数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 60-69

Kac-Moody型 Lie 環の root 系の特徴づけ

東大 理 岩堀 長慶
上智大 理工 横沼 健雄

一般の Cartan 行列に対応する Kac-Moody 型 Lie 環の root 系を，Lie 環からはなれて，ベクトル空間のある条件をみたす部分集合として記述する問題は，Kac あるいは森田純氏によって取扱われ，森田氏によって公理が5月のシンポジウムで報告されたが([7])，これは base を用いるものであった．古典的な場合([1])のような base からはなれた形で公理を与えたいというのが問題の発端である．

ここでは実 root，すなわち base の Weyl 群による orbit に属する元，の集合を Tits cone を用いる幾何学的条件で特徴づけようとするものである．

なお Kac による base-free な root 系の公理が [2] に与えられている．

以下はじめに Looijenga に従って Tits cone について述べる．次いで §2 において主定理及びその応用，§3 において関連

する事実としてCartan行列の階数について述べ，最後に主定理の証明の要点を記す．詳細は[5]を参照されたい．

§1. Tits cone

主定理の解説のため，Looijenga[3]による generalized root system の理論に従って，Tits cone の定義・性質を述べる．この理論は5月に徳山氏によって紹介されたものである([8])．Looijenga は Tits による Coxeter 群の geometric representation に関連した事実が，一般の Cartan 行列の Weyl 群の自然な表現の場合に成立することから，Tits cone の root 系への応用を示した．

<u>定義</u>．　正方行列 $A=(A_{ij})$ が <u>Cartan 行列</u>とは，

1) $A_{ij}\in\mathbb{Z}$．
2) $i\neq j$ ならば $A_{ij}\leqq 0$，$A_{ii}=2$．
3) $i\neq j$ に対して，$A_{ij}=0 \Leftrightarrow A_{ji}=0$．

l 次 Cartan 行列 A が与えられたとき，

$$\begin{cases} V_0 = \text{symbols } \alpha_1,\cdots,\alpha_l \text{ を basis とする実ベクトル空間} \\ H_0 = \text{symbols } \alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_l^\vee \text{ を basis とする実ベクトル空間} \end{cases}$$

とする．bilinear map

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\quad V_0\times H_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

を，$\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle=A_{ji}$ によって定義する．$\langle\cdot,\cdot\rangle$は一般には

degenerate だが，$V_c, H_c, \langle\cdot,\cdot\rangle$ の適当な拡大 $V, H, \langle\cdot,\cdot\rangle$ をとると，$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times H\to\mathbb{R}$ は non-degenerate にすることが出来る．以下そのような拡大を一つ固定する．

$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ とし，$\Pi\ni\alpha_i$ に対して V の symmetry

$$r_i : v\longmapsto v-\langle v,\alpha_i^\vee\rangle\alpha_i$$

をとり，Weyl群 $W=\langle r_1,\cdots,r_l\rangle\subset GL(V)$ とおき，W による $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ の orbit Δ を考え，その元を(実) root とよぶ．r_i は transpose によって H に作用する．

$C=\{x\in H \mid \langle\alpha_i,x\rangle>0,\ i=1,\cdots,l\}$ は open convex cone で

$$\Lambda=\Big(\bigcup_{w\in W} w\bar{C}\Big) \text{ の内点}$$

とおくと，Λ も open convex cone となり，Λ を Tits cone とよぶ．

このとき，

$$A \text{ が有限型} \Longleftrightarrow \Lambda=H$$

$$A \text{ が Euclid 型} \Longrightarrow \Lambda \text{ は半空間}$$

が示されている．(有限型，Euclid 型については [4] 参照)

なお，Vinberg の linear Coxeter group の理論([10])も Tits の理論の一般化であるが，Vinberg の Cartan 行列の定義は，更に一般的で整数条件が考慮されていない．これについては，5月のシンポジウムの，植野・山口・村上氏の紹介([9])がある．

§2. 主定理とその応用

Tits cone Λの性質をもってroot系の公理とする，というのがMoody氏のアイディアである．あらためて状況を述べる．

$$\left.\begin{array}{ll} V,\ H: & \text{有限次元実ベクトル空間} \\ \langle\cdot,\cdot\rangle: V\times H\longrightarrow\mathbb{R} & \text{non-degenerate bilinear form} \end{array}\right\}\text{とする．}$$

$V-\{0\}\supseteq\Delta$を，空でない部分集合とし，次の条件(I)(II)(III)を考える．

(I) 任意の$\alpha\in\Delta$に対して，αに関するsymmetry r_αが存在して$r_\alpha(\Delta)\subseteq\Delta$，すなわち次の条件をみたす$\alpha^\vee\in H$が存在する．

$$\begin{cases} \langle\alpha,\ \alpha^\vee\rangle=2, \\ r_\alpha: v\longmapsto v-\langle v,\alpha^\vee\rangle\alpha \quad \text{は}\Delta\text{をたもつ}. \end{cases}$$

(II) 任意の$\alpha,\beta\in\Delta$に対して，$\langle\alpha,\beta^\vee\rangle\in\mathbb{Z}$．

$\alpha\in\Delta$に対して，$H_\alpha=\{x\in H \mid \langle\alpha,x\rangle=0\}$とおく．Bourbaki [1]第5章にならって，超平面の族$H_\alpha\ (\alpha\in\Delta)$によって，H上に次のような同値関係$\sim$を定義し，その同値類をfacetteとよぶ．

$$x\sim y \iff \begin{cases} \text{任意の}\ \alpha\in\Delta\ \text{に対して，}x,y\ \text{は}H_\alpha\text{上} \\ \text{にあるか，}H_\alpha\text{の同じ側にある．} \end{cases}$$

$W=\langle r_\alpha \mid \alpha\in\Delta\rangle\subset GL(V)$とおく．Wはtransposeによって，H上に作用する．

(III) H上にW-invariantなopen convex cone Λであってfacetteのunionであり，かつ次のa) b)をみたすものが存在する．

a) 任意の$x, y \in \Lambda$に対して，閉線分$[x, y]$は有限個の facette でおおわれる．

b) 任意の$\alpha \in \Delta$に対し，WにおけるH_αの pointwise stabilizer は有限群．

実は，残りの仮定のもとで，(III) a) b)は次と同値であることが証明される：—

a') WはΛ上に properly discontinuous に作用する．

また(III) b)を用いて，H_αを1-固有空間とするWの中のinvolutionは，反に限ることが示される．

定理を述べるためにいくつかのことばを用意する．以下Δは(I)(II)(III)をみたすものとする．整数条件(II)より，
$\mathbb{R}\alpha \cap \Delta \subset \{\pm\frac{1}{2}\alpha,\ \pm\alpha,\ \pm 2\alpha\}$ がわかる．

$$\Delta_{red} = \{\alpha \in \Delta \mid \tfrac{\alpha}{2} \notin \Delta\}$$

とおく．Δ_{red}は同じ cone Λによって条件(I)(II)(III)をみたす．

定義．超平面の族H_α $(\alpha \in \Delta)$が与えられたとき，内点をもつ facette を chamber，唯一つの超平面に含まれる facette を face，また face F が chamber C の face であるとは，$F \cap \overline{C}$ が唯一つの超平面に含まれることをいい，そのような超平面をCの wall とよぶ．

前述 Bourbaki[1] においては，locally finite な超平面の族の場合に facette 等について述べられているが，ここでの状況

にあわせるためには，すこし変えなければならない．

<u>定理．</u> V, H, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, Δ を上述のようにとる．Δ は条件(I)(II)(III)をみたすものとする．このとき，

1) Λ に含まれる chamber が存在し，W はそれらの集合上に simply transitive に作用する．C を Λ に含まれる chamber の一つとし，次のように Δ^+_{red}, Π を定める．

$$\Delta^+_{red} = \{ \alpha\in\Delta_{red} \mid \alpha \text{ は } C \text{ 上正} \}$$

$$\Pi = \{ \alpha\in\Delta^+_{red} \mid H_\alpha \text{ は } C \text{ の wall} \}$$

2) Π は可算集合である．$\alpha,\beta\in\Pi$ に対し，$A_{\alpha\beta} = \langle\beta,\alpha^\vee\rangle$ とおくと，行列 $(A_{\alpha\beta})$ は Cartan 行列の条件をみたす．

3) Π が有限集合とする．このとき Cartan 行列 $A=(A_{\alpha\beta})$ により base $\Pi'=\{\alpha' \mid \alpha\in\Pi\}$ から定義される root 系を Δ'，その Weyl 群を W' とすると，$W\cong W'$ かつ全ての $\alpha\in\Pi$ に対して，$\pi(\alpha')=\alpha$ となる (W',W)-equivariant な bijection $\pi:\Delta'\longrightarrow\Delta_{red}$ が存在する．

定理より得られる結果として，

1) "$\Lambda=H \Leftrightarrow \Delta$：有限" が容易にみちびかれる．

実際 $\Lambda=H$ ならば，$0\in\Lambda$ であり，0 の stabilizer W は有限群．逆に Δ が有限ならば，Δ はある有限 root 系 Δ' の image である．C を Λ の chamber とすると，W の長さ最大の元 w_0 は C を $-C$

にうつし，従って $C, -C \subset \Lambda$ より　$\Lambda = H$.

2)　Looijenga の結果の逆として，Λ が開半空間，かつ Π が有限集合，$A = (A_{\alpha\beta})$ が indecomposable ならば，A は Euclid 型であることがわかる．

3)　α, β を線型独立な Δ の元とすると，Δ の plane cut $\Sigma = (\mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta) \cap \Delta$ は，rank 2 の root 系である．

$H' = H / (H_\alpha \cap H_\beta)$ とおき，canonical map $H \to H'$ による Λ の image Λ' を用いて，Σ が (I)(II)(III) をみたすことを検証する．

§3. Cartan 行列の階数

定理において，Π の有限性についての結果は残念ながら得られていない。一つの材料として次の結果がある．

__命題__.　1)　A を l 次の Cartan 行列，その row rank $= n < l$ とすると，$V, H, \langle\ ,\ \rangle : V \times H \to \mathbb{R}$ 及び (I)(II)(III) をみたし A を定める Δ であって，かつ $\dim V = \dim H = n + 1$　となるものが存在する．

2)　A を l 次の Cartan 行列とすると，

$$\text{row rank の最小値} = \begin{cases} 1 & l = 1, 2 \\ 2 & l = 3, 4 \\ 3 & l \geqq 5 \end{cases}$$

最近の Moody 氏からの手紙によれば，G. Maxwell (Univ. B. C.)

が row rank $= 4$ の無限次 symmetrizable Cartan 行列の構成法を与えたとのことである．これは Maxwell による level 2 の双曲型 Cartan 行列（任意の二行と対応する二列を除くと連結成分が Euclid 型又は有限型になる Cartan 行列）の性質を用いるものである．

§4．主定理の証明について

1) 条件(Ⅲ)a)より，Λ 内で超平面の族 $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{red}\}$ は，locally finite であることがわかる．Λ 内の閉線分 I の facette への分解は，有限個の点をとって開区間に分けるという形になる．そして任意の $x \in \Lambda$ に対して，x を内点とする独立な n 個の線分をとり，その convex hull の内部で考えることにより，x を中心とする Λ 内の open ball B であって，B と交わる超平面は x を通るようなもの，をとることが出来る．さらに x を内点とする simplex をとると，x を通る超平面は simplex の辺との交点できまるから有限個．これより

イ) 超平面の数は可算無限．

ロ) Λ 内に chamber が存在．

従って，chamber C は，

$$C = \{x \in H \mid \langle \alpha, x \rangle > 0 \quad \text{for } \forall \alpha \in \Delta^+_{red}(C)\}$$

となる，ただし $\Delta^+_{red}(C)$ は，C 上正な Δ_{red} の元全体の集合．

2) chamber に wall が存在することを示すためにも次の補題は有用である.

<u>補題</u>. C を Λ の chamber とし, $x \in C$, $y \in \Lambda - \overline{C}$ とする. y を中心とし, $\Lambda - \overline{C}$ に含まれるある open ball を B とする. $R(x, b)$ を, x から $b \in B$ への半直線とする. $R = \bigcup_{b \in B} R(x, b)$ は, C のすくなくとも一つの face を, その face の開集合で切断する.

<u>系</u>. C は face をもつ.

3) C を Λ の chamber, $F = F_\alpha \subset H_\alpha$ を C の face ($\alpha \in \Delta^+_{red}(C)$) とすると, $F_\alpha \subset \Lambda$ かつ $F_\alpha = \{x \in H \mid \langle \beta, x \rangle > 0 \text{ for } \beta \in \Delta^+_{red}(C) - \{\alpha\}, \langle \alpha, x \rangle = 0\}$. さらに F_α を face とする chamber は, C と $r_\alpha C$ のみであることがわかる.

4) $W_C = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$ は, Λ の chamber の集合上に transitive である. これより $\Delta = W_C \Pi$, $W = W_C$ を得る.

5) (Coxeter群の性質) $S = \{r_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ とおくと, (W, S) は Coxeter system, かつ W は Λ の chamber の集合上に simply transitive である. これは, $\alpha \in \Pi$ に対して,

$$P_\alpha = \{ w \in W \mid wC \text{ と } C \text{ は } H_\alpha \text{ の同じ側にある} \}$$

と定義し, 分割律をためすことにより示される.

残りの部分の証明は, 自然な流れを追えばよい.

参考文献

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI Hermann, Paris, 1968.

[2] V. G. Kac, Some remarks on representations and infinite root system, Representation II, 311-327, Lecture Notes in Math. 832, Springer, 1980.

[3] E. Looijenga, Invariant theory for generalized root systems, Inv. Math., 61 (1980), 1-32.

[4] R. V. Moody, Root systems of hyperbolic type, Adv. Math., 33 (1979), 144-160

[5] R. V. Moody and T. Yokonuma, Root systems and Cartan matrices, preprint.

[6] J. Morita, Roots of Kac-Moody Lie algebras, preprint

[7] 森田純, Kac の graph 表現論の紹介 I, 数理研講究録 394 (1980), 22-33.

[8] 徳山豪, Invariant theory for generalized root systems, 数理研講究録 394 (1980), 99-116.

[9] 植野義明・山口浩・村上順, Lobachevsky 空間の discrete group について, 数理研講究録 394 (1980), 117-149.

[10] E. B. Vinberg, Discrete groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR 35 (1971) = Math. USSR Izvestija 5 (1971) 1083-1119.