数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 75-89

成分型単純群の分類完成

大阪教育大学　　鈴 木 寛

これは、成分型有限単純群の分類完成の報告、そのいくつかの部分の紹介、証明技術面での問題についてのノートである。

§1. 主定理と 標準部分群型問題

このノートで、群はすべて有限群、単純群は、非可換単純群を意味するものとし、用いる記号、用語はなるべく、鈴木通夫著"群論（上・下）"（岩波書店）、近藤武著"群論（I, II, III）"（岩波基礎数学講座）にあわせる事とした。上記二名著を御参照されたい。

定義 1.　$\mathcal{K}$：既知単純群全体の集合

$F^*(G)$：有限群 G の一般フィッティング部分群

（$F^*(G) = E(G)F(G)$、ここで$F(G)$はフィッティング部分群 $E(G)$は、Gの、準単純（後述）連正規部分群全体で生成された G の部分群）

主定理．Gを $\underline{\mathcal{K}}$ に入らない、最小位数の単純群とする。すると、任意の位数2の元 t について、

$$F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$$

は、2－群。

注1．一般に、ある位数2の元 t について、$F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$ が2群にならない群を、成分型（component type）の群という。今 $\underline{\mathcal{K}}$ が、単純群全体である事を証明しようとする時、Gを、その最小位数の反例であるとすると、上の定理は、Gが、成分型ではないと主張している。

注2．$F^*(C_G(t)/O(C_G(t)))$ が2-群 にならないという事は、$C_G(t)/O(C_G(t))$ に、連正規な、準単純部分群がある事を意味し、（定義1 参照）、成分型とは、大体、ある位数2の元の中心化群の下の方に、単純群がある群のことである。

以後、主定理の証明について述べる。

定義2.　G の部分群 L が、標準部分群で（standard subgroup）あるとは、次の三つの条件をみたすことである。

① $L=L'$, $L/Z(L)$ は単純群。（この性質をもつ群 L を 準単純 と呼ぶ）

② $K=C(L)$ とおくとき、$|K|$ は偶数であるが、任意の $g\in G-N(K)$ について $|K\cap K^g|$ は 2 で割れない。（このとき、K は tightly embedded subgroup であると呼ばれる。）

③ $N(L)=N(K)$, $[L, L^g]\neq 1$, $\forall g\in G$。

定義3.　G が単純型 X であるとは、G が標準部分群 L を持ち、$L/Z(L)\cong X$ なることである。

定義4.　G が型 X であるとは、G が標準部分群 $L\cong X$ を持つことである。

定理1.（標準部分群型定理）G が単純型 X $(X\in\underline{\mathcal{K}})$ であって、$F^*(G)$ が単純群であるなら、$F^*(G)\in\underline{\mathcal{K}}$。すなわち、ある $H\in\underline{\mathcal{K}}$ で、$H\leq G\leq \mathrm{Aut}\,H$。

定理2．（M. Aschbacher, R. Foote）主定理は、定理1．より、みちびかれる。

したがって、目標は、定理1を証明することになった。

注3．　定理1．において G が単純と仮定し、かつ、定理2．が成立すればよいが、定理2．の証明に用いられるU－予想、B－予想（これらも、定理1．からみちびかれる"定理"である）をも、一度にかたづける為には、G を、もう少し一般に、つまり、$F^*(G)$ が、単純、と仮定して証明する必要がある。ただし、すべての型 X について、この強い形で、定理1．を証明しなくては、いけないわけではない。

注4．　定義2．からわかるように、標準部分群を持つ群は、成分型である。

定理1．を証明するためには $\mathfrak{X}$ の各元 X について、次を証明すればよい。

定理1'．　G を、単純型 X とし、$F^*(G)$ は単純とする。さらに G は、次の条件をみたすものとする。

① G の真部分群の剰余群 H が、ある $Y \in \mathfrak{X}$ について単純 Y 型なら、H の任意の組成因子は $\mathfrak{X}$ の元であるか、または、可換群である。

② L を、X 型の標準部分群としたとき、C(L) の 2－シロー群は、巡回群である。

③ G は、性質 B(G) をみたす。

（④ G は、単純群である。）

このとき、$F^*(G) \in \mathfrak{X}$。

注5. ① は、定理 1. で、最小位数の反例をとることから、仮定できるもの、② は、C(L) の 2－シロー群が巡回群でない場合が、一般に、M. Aschbacher, G. Seitz によって証明されたため、③ は、G の位数 2 の元の中心化群の奇数位数の正規部分群に関する性質であるが、詳述はさける。④ は、いつでも、仮定できるわけではなく、例えば、標数 2 の体上のシバリー群のほとんどの場合に、仮定できる。（注3. 参照）

§2. 個々の単純型における定理 1'. の証明.

定理 1'. の証明には、実に多くの数学者が携わってきたが

その一部を列挙すると、

- 階数の大きな奇標数のシバリー群　J. Walter
- 階数の大きな標数2のシバリー群　G. Seitz
- 交代群　R. Solomon, M. Harris
- 散在型　R. Solomon, L. Finkelstein et al.
- 階数の小さな標数2のシバリー群
  五味・山田・宮本　et al.

以下は、1979年夏、カリフォルニア大学サンタクルツ校で開かれたシンポジウム当時、残されていた（プレプリント以上のものがなかったもの）型と、それを証明した（その型の場合に、定理1'. を証明した）人の名である。

I. 標数2のシバリー群

$L_3(4)$	Aschbacher, Seitz
$\widehat{U_6}(2)$	Hunt ?
$\widehat{\Omega_8^+}(2)$	江川
${}^2\widehat{E_6}(2)$	Stroth
$F_4(2)$	Seitz ?
${}^2F_4(2)'$	Aschbacher
${}^2F_4(2^{2n+1})$	宮本
$G_2(4)$	Aschbacher, Seitz
$\Omega_8^-(2)$	Alward

II. 奇標数のシバリー群

$U_3(3)$	Harris
$L_4(3)$	鈴木(寛)
$U_4(3)$	Aschbacher
$G_2(3)$	山田

III. 散在型

$\hat{F}_2$	Griess ?
F_3	Syskin
$\hat{M}(22)$	江川

注6. 上の表で、疑問符のついているものは、筆者が確認できなかったもので、その他にも、$\Omega_6^-(3)$, $P\Omega_7(3)$, $P\Omega_8^\pm(3)$ は、証明した人の名を確認できなかったが、現時点では、すべて、証明されているとの事である。(Gorensteinよりの、間接的情報による。)

§3. 定理1'. の証明とその方針

定理1'. の証明のあらすじを考える。

L を、X 型の標準部分群とする。C(L) は、L が、標準部分群であることにより、定義2. の条件 ② をみたす。

従って、特に、$C(L)$ の 2－シロー群 R は、単位群ではなく、定理1′の仮定 ② により、巡回群としてよい。t を R の位数2の元とすると、定義2．の条件 ③ と、R が $C(L)$ のシロー群で、巡回群であることから、$C(t) \leq N(L)$ が、みちびかれる。これにより、$F^*(C(t)/O(C(t))) \cong R * L$ が得られ、$C(t)/O(C(t))$ の構造を知ることができる。

次に、$C(t)$ の性質から G の性質を調べ、$F^*(G)$ が何であるかを決めるのであるが、$F^*(G)$ が単純という条件は、実際には用いにくいので、普通 $O(G)=1$、つまり、奇数位数の G の正規部分群は単位群に限るとのみ仮定し（これも省くこともあるが、この仮定は、全くテクニカルな仮定である）証明をすすめる。この場合、$F^*(G)$ が、単純群となる場合の他に、$t \in Z(G)$ で、$L=E(G)$ なる場合と、$F^*(G) \cong L \times L$ となる二つの場合が起こる。前者は、Z^*－定理、後者は、product fusion なるものを調べて扱うことが多いが、特に、後者を扱うのが、定理1′の証明が一般に長くなる一つの原因である。

$C_G(t)$ の、どの性質に注目するかは、いつも問題であるが、最終的に、$F^*(G)$ を決定しやすい情報を見つけ出すとしか、言えないようである。

L	$\Omega_8^+(2)$	${}^2F_4(2^{2n+1})$	${}^2F_4(2)'$
	(江川)	(宮 本)	(Aschbacher)
$E(G)$	L $L\times L$ $\Omega_8^+(4)$ $M(22)$	L $L\times L$ $F_4(2^{2n+1})$ 現在は $G\neq O^2(G)$ まで	L $L\times L$ $F_4(2)$

上の表は、標数2型の場合のいくつかの例であるが、$E(G)$ として現われるのもほとんど、標数2型のシバリー群であるため L の、したがって $C(t)$ の、放物型部分群 H_i 達を考え、その $O_2(H_i)$ の正規化群を調べて、G の放物型部分群 H_i を得、H_i 同志の関係から G の (B,N)-対を構成する方法が、しばしば用いられるようである。

奇標数のシバリー群の場合も、$E(G)$ として得られるものは、殆ど、奇標数のシバリー群であるが、放物型部分群が、2-局所部分群（2-群の正規化群）ではないので、今のところ、これを扱う方法は得られていない。これに対して、G の classical involution と呼ばれる位数2の元（t とは異なる）に目をつけ、その中心化群を求めて、G を決定する方法は、一般的に用いることの可能な方法である。

次の二つは、この方法に関係した定理である。

定義5. $\underline{\mathfrak{M}}$ を、次の様な群全体の集合とする。すなわち、$H/O(H) \cong SL(2,3)$ であるか、または、$H=H'$, $H/Z^*(H)$ は、奇数標数の単純シバリー群で $Z^*(H)$ は偶数位数を持ち、$H/Z^*(H) \cong PSL(2n,p^r)$, $PSU(2n,p^r)$ なる場合は、更に、$|Z^*(H)|_2 = |M(H/Z^*(H))|_2$ であるとする。ここで $M(H/Z^*(H))$ は、$H/Z^*(H)$ の シュアーマルティプライアーをあらわすものとする。

定理3. z を単純群 G の位数2の元とし、$C_G(z)$ は連正規な、$\underline{\mathfrak{M}}$ に属する部分群で、z を含むものをもつとする。この時、G は、奇標数のシバリー群か、または M_{11} に同型である。

定理4. $W=\{1,z_1,z_2,z_3\}\cong E_4$ を群 G の部分群とする。もし、$C_G(W)$ が、連正規な、$\underline{\mathfrak{M}}$ に属する部分群 L_1, L_2 で、$z_1\in L_1$, $z_2\in L_2$ なるものをもてば、G は、単純群ではない。

注7. 上の二つの定理は次の論文による。

M. E. Harris, Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order, to appear.

注8. 定理3. は、Aschbacher による、Classical involution による、奇標数シバリー群の特徴づけの拡張である。

注9. 定理4. は、定理3. の系で、$E(G) \cong L \times L$ なる場合に、有効である。

§4. 型 $L_4(3)$ の場合

この節では、実際に、型 $L_4(3)$ の場合、$E(G)$ 従って $F^*(G)$ としてどんな群があらわれ、また、具体的に証明に用いられる部分群は、どんなものであるかを述べる。記号は前節のものをそのまま用いる。

$\lvert R \rvert > 2$ の場合	二次形式	t	$\mathfrak{M}$ の元
$P\Omega_8^-(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$

$\lvert R\rvert = 2$ の場合	二次形式	τ	$\mathfrak{M}$ の元
$L_4(9)$		体同型	$SL(2,9)$
$L_6(3)$		$\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}$ ×グラフ同型	$SL(2,3)$ $SL(4,3)$
$U_6(3)$		体同型	$SL(2,3)$, $SU(4,3)$
$P\Omega_7(3)$	$\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$P\Omega_8^+(3)$	$\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&&&&&&\\1&-1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$PSp_8(3)$	$\begin{bmatrix}&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&1\\-1&&&&&&&\\&-1&&&&&&\\&&-1&&&&&\\&&&-1&&&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&-1&&&\\&&&&&-1&&\\&&&&&&-1&\\&&&&&&&-1\end{bmatrix}$	$SL(2,3)$ $Sp(4,3)$

上の表の第一列は、L, $L\times L$ 以外で、$E(G)$ としてあらわれる群。第二・三列は、おのおのの場合、τ として何をとるかであり、最終列は、定理3 を用いる場合、適用できる 連正規な部分群としてあらわれるもの、波線をつけたものは、実際に、証明に用いた群である。$P\Omega_7(3)$ については、G' の 2－シロー群が A_{12}－型であり、$G' = E(G)$ をシロー群による特徴づけを用いて得た。

上の表の様に多くの群があらわれるのは、次の同型によるものであろう。 $L_4(3) \cong P\Omega_6^+(3)$

注10。　上の表にあらわれた群は、すべて、その自己同型群が、単純型 $U_4(3)$ でもある。

IN $C_G(t)$	IN G	IN $E(G)$	$E(G)$
$\|R\| > 2$	$2^6 \Sigma_8$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^-(3)$
$\|R\| = 2$	$2^5 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t))=5$	$2^5 \Sigma_6$	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9)$, $L_6(3)$
$2^5 \Sigma_5$	$2^5 2^4 \Sigma_5$	$(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$L_4(3) \times L_4(3)$
$\|R\| = 2$	$2^6 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t))=6$	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_5)$	$2^6 A_7$	$P\Omega_7(3)$
$2^6 \Sigma_5$	$2^6 \Sigma_6$ (直既約)	$2^5 \Sigma_6$	
	$2^6 \Sigma_6$ (直可約)	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9)$, $L_6(3)$
	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_6)$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^+(3)$
	$2^6 2^4 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4)\Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$
	$2^6 2^5 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4)\Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$

上の表は、G の2－シロー群、さらに、$E(G)$ の2－シロー群を得るのに用いられた 2－局所部分群の表である。

実際の証明には上記のフラットフォームと呼ばれる基本ア

ーベル群の正規化群の他に、カスプフォームと呼ばれるエクストラスペシャル型の２−群の正規化群（これが最終的に定理３．を適用できる位数２の元 z を中心に持つ）を考察する。まず、$C_G(t)$ の２−局所部分群（上の表 第一列の $2^5\Sigma_5$ や $2^6\Sigma_5$）をとり、その極大正規２−群の正規化群としておこる群の可能性を考えると、上の表 第二列の可能性がある事がわかり、それぞれに場合分けし、カスプフォームと見比べて ２−群の正規化群を順次とって、G の２−シロー群を得る。次に、$E(G)$（フュージョンシンプルの部分）の２−シロー群を、移送を用いて決める。殆どの場合 $t \notin E(G)$ である。最後に、$E(G)$ の２−シロー群の中で、共役関係を調べ、定理３．を適用できる位数２の元の中心化群を決定し $E(G)$ を得る。

以上が、証明の大体の筋道であるが、小さな部分での t の他の元との共役関係は本質的である。

§5. おわりに

単純群分類の最後はすべて、局所解析的手法によってなされたようである。証明の局所的改訂の価値には疑問も多いが、最後に、筆者の単純な疑問の形でいくつかの問題を記す。

1.　標準部分型問題において、どこまでアルゴリズム化できるか。

2.　定理1'の証明で、$B(G)$ どころか、U も仮定できるか。$O(C_G(t))=1$ なる時、表現論は適用可能か。

3.　一般に、$V\cdot A$、$V \cong E_{2^n}$、$C(V)=V$、$(VA)' \cap V \lneq V$ のような 2-局所部分群 VA を持つ群 G が、単純になる条件は何か。§4. の最後の表で、二列目の 2-局所部分群からすぐ $t \notin G'$ かどうかがわかれば、例えば定理1'の証明は 1/3 程度以下になるであろう。