数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 106-111

p-Block と置換表現について

北大 理学部 池田 正

§1

Gを有限群、pを素数、Xを可移G-空間、BをGのp-blockとする。この時Bに属している既約指標のうちどのようなものがXから作られる置換表現のirreducible constituentとして現れるかを調べることは興味深いと思われる。ここではまずどのような時にBに属している既約指標がXの置換表現内に現れるかについて述べる。

以下記号として次のものを用る。

(k, R, F)をmodular系とし、$\mathrm{char}\, k=0$ $F=R/\pi R$、$\mathrm{char}\, F=p$, k, FともGに関して分裂体とする。

$H=\mathrm{Stab}_G(x)$ $x\in X$

この時 G-空間として $H\backslash G \cong X$ となる。

$e=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$, $\{g_1,\cdots,g_s\}=\mathrm{Rep}(H\backslash G/H)$ $g_1=1$

$A\ni 1$を可換環として、AXを置換AG-加群とする。

§ 2

Curtis - Fossum[1], Scott[2] によると、置換表現を考える時に中心になるものとしてその centralizer ring がある。まず centralizer ring についてよく知られている次の補題を述べておく。

補題 1　$eRGe$ は R-free R-algebra となり、その standard basis として

$$A_i = \frac{1}{|H : H \cap H^{g_i}|} e g_i e \qquad i = 1, 2, \cdots s$$ がとれる

特に、$eRGe$ の原始巾等元と $\overline{eRGe} = eRGe/\pi eRGe$ の原始巾等元は 1 対 1 に対応する。

上で述べた $eRGe$ のことを X の R 上の centralizer ring とよび

$$eRGe \cong End_{RG}(RX) \quad , \quad \overline{eRGe} \cong End_{FG}(FX)$$

となっている

次の補題は容易にえられる

補題 2

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & Z(RG) & \longrightarrow & Z(eRGe) \\ & \Psi & & \Psi \\ & u & \longmapsto & ue \end{array}$$

は R-algebra homomorphism である

以上のことを用いて §1 で最後に述べたことに対する判定条件を求めてみると次のようになる。

<u>命題1</u>　Bに対応するRGのblock idempotentを fとする．この時 Bに属する既約指標のうち 少くとも1つがkXのirreducible constituentとして現れるための必要十分条件は$\varphi(f)\neq 0$となることである。

更に Bに属するirreducible characterを次のようにすると

$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m, \zeta_{m+1}, \cdots, \zeta_n$, $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$はkXのirreducible constituentとして現れる

ζ_iによってassociateされるkGのcentral primitive idempotentをh_iとして

$$\varphi(f) = \varphi(h_1) + \cdots + \varphi(h_m)$$

となる．

（証明の概略） $\zeta_i \in B$となる必要十分条件はh_iがfの直交巾等元分解の中に現れることである．一方 $kX \cong (k_H)^G$より $(k_H)^G$のcanonical decompositionの式（Serre Th8）を用いて$\zeta_i | (1_H)^G$となる必要十分条件は $h_i e = \varphi(h_i) \neq 0$となることがわかる．以上を用いて 上の主張をえる　||

今，L. Scottによると $ekGe$のbasis A_iに対し 次のようにG-空間 $(H\backslash G)\times(H\backslash G)$のG-orbit O_iが1対1に対応していることが知られている

$$O_i = (Hg_1, Hg_i)^G \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

この時 Wielandtによると ζを任意のkXのirreducible constituent として

$$\nu_p(\zeta(1)) \leq \max_{1\leq i\leq s} \nu_p|O_i| \qquad (\nu_p(\ )\text{ は }(\ )\text{ 内の } p\text{-part})$$

となることがわかっている。この形の命題として 次のものが 命題Iの系として与えられる。

<u>系</u> f を block B に対応する RG の block idempotent で、$\varphi(f)\neq 0$ とする。

$$f = \sum_C a_C \hat{C} \quad (C\text{ は }G\text{ の conjugate class})$$

$$\varphi(\hat{C}) = \sum_{i=1}^{s} b_i^C A_i \qquad b_i^C \in \mathbb{Z}$$

の時 $\quad a = \max\{\nu_p|O_i| \mid b_i^C \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p) \text{ for some } \bar{a}_C = 0\}$

とすると ある $\zeta_i \in B$ があって $(1\leq i\leq m)$

$$\nu_p(\zeta_i(1)) \leq a$$

となる。

証明は $\varphi(f)\neq 0$ より $\overline{\varphi(f)}\neq 0$ となる事実と Curtis-Fossum[1] による式

$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s} \frac{\zeta_j(1)}{|O_i|}\zeta_j(A_i)A_i$$

の2つを用いて示される。

§3

§2 の命題1によると $\varphi(f)$ の形を調べてみる必要がでてくる。それに対する一つの解答として 上の系で用いた式があるが、ここでは 別の見方で $\varphi(f)$ の形を求め、その

一つの応用を述べてみる.

<u>命題 2</u> $\qquad \varphi(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{C}\sum_{j=1}^{m}\zeta_j(1)\zeta_j(x_C^{-1})|Hx_i\cap C|\right)A_i$

但し $x_C \in C$ とする

(証明の概略) Scott [1] によると

$$\varphi(\hat{C}) = \sum_{i=1}^{s}|Hx_i\cap C|A_i$$

となることが知られている 一方

$$f = \sum_{C}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|G|}\zeta_j(1)\zeta_j(x_C^{-1})\hat{C}$$

はわかっているので 命題 1 を応用すると上の式をえる。//

この命題 2 を応用することによって $\varphi(f)$ の係数に関する次のような関係式をえることができる.

<u>系</u> $\qquad \varphi(f) = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i A_i \quad (\lambda_i \in R)$ として

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i|H:H^{g_i}\cap H| = \begin{cases} 1 & B \text{ が principal block の時} \\ 0 & \text{その他の時} \end{cases}$$

(証明) Hg_iH にはいっている H の right coset 全体を

$$X_0 = \{Hg_ih_1, Hg_ih_2, \cdots, Hg_ih_t\} \quad h_i \in H. \ h_1 = 1$$

として $X = \{Hg_ih_j\cap C \mid Hg_ih_j \in X_0\}$ とおく

X に H を conjugate action で作用させるとその作用は可移的になる. よって

$$|Hg_i\cap C|\,|H:H^{g_i}\cap H| = |Hg_iH\cap C|$$

よって 命題 2 を用いて

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i|H:H^{g_i}\cap H| = \sum_{i=1}^{s}\sum_{C}\sum_{j=1}^{m}\frac{\zeta_j(1)}{|G|}\zeta_j(x_C^{-1})|Hg_iH\cap C|$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\zeta_j(1)\sum_{C}\frac{\zeta_j(x_C^{-1})}{|G|}|C|$$

一方
$$\sum_{C}\frac{1}{|G|}\zeta_j(x_C^{-1})|C| = \begin{cases} 1 & \zeta_j = 1_G \\ 0 & \zeta_j \neq 1_G \end{cases}$$

以上をまとめて 上の系をえる //

§4

命題1よりどのような f に対し $\varphi(f)\neq 0$ となるかということを詳しく調べるのが重大となるが それに対する よい判定条件を私は知らない. §3 のことを用いても B が principal block の時はよいという当然の結果しかでてこない. principal block 以外の block について何かよい判定条件は えられないか? また 置換表現に限らず 単項表現についても 上の §3 のようなことが 成立するかなどを考えてみる必要がある。

Reference. [1] Curtis-Fossum "On Centralizer Ring and Characters of Representations of Finite Groups" Math. Z. 107

[2] Scott "Modular Permutation Representations" Trans. A.M.S. 175