数理解析研究所講究録
第425巻 1981年 15-30

Invariance Relation の導出について

茨城大 情報工学科　　森　雅夫

1. 序論

待ち行列システムにおいて、$L=\lambda W$ のように、到着やサービスの分布形，規律，システムの型に関係なく成立するような関係式を *invariance relation* と呼ぶ。この小論では，幾通りかの *invariance relation* の導出の方法とそれにより導かれたいくつかの結果を紹介する。

2. 直感的方法

Krakowski(1973)は，物理学では質量，エネルギー，モーメント，電荷などに関して保存の法則(conservation law)が成り立ち，それよりシステムに関する大局的な関係式が得られていることに注目し，待ち行列システムにおいても，何らかの量に関する Conservation rule が成り立ち，それを利用した解析方法があってもよいと考え，きわめ

て直感的に議論を進めている。たとえば，系が定常状態にある任意の観測時点において，そのとき系内にいるすべての客のそれまでの滞在時間の平均は不変であり，保存されていると考える。いま，

$\tilde{T}(t)$ = tにおいて系にいる客のそれまでの滞在時間の和とおくと，

$$E(\tilde{T}(t+\Delta)) - E(\tilde{T}(t)) = 0$$

となるということである。このΔ間の増分の期待値は，到着する客がΔだけ滞在する分　$\lambda\Delta\cdot\Delta$と，tにおいて平均L人いた客がΔだけ滞在する分　$L\cdot\Delta$であり，減少分は退去する客が今までの自分の滞在時間(の平均) Wを持ち出す分であり $\lambda\Delta\cdot W$ となる。これより

$$\lambda\Delta^2 + L\cdot\Delta - \lambda\Delta\cdot W = 0$$

となり

$$L = \lambda W$$

を得る。

この他，いくつか保存される量を考え，手短に面白い関係式を導いているが，議論に厳密さに欠けその後の発展は難しい。

3. Sample average による方法

この方法は Little (1961) により最初に用いられ，行列の長さ $\{q(t)\}$ や待ち時間過程 $\{w_n\}$ が強定常過程をなすという条件の下で

$$L_q = \lambda W_q \qquad (1)$$

が導かれた。Brumelle (1971) もほとんど同様な仮定の下で，G/G/C に対して，

$$\text{残り work load の平均} = \lambda E(s_0 w_0) + \lambda E(s_0^2)/2 \qquad (2)$$

などの関係を導いている。ここで s_0 はサービス時間を表わす。さらに、Brumelle (1972) は、行列の長さの高次のモーメントに関する関係式をも得ている。たとえば，GI/G/C のとき，行列長の k 次の binomial moment は

$$E\binom{L_q(t)}{k} = \lambda \int_0^\infty M^{(k-1)}(x)\{1 - W(x)\}\,dx \qquad (3)$$

で与えられる。ここで $M^{(k)}(x)$ は到着間隔分布の再生関数の k 次の畳み込みであり，$W(x)$ は待ち時間分布である。

sample average による方法には Jewell (1967)

のように persistent な再生点を利用するやり方などもあるが，以下では limiting average の存在だけを仮定する Stidham & Heyman (1980) の方法を簡単に紹介しておこう。

待ち行列過程に関連して考えられる量 $f_n(t, \omega)$ を考える。

これに対して

$$g_n(\omega) = \int_0^\infty f_n(t, \omega)\,dt \quad , \quad h(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega, t)$$

とおく。これらの sample average を

$$G(\omega) = \lim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_n(\omega) \quad , \quad H(\omega) = \lim \frac{1}{T}\int_0^T h(t, \omega)\,dt$$

とおく。このとき次の定理を得る。

（定理）次の(i),(ii)を満定する $0 \leq \tau_n(\omega) < \infty$ が存在するものとする。t_n を n 番目の客の到着時点とすると，

(i) $t \notin [t_n(\omega), t_n(\omega) + \tau_n(\omega)] \Longrightarrow f_n(\omega, t) = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega)/n = 0$

さらに，(iii) $f_n(t, \omega) \geqq 0$ (iv) $\int_0^\infty f_n(t, \omega)\,dt \leq \infty$

が成り立つとする。このとき，$\lambda(\omega)$, $G(\omega)$ が存在し，

$0 < \lambda(\omega) < \infty$, $G(\omega) < \infty$ であれば

$$H(\omega) = \lambda(\omega)\,G(\omega) \tag{4}$$

が成り立つ。また，ω に関係なく $\lambda(\omega) = \lambda$ となれば，それらの期待値の間に

$$H = \lambda G \tag{5}$$

が成り立つ。

$f_n(t, \omega)$ が負値を許す場合についても同様の結果が成り立つ。

たとえば，$f_n(t, \omega)$ として

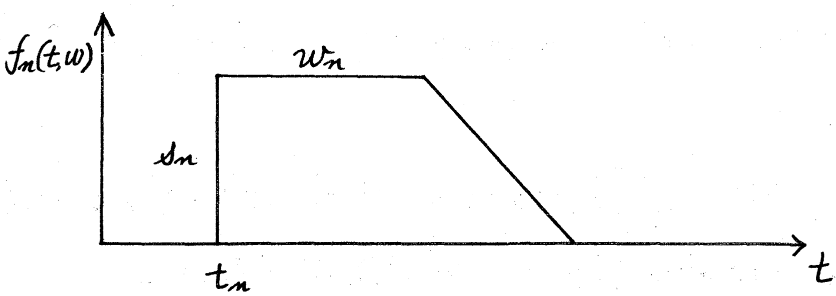
$$f_n(t,\omega)=\begin{cases}1 , & \text{客}n\text{が時刻}t\text{で行列に並んでいる}\\ 0 , & \text{その他}\end{cases}$$

とおくと

$$g_n(\omega) = w_n(\omega) = \text{客}n\text{の待ち時間}$$

$$h(t,\omega) = q(t,\omega) = \text{時刻}t\text{での行列の長さ}$$

となり，式(1)を得る。また $f_n(t,\omega)$ を下図のようにとると式(2)を得る。



このやり方では，$f_n(t,\omega)$としてもっと色々な量を考えることにより，興味深い関係式を得る可能性が残されている。

3. 事象の読み換えなど通常の方法

各客の到着時点を

$$\cdots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < 0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots$$

とおく。時刻0における行列の長さ $q(0)$ に対して

$$\{q(0) \geqq k\} = \{w_{-k+1} + t_{-k+1} > 0\} \qquad (k \geqq 0)$$

という事象の関係式が成り立つ。いま，GI/G/C で系が定

常状態にあるとすると，これより

$$P\{q \geqq k\} = \int_0^\infty H_k(x)\, dP\{w \leqq x\} \tag{6}$$

という分布の間の関係式が求まる（Haji & Newell (1971)）。ここで，$H_k(x)$は到着時点列のk次の backward recurrence time の分布関数である。これより，式(1)，(3)などを容易に導くことができる。

Mori (1980) はこの事象の関係式を細分した

$$\{q(0) = k\} = \{w_{-k} + t_{-k} \leqq 0 < w_{-k} + \theta_{-k} + t_{-k}\}$$

を利用して

$$P\{q \geqq k\} = \lambda \int_0^\infty [P\{w_1 + \theta_1 > x\} - P\{w_1 > x\}]\, A_k(x)\, dx \tag{7}$$

という(6)とは異なるタイプの関係式を導いた。ここで，$A_k(x)$は到着分布のk次の畳み込みである。θ_1は

$$\theta_1 = \min(s_1, w_{12} - w_1, w_{13} - w_1, \cdots, w_{1c} - w_1)$$

であり，$(w_1, w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1c})$は 小さい順に並べた待ち時間ベクトルである。

たとえば，$M/G/c$ のとき，式(6)と(7)と合せて利用することにより

$$E w_1^n = \frac{\lambda}{n+1}\left[E(w_1 + \theta_1)^{n+1} - E w_1^{n+1}\right] \tag{8}$$

というような ポラチェック・ヒンチンの公式を一般化した式が得られる。この他いくつかの応用が示されている。

これらより古く，Kiefer & Wolfowitzは到着直前の行列の長さq^-に関して

$$P\{q^- \geqq k\} = \int_0^\infty A_k(x)\, dP\{w_i \leqq x\} \tag{9}$$

と関係を得ている。Marshall & Wolff(1971)や森(1971)は式(6)や(9)をもとにして，到着直前及び任意時点での行列の長さの分布やモーメントの関係を調べている。

また，Mori(1973)はセミ・マルコフ過程の理論を用いて，仮待ち時間ベクトルと待ち時間ベクトルとの関係式を導いている。GI/G/C の仮り待ち時間ベクトルを

$$\mathcal{V}(t) = (v_1(t),\ v_2(t),\ \cdots,\ v_c(t))$$

とし，待ち時間ベクトルを

$$\mathcal{W}_n = (w_{n1},\ w_{n2},\ \cdots,\ w_{nc})$$

とすると，定常状態において

$$v \sim R(w + sJ - \tau I)^+ \tag{10}$$

という関係が成り立つ。ここで〜は分布が等しいことを表わし，Rはベクトル値を小さい順に並べかえるoperatorである。$I = (1, 1, \cdots, 1)$，$J = (1, 0, \cdots, 0)$であり，sはサービス時間，τは到着分布の余命を表わしている。

Lemoine(1973)はGI/G/1 に対して，別な方法で(10)とそれに類似する式を導いている。

以下ではより一般な入力をもつ待ち行列系に対して，点過

程を用いて議論する方法について述べる。入力が独立性を満さない場合でも，以上と同様な結果が導かれることがわかろう。

4. Inversion formulaを用いる方法

ここでは，Miyazawa (1979, 1980), Franken (1976) らの方法を簡単に紹介する。

marked point process $\xi=\{(t_i, s_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$を考える。$\{t_i\}$は各客の到着時点を表わし，$\cdots<t_{-1}<t_0<0<t_1<t_2<\cdots$とする。$s_i$は到着時点$t_i$に附随して運ばれるサービス時間を表わす。$T^u$を $T^u\xi=\{(t_i+u, s_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$なるshift operatorとする。このとき，ξに関連して定義される待ち行列に関するある量$\{X(t)\}$が定常過程として構成できる(Miyazawa (1979))。

いま，$\{t_i\}$に関するcounting measureを

$$N(A)=\sum \chi_{\{t_i\in A\}} \qquad (A\text{は}R_1\text{上の集合})$$

とする。χ_BはBのindicator functionである。このとき，Nに関するPalm measureは

$$P(B)=\frac{1}{\lambda}E\left[\int_0^1 \chi_{\{T^u B\}}N(du)\right] \tag{11}$$

と定義される。ここで，$\lambda=EN[0,1]$であり，

$$T^{u}B = \{\xi : T^{-u}\xi \in B\}$$

である。各到着間隔を $T_i = t_{i+1} - t_i$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) とおくと，$\{(T_i, \nu_i, X(t_i))\}$ は P_N に関して定常な確率変数列となる。

式(11)に対する Inversion formula として，いく通りかの表現が考えられるが（Miyazawa (1979) 参照），ここでは次の形の式を考える。

$$P(B) = \lambda E_N\left[\int_0^{T_1} \chi_{\{T^{-u}B\}}\, du\right] \tag{12}$$

これを利用して

（ある量の time average）$= \lambda$（ある量の customer average）

の種々の形を導くことができる。

式(12)を確率過程 $\{X(t)\}$ に適用すると次の定理を得る。

いま，$t_1 \leq t \leq t_2$ の間で

$$\tilde{X}(t) = X(t)$$

となるような確率過程 $\tilde{X}(t)$ が $t \geq t_1$ で存在するものとする。

（定理）任意の事象 A に対して，$\{\omega : \tilde{X}(t) \in A\}$ が $t \geq t_1$ に対して単調非増加で ϕ に収束するとき

$$P\{X(0) \in A\} = \lambda E_N\left[\int_0^{\infty} \left(\chi_{\{\tilde{X}(u) \in A\}} - \chi_{\{\tilde{X}(u+T_1) \in A\}}\right) du\right] \tag{13}$$

が成り立つ。

この定理の応用として，G/G/C の行列長 $q(t)$ の過程を考える。

$$X(t) \equiv q(t) = \sum_{-\infty}^{n} \chi_{\{w_i + t_i > t\}} \qquad (t_n \leq t < t_{n+1})$$

とおき

$$\tilde{X}(t) = \sum_{-\infty}^{1} \chi_{\{w_i + t_i > t\}}$$

とおくと

$$\{\tilde{X}(t) \geqq k\} = \{w_{-k+2} + t_{-k+2} > t\}$$

となり，定理の条件を満す。これをもとにして

$$P\{q \geqq k\} = \lambda E_N[(w_1 - (T_1 + T_2 + \cdots + T_{k-1}))^+ - (w - (T_1 + \cdots + T_k))^+] \quad (14)$$

を導くことができる。これは式(6)の一般な場合に相当す。待ち時間ベクトルと仮待ち時間ベクトルの間においても

$$P\{v > x\} = \lambda E_N\Big[\int_0^\infty (\chi_{\{R(w_1 + s, J) > u\mathrm{I} + x\}} - \chi_{\{w_1 > u\mathrm{I} + x\}})\, du\Big] \quad (15)$$

という，式(10)を一般化した関係式を得ている。

この Inversion formula を用いる方法は，入力に独立性などの仮定のない一般の場合に対しても形式的に扱える点，強力な方法といえる。だが得られた結果の解釈にやや難があるように見える。

5. Intensity conservation principleによる方法

Cohen (1977)はGI/GI/1 の仮待ち時間過程において、あるレベルを上、下にクロスする(up, or down-crossing)回数の頻度を比較することにより、式(10)のような待ち時間分布と仮り待ち時間分布との間の関係式を得た。 また、Kuczura (1973)は piece wise Markov 過程に対して、同様な考えで、intensity conservation principle を導き、それを利用して、あふれ呼のあるモデルに対して、任意時点における状態確率と、到着時点における確率の関係を求めている。これにより呼損率が計算できる。

ここでは、もう少し一般の場合についても同様の原理が成り立ちそれらが有効に使えるという König 他 (1978), König & Schmidt (1980) らの方法を簡単に紹介する。

そもそも intensity conservation principle とは、到着などでジャンプの生ずる imbedded な時点、及び過程が連続的に変化するそれ以外の任意の時点をもひっくるめて、平衡状態では

ある状態から出て行く率＝その状態に入ってくる率

の関係が成り立つことを意味する。

状態空間 (E, $\mathcal{E}$) をもつ強定常過程 $\{X(t)\}$ を考える(た

とえば，仮待ち時間過程など）。いま，到着時点列などのように，R_1上で単調に増加する確率変数$\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$を考え，$\xi=\{\tau_i,[X(\tau_i),X(\tau_i+0)]\}$が stationary marked point process となるものとする。このとき，$(K,\mathcal{K})\equiv(E\times E,\ \mathcal{E}\otimes\mathcal{E})$を mark space と呼び，このような過程$\{X(t)\}$を stationary process with an imbedded marked point process (PMP) とする。また，この$\{\tau_i\}$を basic points と呼び，ξを basic point process とも呼ぶ。

4節と同じように，τ_iの counting measure を$N(\cdot)$とし

$$\lambda\equiv\lambda(K)\equiv\lambda(E\times E)=EN[0,1]$$

とおく。Nに関する Palm measure をP_Nとすると，$A,B\in E$に対して

$$P_N\{\xi:\ X(\tau_1)\in A,\ X(\tau_1+0)\in B\}=\frac{\lambda(A,B)}{\lambda}\tag{16}$$

となる。ここで，$\lambda(A,B)$は区間$[0,1]$上で，imbedded な時点τ_iが生じたとき，その前後で$X(t)$が状態Aから状態Bに変化する回数の（単位時間当りの）平均を表わす。

basic points $\{\tau_i\}$間において，過程$\{X(t)\}$の振舞いが次の推移確率

$$P_h(x,A)=P\{X(u+h)\in A\mid X(u)=x,\ \tau_i\notin[u,u+h],\ \text{すべての}i\text{について}\}\tag{17}$$

で記述されるものとしよう。ここで，$x \in E$ であり，$A \in \mathcal{E}$ である。また，$\{X(t)\}$ の定常分布を

$$P^*(A) = P\{X(t) \in A\} \qquad (A \in \mathcal{E}) \tag{18}$$

と表わすと，次の intensity conservation principle を得る。

（定理）　任意の事象Aに対して

$$G_r(A) = \lambda(A, A^c) - \lambda(A^c, A) \tag{19}$$

が成り立つ。ここで

$$G_r(A) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\left[\int_E p_h(x, A) P^*(dx) - P^*(A)\right] \tag{20}$$

で与えられる。

König ら (1978) はこの定理を利用して，客種が幾通りかある場合の系 $\vec{G}/\vec{GI}/1$ について，仮待ち時間と待ち時間の関係を得ている。K^* 種の客があるとし，タイプ i の客のサービス時間分布を $B_i(x)$，その平均を μ_i とする。この余命分布を

$$B_{Ri}(x) = \frac{1}{\mu_i}\int_0^x \{1 - B_i(u)\}\, du$$

とする。いま，各サービス時間は互いに独立であるとする。このとき仮待ち時間 v の分布は

$$P\{v \leqq t\} = 1 - \rho + \sum_{i \in K^*} \rho_i W_i * B_{Ri}(t) \tag{21}$$

で与えられる。ここで，$W_i(x)$はタイプiの客の待ち時間分布であり，ρ_iはタイプiの到着率をλ_iとすると，$\rho_i = \lambda_i \mu_i$であり，$\rho = \sum_{i \in K^*} \rho_i$で与えられる。この関係式は，Lemoine (1973) の結果の拡張である。窓口が複数の場合にも，類似な関係式が与えられている。

また，König & Schmidt (1980)は，同様な方法で，系内人数（または系内のwork load）によって，サービスのスピードの異なる$G/G/C/r$の系に対しても式(15)と類似な関係式や，到着時点や任意時点における系内人数の分布の関係などを調べているが，結果が複雑なので省略する。

KönigらによるIntensity conservation principleによる方法は，客種がいろいろあるなど複雑な系を取扱うのに強力だが，計算が繁鎖であるように見える。

参考文献

Brumelle, S. L. (1971) On the relation between customer and time averages in the queues, *J. Appl. Prob.* 8, 508-520.

Brumelle, S. L. (1972) A generalization of $L = \lambda W$ to moments of queue length and waiting time, *Opns. Res.* 20, 1127-1136.

Cohen, J. W. (1977) On up- and down crossings, *J. Appl. Prob.* 14, 1405-1410.

Franken, P. (1976) Einige Anwendungen der Theorie Zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie I, *Math. Nachr.* 70, 309-319.

Haji, R. and G. F. Newell (1971) A relaction between stationary queue and waiting time distribution, *J. Appl. Prob.* 8, 617-620.

Heyman, D. P. and S. Stidham (1980) The relation between customer and time averages in queues, *Opns. Res.* 28, 983-994.

Kiefer, J. and J. Wolfowitz (1955) On the theory of queues with many servers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 80, 470-501.

König, D., T. Rolski, D. Schmidt and D. Stoyan (1978) Stochastic process with imbedded marked point process (PMP) and their application in queueing, *Math. Operation-forsch. Statist. Ser. Optimization* 9, 125-141.

König, D. and V. Schmidt (1980) Imbedded and non-imbedded stationary characteristics of queueing systems with varying service rate and point processes, *J. Appl. Prob.* 17, 753-767.

Krakowski, M. (1973) Conservation methods in queueing theory, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Operat. Ser. Veret.* 1, 63-84.

Kuczura, A. (1973) Piecewise Markov processes, *SIAM J. Appl. Math.* 24, 169-181.

Lemoine, A. J. (1974) On two stationary distributions for stable GI/G/1 queue, *J. Appl. Prob.* 11, 849-852.

Little, J. D. C. (1961) A proof of queueing formula $L = \lambda W$, *Opns. Res.* 18, 383-387.

Marshall, K. T. and R. W. Wolff (1971) Customer average and time average queue length and waiting times, *J. Appl. Prob.* 8, 535-542.

Miyazawa, M. (1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications, *J. Appl. Prob.* 16, 332-346.

Miyazawa, M. (1980) Simple derivation of the invariance relations and their applications, *Res. Rep. of Dept. of Inform. Sci., Science Univ. of Tokyo.*

森 (1971) Littleの公式及び分散の関係, 日本OR学会秋季アブスト.

Mori, M. (1973) A note on a (J , X)-process with continuous state space and its applications to the queueing theory, *Res. Rep. of Dept. of Information Science B-2, Tokyo Institute of Technology.*

Mori, M. (1980) Relations between queue-size and waiting-time distributions, *J. Appl. Prob.* 17, 822-830.