R}$ とかく．■

［定義 2.5］ 属性集合が A である関係を対象とし，A-射を射とするカテゴリーを $\mathcal{R}[A]$ とかく．ただし $P\xrightarrow{f}Q\xrightarrow{g}R$ に対し，合成を $g\circ f\triangleq\langle g_a\circ f_a\rangle_{a\in A}:P\to R$ と定義する．■

属性	イ	ロ	ハ
定義域	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{B}$
実現値	2	1	T
	3	0.5	F
	5	0.25	T
	8	0.125	T

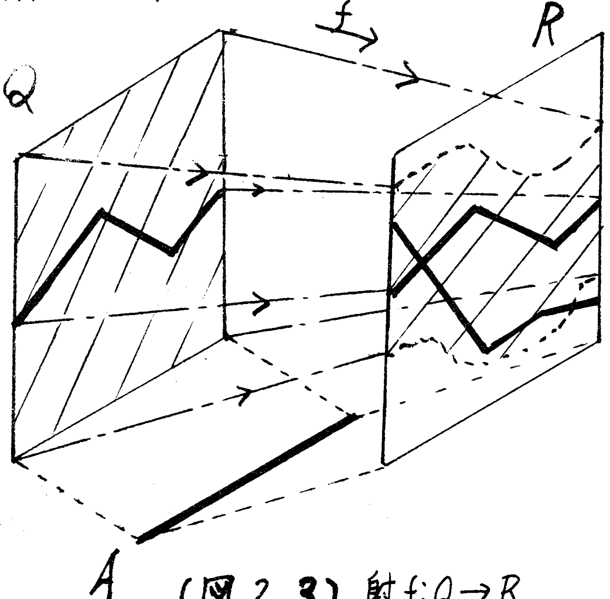
（図 2.1）



（図 2.2）

ここでは関係を

図2.1のような表（定義域明示），あるいは図2.2のような図形であらわす.



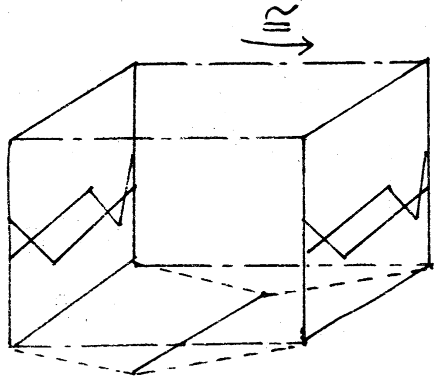
（図2.3）射$f:Q\to R$

［補題2.1］ $\mathcal{R}[A]$において$f:Q\to R$が同型射 $\Leftrightarrow$ $\forall a\in A[f_a$が全単射$]\wedge$ $\bar{f}$が全単射.■

証明は省略するが，$f^{-1}=\langle f_a^{-1}:D_aR\to D_aQ\rangle_{a\in A}:R\to Q$ であることに注意.

このことは図2.4, 2.5のように定義域の値の表現のみ置き換えた関係は同型であることを意味する.

次にこの定式化において関係演算の射影，自然結合がどうあらわされるかを述べ，それらの間の関連を調べる.



（図2.4）

a	b
{x, y}	{u, v}
x	u
x	v

≅

a	b
{0, 1}	{0, 1}
0	0
0	1

（図2.5）

3、射影・自然結合

[定義 3.1]　$B \subset A$ とする．このとき $R \in ob\,\mathcal{R}[A]$ (*) に対して B 方向への射影（属性集合の B への制限）を $R.B \triangleq \langle B, \{D_a R\}_{a \in B}, \{h \in \prod_{a \in B} D_a R \mid \exists k \in \bar{R}\,[h = k|_B]\} \rangle$ と定義する．■

この定義は関手

$$-.B : \mathcal{R}[A] \longrightarrow \mathcal{R}[B]$$

$$\begin{pmatrix} Q \\ \downarrow f \\ R \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Q.B \\ \downarrow f.B \\ R.B \end{pmatrix}$$

に拡張される．ここで，$f.B \triangleq \langle f_a : D_a Q \to D_a R \rangle_{a \in B}$ である．

一方，自然結合は次のように定義される．

[定義 3.2]　$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$, $A_i \subset A\ (i = 1, \cdots, n)$, $\cup \mathcal{A} = A$ とする．このとき直積カテゴリー $\mathcal{R}[A_1] \times \cdots \times \mathcal{R}[A_n]$ の部分カテゴリー $\mathcal{R}[A_1, \cdots, A_n]$ を次のように定義する：$\langle R_1, \cdots, R_n \rangle \in ob\,\mathcal{R}[A_1, \cdots, A_n] \Leftrightarrow \forall i, \forall j \in \{1, \cdots, n\}; \forall a \in A_i \cap A_j\,[D_a R_i = D_a R_j]$,　$\langle f^1, \cdots, f^n \rangle \in Mor\,\mathcal{R}[A_1, \cdots, A_n] \Leftrightarrow \forall i, \forall j \in \{1, \cdots, n\}; \forall a \in A_i \cap A_j\,[f^i_a = f^j_a]$．■

R

a	b	c
X	Y	Z
x_1	y_1	z_1
x_2	y_1	z_1
x_3	y_2	z_2

$\xmapsto{-.\{b,c\}}$

$R.\{b,c\}$

b	c
Y	Z
y_1	z_1
y_2	z_2

（図 3.1）

(*) カテゴリー $\mathcal{C}$ の対象全体を $ob\,\mathcal{C}$ であらわし，射全体を $Mor\,\mathcal{C}$ とかく．

〔定義 3.3〕 $\langle R_1,\cdots,R_n\rangle\in ob\,\mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n]$ の<u>自然結合</u>を $R_1*R_2*\cdots*R_n \triangleq \langle A,\{X_a\}_{a\in A},\{h\in\Pi_{a\in A}X_a \mid \forall i\in\{1,\cdots,n\}[h|A_i\in\overline{R_i}]\}\rangle$ と定義する．ここで $X_a=D_a(R_1*\cdots*R_n)\triangleq D_aR_i$ $(a\in A_i)$．$\mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n]$ の条件により任意の $a\in A$ について $D_a(R_1*\cdots*R_n)$ は一意に定義される．■

この定義は関手

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Join}:\ \mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n] & \longrightarrow & \mathcal{R}[A] \\ \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \\ \downarrow f^1 & \downarrow f^2 & \cdots & \downarrow f^n \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} Q_1*Q_2*\cdots*Q_n \\ \downarrow f^1*f^2*\cdots*f^n \\ R_1*R_2*\cdots*R_n \end{pmatrix} \end{array}$$

に拡張される．ここで，$(f^1*\cdots*f^n)_a=f^i_a$ $(a\in A_i)$ である．

ところで，$\mathcal{R}[A]$ において $f:Q\to R$ なるとき，明らかに $\langle f.A_1,\cdots,f.A_n\rangle:\langle Q.A_1,\cdots,Q.A_n\rangle\to\langle R.A_1,\cdots,R.A_n\rangle$ は $\mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n]$ に含まれる．従って関手

$$\begin{array}{ccc} F=\langle -.A_1,\cdots,-.A_n\rangle:\ \mathcal{R}[A] & \longrightarrow & \mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n] \\ \begin{pmatrix} Q \\ \downarrow f \\ R \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} Q.A_1 & \cdots & Q.A_n \\ \downarrow f.A_1 & \cdots & \downarrow f.A_n \\ R.A_1 & \cdots & R.A_n \end{pmatrix} \end{array}$$

を作ることができる．この射影から作られた関手 F と Join との間の基本的関連を次に示す．

〔定義 3.4〕 $\mathcal{C},\mathcal{D}$：カテゴリー；$T:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，$U:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$

：関手とするとき，TがUの<u>左随伴関手</u>であるとは，自然変換 $\eta : Id_{\mathcal{D}} \to UT$（$Id_{\mathcal{D}}$：$\mathcal{D}$上恒等関手）が存在して，$\forall D \in ob\,\mathcal{D}$，$\forall C \in ob\,\mathcal{C}$，$\forall f : D \to UC$，$\exists ! g : TD \to C$ $[f = Ug \circ \eta_D]$ を満たすこと（図3.4）。■

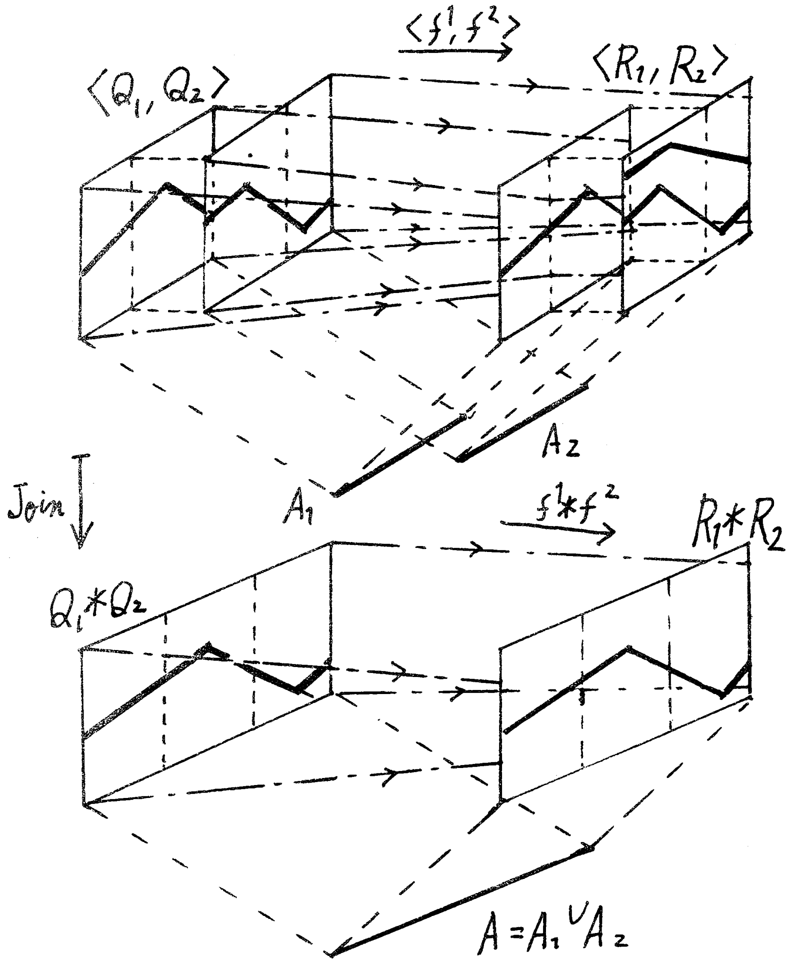


図3.2　自然結合（$n=2$）

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "U"'] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "T"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "Id_{\mathcal{D}}"] \arrow[r, bend right, "UT"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

（図3.3）

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[dr, "f"'] & UTD \arrow[d, dashed, "Ug"] & TD \arrow[d, dashed, "g"] \\ & UC & C \\ & \mathcal{D} & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

（図3.4）

［定理3.1］　FはJoinの左随伴関手．■

（証明）　$Q \in ob\,R[A]$，$Q' = \mathrm{Join}\,FQ = Q.A_1 * \cdots * Q.A_n$ とすると

$F = \langle -.A_1, \cdots, -.A_n \rangle$ と Join の定義により $DQ' = DQ$, $\overline{Q} \subset \overline{Q'}$ がわかる. 従って $\eta_Q \mathrel{\hat{=}} \langle id_{D_aQ} : D_aQ \to D_aQ' \rangle_{a \in A}$ とすれば η_Q は射 $Q \to Q' = Q.A_1 * \cdots * Q.A_n$ をなし, さらに $h : Q \to R \in mor\mathcal{R}[A]$ に対し $(h.A_1 * \cdots * h.A_n)_a = h_a$ ($a \in A$) であることにより $(h.A_1 * \cdots * h.A_n) \circ \eta_Q = \eta_R \circ h$ となることは明らか. すなわち $\eta = \langle \eta_Q \rangle_{Q \in ob\mathcal{R}[A]}$ は自然変換:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\eta_Q"'] \arrow[d, "h"'] & Q.A_1 * \cdots * Q.A_n \arrow[d, "h.A_1 * \cdots * h.A_n"] \\
R \arrow[r, "\eta_R"'] & R.A_1 * \cdots * R.A_n
\end{tikzcd}$$

(図 3.5)

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\eta_Q"] \arrow[dr, "f"'] & Q.A_1 * \cdots * Q.A_n \arrow[d, "g^1 * \cdots * g^n"] & Q.A_1 \arrow[d, "g^1"] & \cdots & Q.A_n \arrow[d, "g^n"] \\
& R_1 * \cdots * R_n & R_1 & \cdots & R_n
\end{tikzcd}$$

(図 3.6)

$Id_{\mathcal{R}[A]} \to Join\, F$. そこで $Q \in ob\mathcal{R}[A]$, $\langle R_1, \cdots, R_n \rangle \in ob\mathcal{R}[A_1, \cdots, A_n]$, $f : Q \to R_1 * \cdots * R_n$ に対し $\langle g^1, \cdots, g^n \rangle$ ($g^i = \langle f_a : D_aQ \to D_aR_i \rangle_{a \in A}$; $i = 1, \cdots, n$) を考えれば容易にこれが射: $\langle Q.A_1, \cdots, Q.A_n \rangle \to \langle R_1, \cdots, R_n \rangle$ をなし, (図 3.6) の左側が可換となること, およびそのような性質の射は $\langle g^1, \cdots, g^n \rangle$ 以外にないことがわかる. (q.e.d.)

4. 結合従属性 (JD) と実現値同値性

以上の定式化の応用として，関係から結合従属性を保存するような（実際はFDなどの従属性も保存する）ある性質——実現値がどのようにからみ合っているか——を抽出し，関係よりさらに抽象化された構造をつくる．この構造は当講究録の中で竹島（[2]）が述べているモデルとほとんど同じものであり，JD,FDはこの上で考えれば十分である．

以下，3.の記号をそのまま使う．

[定義 4.1]　$R \in ob\,\mathcal{R}[A]$が $\underline{JD(\mathcal{A})}$（あるいは$\underline{JD(A_1, \cdots, A_n)}$）を満たすとは，$\eta_R : R \to R.A_1 * \cdots * R.A_n$が同型射であることと定義する．このとき $R\ sat\ JD(\mathcal{A})$ とかく．■

η_R の定義と同型射の条件【補題 2.1】により直ちに次のことがいえる．

[補題 4.1]　$R\ sat\ JD(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \overline{\eta_R} : \overline{R} \longrightarrow \overline{R.A_1 * \cdots * R.A_n}$ が全単射 $\Longleftrightarrow R = R.A_1 * \cdots * R.A_n$ かつ $\eta_R = id_R$．■

[定義 4.2]（実現値同値性）　$\mathcal{R}[A]$において$Q \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} R$であったとする．このとき $f \sim g \Leftrightarrow \overline{f} = \overline{g} : \overline{Q} \to \overline{R}$．■

明らかに$\sim$は同値関係であり，$P \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} Q \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} R$ に対し，$f \sim f' \wedge g \sim g' \Rightarrow g \cdot f \sim g' \cdot f'$ が成り立つ．従って商カテゴリー$\mathcal{R}[A]/\sim$（$\mathcal{R}[A]$の対象はそのままで，射として$\mathcal{R}[A]$の射の$\sim$-同値類を持つようなカテゴリー）をつくることができる

[定義 4.3]　$Q, R \in ob\,\mathcal{R}[A]$が$\mathcal{R}[A]/\sim$で同型のとき，

すなわち，$f: Q \to R$，$g: R \to Q \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{R}[A]$ が存在して $g \circ f \sim id_Q \wedge f \circ g \sim id_R$ のとき，QとRは<u>同値</u>といって $Q \sim R$ とかく．■

[定理4.2]　$R \in \mathrm{ob}\,\mathcal{R}[A]$ とする．すると，R sat JD(A) ならば $R \sim Q$ なる任意の $Q \in \mathrm{ob}\,\mathcal{R}[A]$ についても Q sat JD(A)．すなわち，JD なる性質は $\mathcal{R}[A]/\sim$ で考えれば十分．■

証明のための準備を行う．

[補題4.3]　R sat JD(A) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}[A]/\sim$ において $\eta_R/\sim$(*)$: R \to R.A_1 * \cdots * R.A_n$ が同型．■

(証明) ($\Rightarrow$) 明らか．

($\Leftarrow$)　$g/\sim = (\eta_R/\sim)^{-1}$ ($\mathcal{R}[A]/\sim$) ($g: R.A_1 * \cdots * R.A_n \to R \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{R}[A]$) とすると $\overline{g} \circ \overline{\eta_R} = \overline{id_R} = id_{\overline{R}}$，$\overline{\eta_R} \circ \overline{g} = id_{\overline{R.A_1 * \cdots * R.A_n}}$．$\therefore \overline{\eta_R}$ は全単射．$\therefore \eta_R$ は同型 (q.e.d.)．

[補題4.4]　$\mathcal{R}[A]$ において $f \sim g: Q \to R \Rightarrow \forall i \in \{1, \cdots, n\}$ $[f.A_i \sim g.A_i : Q.A_i \to R.A_i]$ ■

(証明)　$i \in \{1, \cdots, n\}$，$x \in \overline{Q}$ とすれば $\overline{f.A_i}(x|A_i) = \langle f_a(x(a)) \rangle_{a \in A_i} = \langle \overline{f}(x)(a) \rangle_{a \in A_i} = \langle \overline{g}(x)(a) \rangle_{a \in A_i} = \overline{g.A_i}(x|A_i)$．$\therefore f.A_i \sim g.A_i$　(q.e.d.)

[補題4.5]　$\langle f^1, \cdots, f^n \rangle$，$\langle g^1, \cdots, g^n \rangle : \langle Q_1, \cdots, Q_n \rangle \to$

(*) $\eta_R/\sim$ は η_R の〜一同値類．以下，同様の記法を使う．

$\langle R_1,\cdots,R_n\rangle \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{R}[A_1,\cdots,A_n]$ とするとき, $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$ $[f^i\sim g^i] \Rightarrow f^1*\cdots*f^n \sim g^1*\cdots*g^n$. ∎

(証明) $\forall i\in\{1,\cdots,n\}[\overline{f^i}(h|A_i)=\overline{g^i}(h|A_i)]$ $(h\in\overline{Q_1*\cdots*Q_n})$ とする. このとき任意の $a\in A$ に対して $a\in A_i$ なる i をとると, $\overline{f^1*\cdots*f^n}(h)(a)=f^i_a(h(i))=\overline{f^i}(h|A_i)(a)=\overline{g^i}(h|A_i)(a)=\overline{g^1*\cdots*g^n}(h)(a)$. $\therefore \overline{f^1*\cdots*f^n}=\overline{g^1*\cdots*g^n}$.

(q.e.d.)

(定理 4.2の証明) Q sat $JD(A)$, $f: Q\to R$, $g: R\to Q$, $g\circ f\sim id_Q$, $f\circ g\sim id_R$ とする. すると補題 4.4, 4.5 により

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\eta_Q"] \arrow[d, shift left, "f"] & Q.A_1*\cdots*Q.A_n \arrow[d, shift left, "f.A_1*\cdots*f.A_n"] \\
R \arrow[r, "\eta_R"'] \arrow[u, shift left, "g"] & R.A_1*\cdots*R.A_n \arrow[u, shift left, "g.A_1*\cdots*g.A_n"]
\end{tikzcd}$$

(図 4.1)

$(g.A_1*\cdots*g.A_n)\circ(f.A_1*\cdots*f.A_n)=(g\circ f).A_1*\cdots*(g\circ f).A_n\sim id_{Q.A_1*\cdots*Q.A_n}$. 同様に $(f.A_1*\cdots*f.A_n)\circ(g.A_1*\cdots*g.A_n)\sim id_{R.A_1*\cdots*R.A_n}$. $\therefore \mathcal{R}[A]/\!\sim$ において $(f.A_1*\cdots*f.A_n)/\!\sim$ は同型射. 仮定により $f/\!\sim$, $\eta_Q/\!\sim$ も同型射. $\therefore \eta_R/\!\sim\;=(f.A_1*\cdots*f.A_n)/\!\sim\circ\,\eta_Q/\!\sim\circ(f/\!\sim)^{-1}$ も同型射. 補題 4.3 により $\mathcal{R}[A]$ において η_R は同型射. (q.e.d.)

5. $\mathcal{R}[A]/\!\sim$ の特徴付け

この節では$\mathcal{R}[A]/\sim$の特徴付けを行う.

[定義5.1] 集合Aに対し, カテゴリー$\mathcal{S}_1[A]$を次のように定義する.

対象: $\langle S, \langle \equiv_a \rangle_{a\in A}\rangle$. ここで, Sは集合$(\neq\phi)$, $\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}$は$S$上同値関係の族で, $s,t\in S$に対し

(S1) $\forall a\in A[s\equiv_a t] \Rightarrow s=t$

を満たすもの.

射: $f:\langle S,\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle \to \langle T,\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle$が射 $\Leftrightarrow$ fが写像$S\to T$であって任意の$s,t\in S$に対し

(S2) $\forall a\in A[s\equiv_a t \Rightarrow f(s)\equiv_a f(t)]$

を満たす. ■

[定義5.2] $\mathcal{R}[A]$の対象の中で実現値集合が空でないものの全体からつくられる充満部分カテゴリーを$\mathcal{R}_1[A]$とかく. すなわち $ob\,\mathcal{R}_1[A]=\{R\in ob\,\mathcal{R}[A] \mid \bar{R}\neq\phi\}$; $Q,R\in ob\,\mathcal{R}_1[A] \wedge f:Q\to R\in Mor\,\mathcal{R}[A] \Rightarrow f\in Mor\,\mathcal{R}_1[A]$. ■

[定理5.1] $\mathcal{S}_1[A]\cong\mathcal{R}_1[A]/\sim$ ■

(証明) 関手G_1, H_1を次のように決める.

$$G_1: \mathcal{R}_1[A]/\sim \longrightarrow \mathcal{S}_1[A]$$

$$\begin{pmatrix} Q \\ \downarrow f/\sim \\ R\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\langle \bar{Q}, \langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle \\ \downarrow \bar{f} \\ \langle\bar{R},\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle\end{pmatrix}$$

ここで，$h, k \in \overline{Q}$ $[\in \overline{R}]$ に対し，$h \equiv_a k \Leftrightarrow h(a)=k(a)$ $(a\in A)$。 $\sim$の定義により $G_1(f/\sim)=\overline{f}$ は代表元 f の取り方によらず一意に定義される．また，

$$H_1 : \mathcal{S}_1[A] \longrightarrow \mathcal{R}_1[A]/\sim$$

$$\left(\begin{array}{c}\langle S, \langle \equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle \\ g\big\downarrow \\ \langle T, \langle \equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle\end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c}\langle A, \{S/\equiv_a\}_{a\in A}, \overline{S}\rangle \\ \big\downarrow g'/\sim \\ \langle A, \{T/\equiv_a\}_{a\in A}, \quad\rangle\end{array}\right)$$

ここで，$\overline{S}=\{\langle s/\equiv_a\rangle_{a\in A} \mid s\in S\}$，$\overline{T}$も同様，$g' \doteq \langle g/\equiv_a : S/\equiv_a \to T/\equiv_a : s/\equiv_a \mapsto g(s)/\equiv_a\rangle_{a\in A}$ ((S2)により射として well defined)。

すると，(i) $R\in ob\,\mathcal{R}_1[A]/\sim$ に対し $H_1G_1R \cong R$ $(\mathcal{R}_1[A]/\sim)$.

∵ $H_1G_1R = \langle A, \{\overline{R}/\equiv_a\}_{a\in A}, \{\langle h/\equiv_a\rangle_{a\in A} \mid h\in\overline{R}\}\rangle$.
そこで，$\iota^R \triangleq \langle \iota_a^R : \overline{R}/\equiv_a \to D_aR : h/\equiv_a \mapsto h(a)\rangle_{a\in A}$ とすれば $\langle h/\equiv_a\rangle_{a\in A} \in \overline{H_1G_1R}$ $(h\in\overline{R})$ に対し $\Pi\iota^R(\langle h/\equiv_a\rangle_{a\in A}) = h \in \overline{R}$．∴ $\iota^R: H_1G_1R \to R \in Mor\,\mathcal{R}_1[A]$．また，$h_0\in\overline{R}$ とし，$\tau^R \doteq \langle \tau_a^R : D_aR \to \overline{R}/\equiv_a\rangle$，ここで $a\in A$，$x\in D_aR$ のとき $x = h(a)$ $(h\in\overline{R})$ ならば $\tau_a^R(x)=h/\equiv_a$，$\forall h\in\overline{R}[x\neq h(a)]$ ならば $\tau_a^R(x)=h_0/\equiv_a$ とする．すると $h\in\overline{R}$ に対し $\Pi\tau^R(h) = \langle h/\equiv_a\rangle_{a\in A} \in \overline{H_1G_1R}$．よって $\tau^R: R\to H_1G_1R$ $(\mathcal{R}[A])$ であり明らかに $\iota^R\circ\tau^R \sim id_R$，$\tau^R\circ\iota^R\sim id_{H_1G_1R}$．∴ $H_1G_1R \sim R$．∴ $H_1G_1R\cong R$ $(\mathcal{R}_1[A]/\sim)$．

R $(\ell \equiv_b m,\ m \equiv_a n)$

	a	b
	$\{x, y, z\}$	$\{u, v\}$
ℓ	x	u
m	y	u
n	y	v

$\sim$

H_1G_1R

	a	b
	$\{\{\ell\}, \{m, n\}\}$	$\{\{\ell, m\}, \{n\}\}$
ℓ'	$\{\ell\}$	$\{\ell, m\}$
m'	$\{m, n\}$	$\{\ell, m\}$
n'	$\{m, n\}$	$\{n\}$

(図5.1)

また，(ii) $\mathcal{S}=\langle S, \langle \equiv_a \rangle_{a\in A}\rangle \in ob\,\mathcal{S}_1[A]$ とするとき，
$\mathcal{S} \cong G_1H_1\mathcal{S}$.

∵ $G_1H_1\mathcal{S}=\langle S', \langle \equiv'_a \rangle_{a\in A}\rangle$, $S'=\{\langle s/\equiv_a\rangle_{a\in A} \mid s\in S\}$,
$\langle s/\equiv_a\rangle_{a\in A} \equiv'_{a_0} \langle t/\equiv_a\rangle_{a\in A} \Leftrightarrow s/\equiv_{a_0} = t/\equiv_{a_0} \Leftrightarrow s \equiv_{a_0} t$
$(a_0 \in A)$。従って $\varphi : S \to S' : s \mapsto \langle s/\equiv_a\rangle_{a\in A}$ とすれば
(§1) により φ は全単射で $s \equiv_a t \Leftrightarrow \varphi(s) \equiv'_a \varphi(t)$。これが$\varphi$の同型射であることをあらわしていることはほとんど明らか。

(i), (ii) が自然同型であることの証明は省略 (q.e.d.)

実現値集合が空の場合

[補題5.2] $Q, R \in ob\,\mathcal{R}[A]/\sim\ (= ob\,\mathcal{R}[A])$ に対して

1. $\overline{Q}=\phi$, $\overline{R}\neq\phi$ ならば，$\mathcal{R}[A]/\sim$ において
   (i) 射：$Q \to R \in mor\,\mathcal{R}[A]/\sim$ は唯一存在
   (ii) 射：$R \to Q$ は存在しない.
2. $\overline{Q}=\overline{R}=\phi$ ならば

(i) $\{a\in A \mid D_aQ\neq\phi\}\subset\{a\in A\mid D_aR\neq\phi\}$ ならば射:$Q\to R$は唯一存在.

(ii) それ以外の場合は射$Q\to R$は存在しない.

3. $\overline{Q}=\overline{R}=\phi$のとき,

$$Q\sim R\ (\mathcal{R}[A])\iff\{a\in A\mid D_aQ\neq\phi\}=\{a\in A\mid D_aR\neq\phi\}$$ ■

(証明) 一般に$Q, R\in \mathrm{ob}\,\mathcal{R}[A]$, $\overline{Q}=\phi$ ならば任意の写像族 $f=\langle f_a: D_aQ\to D_aR\rangle_{a\in A}$ は射:$Q\to R$をなす.またこのとき$\overline{f}$は空写像となるので空写像の一意性により任意の射:$Q\to R$は互に~-同値.よって$\mathcal{R}[A]/\sim$において射:$Q\to R$は高々1つしかない.

1.(i):$\overline{R}\neq\phi$により$\forall a\in A[D_aR\neq\phi]$,よって少くともひとつ写像族$f=\langle f_a: D_aQ\to D_aR\rangle_{a\in A}$が存在する.よって上の理由から$f\in \mathrm{mor}\,\mathcal{R}[A]$であり,かつ$\mathcal{R}[A]/\sim$においては射:$Q\to R$は唯一$f/\sim$のみ存在.

(ii): 任意の写像族$g=\langle g_a: D_aR\to D_aQ\rangle_{a\in A}$に対して$\Pi g(\overline{R})\neq\phi\not\subset\overline{Q}=\phi$.よって射:$R\to Q$は($\mathcal{R}[A]$にも$\mathcal{R}[A]/\sim$にも)存在しない.

2. 射:$Q\to R$が存在$\iff$写像族$f=\langle f_a: D_aQ\to D_aR\rangle_{a\in A}$が存在$\iff\forall a\in A[D_aQ\neq\phi\Rightarrow D_aR\neq\phi]\iff\{a\in A\mid D_aQ\neq\phi\}\subset\{a\in A\mid D_aR\neq\phi\}$.よって明らか.

3、(⇒) $Q \sim R$ ならば $\mathcal{R}[A]/\sim$ の射 $f/\sim : Q \to R$, $g/\sim : R \to Q$ が存在しなければならない．よって $\{a \in A \mid D_a Q \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid D_a R \neq \emptyset\}$.

(⇐) 2、により $\mathcal{R}[A]/\sim$ において $f/\sim : Q \to R$, $g/\sim : R \to Q$ が存在する．ところが2．により射 $Q \to Q$，$R \to R$ はそれぞれ唯一つ，すなわち恒等射のみ存在。よって $g/\sim \circ f/\sim = id_Q/\sim$，$f/\sim \circ g/\sim = id_R/\sim$．よって Q，R は $\mathcal{R}[A]/\sim$ で同型．

(q. e. d.)

6．$\mathcal{S}_1[A]$ の他の見方とそこでの JD, FD

$\langle S, \langle \equiv_a \rangle_{a \in A} \rangle \in ob\text{-}\mathcal{S}_1[A]$ とする．このとき $s, t \in S$ に対し s と t の一致度を $s \square t \triangleq \{a \in A \mid s \equiv_a t\}$ と定義すれば容易に

(S3) $s \square s = A$

(S4) $s \square t = t \square s$

(S5) $(r \square s) \cap (s \square t) \subset r \square t$

(S6) $s \square t = A \Rightarrow s = t$

が確かめられる．また，$f : \langle S, \langle \equiv_a \rangle_{a \in A} \rangle \to \langle T, \langle \equiv_a \rangle_{a \in A} \rangle$ が $\mathcal{S}_1[A]$ の射ならば，射の条件から直接

(S7) $s \square t \subset f(s) \square f(t)$

が導かれる.

逆に(\$3)〜(\$6)を満たす集合S($\neq\phi$)と$\square : S\times S\to 2^A$の対$\langle S,\square\rangle$があれば,$s\equiv_a t \Leftrightarrow a\in s\square t$ $(a\in A)$とすることによって$\mathcal{S}_1[A]$の対象$\langle S,\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle$を作ることができる。また,この作り方により$\langle S,\square\rangle,\langle T,\square\rangle$が(\$3)〜(\$6)を満たすとき,写像$f:S\to T$が(\$7)を満たす$\Leftrightarrow(a\in s\square t \Rightarrow a\in f(s)\square f(t))\Leftrightarrow(s\equiv_a t\Rightarrow f(s)\equiv_a f(t))\Leftrightarrow f:\langle S,\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle \to\langle T,\langle\equiv_a\rangle_{a\in A}\rangle\in Mor\,\mathcal{S}_1[A]$。

よって$\mathcal{S}_1[A]$は(\$3)〜(\$6)を満たす対$\langle S,\square\rangle$を対象とし,(\$7)を満たす写像fを射とするカテゴリーとみなすことができる.

以下,この視点からJD,FDがどのように$\mathcal{S}_1[A]$であらわされるかを示す.

[定理 6.1]　$R\in ob\,\mathcal{R}_1[A]=ob\,\mathcal{R}_1[A]/\sim$に対し

R sat JD$(A_1,\cdots,A_n)\Leftrightarrow$($G_1R$が$\forall h_1,\cdots,\forall h_n\in\bar{R}$[

$\forall i,\forall j\in\{1,\cdots,n\}$[$h_i\square h_j\supset A_i\cap A_j$]

$\Rightarrow\exists h\in\bar{R};\forall i\in\{1,\cdots,n\}$[$h\square h_i\supset A_i$]]

を満たす).■

ここで$h, h'\in\bar{R}$に対し$h\square h'=\{a\in A\mid h(a)=h'(a)\}$.

(証明)　R sat JD$(A_1,\cdots,A_n)\Leftrightarrow\bar{R}=\overline{R.A_1*\cdots*R.A_n}\Leftrightarrow$
$\bar{R}\supset\overline{R.A_1*\cdots*R.A_n}\Leftrightarrow\forall h\in\Pi DR$[($\forall i\in\{1,\cdots,n\},\exists h_i\in\bar{R}$[$h|A_i$

$= h_i|A_i])\Rightarrow h\in \overline{R}]$ 。この最終辺の命題を p とする．また，
$q \equiv \forall h_1,\cdots,\forall h_n \in \overline{R}\,[(\forall i,\forall j\in\{1,\cdots,n\}[h_i \sqcap h_j \supset A_i\cap A_j])\Rightarrow$
$\exists h\in\overline{R};\forall i\in\{1,\cdots,n\}\,[h\sqcap h_i\supset A_i]\,]$ とする．

G_1R が q を満たし，$h\in\Pi DR;\ h_1,\cdots,h_n\in\overline{R}$ であって $h|A_i=$
$h_i|A_i\ (i=1,\cdots,n)$ だとする．すると任意の $i,j\in\{1,\cdots,n\}$
に対し $h_i|A_i\cap A_j = h|A_i\cap A_j = h_j|A_i\cap A_j$ ． $\therefore h_i\sqcap h_j\supset A_i\cap A_j$
よって仮定により $h'\in\overline{R}$ が存在して $\forall i\in\{1,\cdots,n\}[h'\sqcap h_i\supset A_i]$．
ところが $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$ であることから任意の $a\in A$ に対し $a\in A_i$ なる
i が存在して $h(a)=h_i(a)$ （$\because h|A_i=h_i|A_i$），$h_i(a)=h'(a)$
（$\because h'\sqcap h_i\supset A_i$）．$\therefore \forall a\in A\,[h(a)=h'(a)]$．$\therefore h=h'\in\overline{R}$．よっ
て R は p を満たす．

逆に R が p を満たすとする．$h_1,\cdots,h_n\in\overline{R};\ \forall i,\forall j\in\{1,\cdots,n\}$
$[h_i\sqcap h_j\supset A_i\cap A_j]$ とするとき，$h\in\Pi DR$ を $h(a)=h_i(a)$
$(a\in A_i)$ で定義する。仮定により $a\in A_i\cap A_j\Rightarrow h_i(a)=h_j(a)$
であるから $h(a)$ は一意に決まり，また $\bigcup_i A_i=A$ であることか
らすべての $a\in A$ で h は定義される．すると，$h|A_i=h_i|A_i$
$(i=1,\cdots,n)$ となるから p の仮定により $h\in\overline{R}$。また $h|A_i=$
$h_i|A_i \Leftrightarrow h\sqcap h_i\supset A_i$ であるから R は（従って G_1R は）q を満
たす． (q. e. d.)

（注） $R\in ob\,\mathcal{R}[A],\ \overline{R}=\phi \Rightarrow R\ sat\ JD(\mathcal{A})$ は常に成り立つ．

［定義 6.1］ $R\in ob\,\mathcal{R}[A]$ が $X\xrightarrow{FD}Y\ (X,Y\subset A)$ を満たす

とは，$\forall h_1, \forall h_2 \in \bar{R}\ [\, h_1|_X = h_2|_X \Rightarrow h_1|_Y = h_2|_Y \,]$ が成り立つこと．■

［定理6.2］ $R \in ob\,\mathcal{R}[A]$ が $X \xrightarrow{FD} Y$ を満たす $\Leftrightarrow \bar{R} = \phi \vee$ $(\bar{R} \neq \phi \wedge G_1 R$ が $\forall h_1, \forall h_2\ [\, h_1 \sqcap h_2 \supset X \Rightarrow h_1 \sqcap h_2 \supset Y \,])$ ■

（証明） $\bar{R} = \phi$ のとき両辺が真となることは明らか．$\bar{R} \neq \phi$ とするとき，$h_1|_X = h_2|_X \Leftrightarrow h_1 \sqcap h_2 \supset X$，$h_1|_Y = h_2|_Y \Leftrightarrow h_1 \sqcap h_2 \supset Y$ であることから明らか．　　　(q.e.d.)

特に $\bar{R} \neq \phi$，$\mathrm{Im}\sqcap \triangleq \{\, h_1 \sqcap h_2 \mid h_1, h_2 \in \bar{R} \,\}$ とすれば，R が $X \xrightarrow{FD} Y$ を満たす $\Leftrightarrow \forall U \in \mathrm{Im}\sqcap\ [\, U \supset X \Rightarrow U \supset Y \,]$ となり，FD は $\mathrm{Im}\sqcap \subset 2^A$ の性質に帰着される．

射の導入による関係の新しいデータ構造定式化を行い，関係から従属性にかかわるひとつの構造を抽出した．これらの結果をどのようにデータベース設計などへ適用するかが今後の課題である．

文献

[1] 加藤：関係データモデルの表現独立な構造へのカテゴリー論的接近 ── 特に従属性について，情報処理学会22回（昭56前）全国大会，予稿集 pp. 393－394 (1981)

[2] 竹島：同値律をみたす述語による関係データモデル従属性の一般化について，本講究録

[3] 竹内：層・圏・トポス ──現代的集合像を求めて，日本評論社 (1978)