数理解析研究所講究録
第425巻 1981年 71-82

Regenerative Simulation について

筑波大 社会工学系 逆瀬川浩孝

0、待ち行列現象のような確率過程のモデルは、ちょっと複雑にすると解析的には解けないので、シミュレーション解法を用いるということになるが、シミュレーションによって数値的に解くということは、一般に考えられているような程、単純なことではない。シミュレーションをすれば一応の答が計算されるが、それは統計的な実験の一つの結果としてたまたま得られただけであって、真の解とのズレ、すなわち、その答の精度が計算されなければならないが、これはかなりやっかいな仕事である。乱数を使って得られた一つ一つのサンプルパスデータは、お互いに相関を持っているので、独立標本にもとづく推定理論が適用できないからである。

しかし、ある種のかなり包括的な条件を満足する確率過程のシミュレーションに対しては、大標本法にもとづいて解の精度を計算することができる、ということを示したのが、以

下に述べる regenerative (simulation) method である。

1. 独立同分布に従う正の確率変数列 $\{a_n\}_n$ を使って

$$T_0 = 0 \; ; \; T_n = a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と表されるような確率変数列 $\{T_n\}_n$ を再生時点列と言い、T_{n-1} から T_n までの時間間隔のことを n 番目の再生周期と呼ぶことにする。確率過程 $\{X(t) \,;\, t \geqq 0\}$ が再生時点列 $\{T_n\}$ に関する regenerative process であるとは、$(X(T_n+t_1), \cdots, X(T_n+t_k))$ の同時分布と、$(X(t_1), \cdots, X(t_k))$ のそれとが、すべての n, k, $0 < t_1 < \cdots < t_k$ について等しいことである。例えば、GI/G/S で、時刻 t における系内客数を $X(t)$ とし、時刻 $T_0 = 0$ に空の系に客が到着したと考え、$(n+1)$ 番目の busy period の開始時点を T_n とすれば、$\{T_n\}$ は再生時点列となり、$\{X(t)\}$ は $\{T_n\}$ に関して上の条件を満たすから regenerative process になる。さて、このような $\{X(t)\}$ は、$t \to \infty$ の時、適当な条件の下で、ある確率変数 X に弱収束することが知られているが (Miller 1972)、この X から導びかれる特性量のパラメータをシミュレーションによって推定する問題を考える。すなわち、$f(\cdot)$ をある可測関数としたとき、

$$\theta = E[f(X)]$$

を、長さ有限の見本関数 $\{X(t;\omega);\ 0\leq t\leq T\}$ から推定するにはどうしたらよいか、という問題である。例えば、

$f(x)=x$; $f(x)=\mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ （定義関数） ; $f(x)=\mathbb{1}_{[t,\infty)}(x)$

とすれば、θ はそれぞれ $E(X)$; $P(X=0)$; $P(X\geq t)$ となる。

2. $\{X(t)\}$ を再生時点列 $\{T_n\}$ に関する regenerative process とした時、確率変数列 $\{Y_n\}_n$, $\{Z_n\}_n$ を次式によって定義する。

$$Y_n=\int_{T_{n-1}}^{T_n} f(X(t))\,dt \quad ; \quad Z_n=T_n-T_{n-1}$$

この時、$\{(Y_n, Z_n)\}_n$ が独立同分布に従う確率変数列になることは容易にわかる。また、適当な条件の下で

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))\,du \longrightarrow E[f(X)]=\theta \quad \text{w.p.1} \quad (t\to\infty)$$

$$但し \quad E|f(X)|<\infty \qquad \cdots(1)$$

あるいは、

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} f(X(u))\,du=\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sum_{k=1}^n Z_k}\to\theta \quad \text{w.p.1} \quad (n\to\infty) \quad \cdots(2)$$

となることが言えるが、(2) の等式の右辺の分母・分子を n で割ったものは、大数の法則により、それぞれ $E(Z_1)$, $E(Y_1)$ に収束するので、結局

$$\theta=\frac{E(Y_1)}{E(Z_1)}$$

が言える。したがって、θ は独立標本 $\{(Y_n, Z_n)\}$ を使って、

例えば

$$\hat{\theta}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n\right) \Big/ \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n\right) \qquad \cdots(3)$$

によって推定することができる。この $\hat{\theta}_N$ は θ に関する一致推定量となり、$E(\hat{\theta}_N)$は、$N\to\infty$ の時 θ に収束することが保証されている。(3) 式の右辺は (2) 式の左辺で $n=N$ とおいたものであり、従来よく用いられていた (1) 式の左辺の形の推定量との見かけ上の違いは、シミュレーションの停止時刻をある特定のものに限ったという点だけであるが、こうすることによって $\hat{\theta}_N$ の精度を計算することができるようになる。いま、$U_n = Y_n - \theta Z_n$ とおけば、$\{U_n\}_n$ は平均0分散一定（これを σ^2 とおく）の独立同分布に従う確率変数列であるから、これに中心極限定理をあてはめれば、

$$P\left(\frac{\sqrt{N}\,\bar{Z}}{\sigma}\left(\hat{\theta}_N - \theta\right) \leq x\right) \longrightarrow \Phi(x) \qquad \cdots(4)$$

但し $\bar{Z} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

が言えるので、θ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\left[\ \hat{\theta}_N - \frac{z_\alpha}{\sqrt{N}}\frac{\sigma}{\bar{Z}}\ ,\ \hat{\theta}_N + \frac{z_\alpha}{\sqrt{N}}\frac{\sigma}{\bar{Z}}\ \right] \qquad \cdots(5)$$

但し $z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

によって与えられる。σ が未知の場合は、次の式で定義される s によって推定すればよい。

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left\{\sum(Y_i - \bar{Y})^2 - 2\hat{\theta}_N \sum(Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z}) + \hat{\theta}_N^2 \sum(Z_i - \bar{Z})^2\right\}$$

このように $\hat{\theta}_N$ の精度は標本の数、すなわち再生周期の数の

平方根に比例することがわかるから、これをもとに、あらかじめ決められた精度の推定を得る為に必要な標本の大きさを求めることができる。すなわち、信頼区間の巾を信頼係数 $1-\alpha$ で 2δ におさえる為には、

$$N(\delta;\alpha) = \left(\frac{z_\alpha}{\delta}\right)^2\left(\frac{\sigma}{z}\right)^2$$

より大きな標本が必要である。

3、多くの待ち行列過程は適当な補助変量を考えることによってマルコフモデル化が可能であり、マルコフモデルは、ある特定の状態に推移したという時点が再生時点になり、この時点列に関して regenerative process とみなすことができるから、上記の方法は、待ち行列モデルのシミュレーションのもつわずらわしさを回避する有力な解決策を与えているかのようにみえる。実際、いくつかの「簡単な」モデルに適用して、その有効性を確かめた数値例が報告されている。それらは GI/G/1 モデル，機械修理工のモデル、待ち行列網モデル等であるが、少数の例外を除いて、状態数が数十から百ぐらいの（セミ）マルコフモデルであり，もっと複雑なモデルに適用する為には解決されなければならない幾つかの問題点がある。その最大のものは、与えられた確率過程のモデルから、再生時点列をどのようにして見出すかということであ

ろう。シミュレーションの推定の精度を考えると、この再生時点の間隔は適当に短いものでなくてはならないが、複雑なモデルではこのような時点列を見出すのは、かなりむずかしい。$\hat{\theta}_N$ が θ の不偏推定量でないことからも、いくつかの問題が提起される。シミュレーションは有限の、それも余り多くないデータにもとづいて推定しなければならないので、極限の性質である推定量の一致性が言えただけでは駄目で、偏りの大きさがどれだけ速く 0 になるか、ということが判らないと役に立たない。一方、$\hat{\theta}_N$ より偏りの少ない別の推定量を構成することができるか、ということも課題の一つになる。

4、$\hat{\theta}_N$ の分散は、漸近的にサンプルサイズ N に反比例するから再生時点の数が余り多くない場合は、精度の良い推定が期待できない。これを改善する方法として分散減少法がある。regenerative method の場合は、制御変量法が有効であるという例がいくつか報告されている。（Iglehart et al. 1979 他）

独立同分布に従う確率変数列 $\{C_n\}_n$ で、各 C_n は $T_{n-1}-T_n$ で定義されており、その平均が解析的に計算できるようなものとする。この時、θ の推定量として次のようなものが考えられる。

$$\hat{\theta}_N^{(c)}(\beta) = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n'\right) \Big/ \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n\right)$$

但し　$Y_n' = Y_n + \beta(C_n - E(C_1))$

この推定量は $\hat{\theta}_N$ 同様、θ の一致推定量になるが、β として

$$\beta^* = -\operatorname{Cov}(U_1, C_1) / \operatorname{Var}(C_1) \quad ; U_1 = Y_1 - \theta Z_1$$

をとれば、その漸近分散は最小になり次式で与えられる。

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_N^{(c)}(\beta^*)) \rightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{\sigma}{\bar{z}}\right)^2 (1 - \rho^2(U_1, C_1))$$

この式から判るように、C_n として $Y_n - \theta Z_n$ と相関の高いようなものが選べれば、推定の精度を良くすることができる。例えば、単一窓口モデルで待ち時間を推定する場合、busy period の開始時点を再生時点にできるが、この時 C_n として、busy period の長さ、あるいは busy cycle の長さ、等とすることによって、分散を減少させることができるが、一般的にこのような量を見出すことはむづかしい。

制御変量法の特別な場合として、θ の異なる不偏推定量の線形結合によって θ を推定する方法がある。マルコフモデルに限って、異なる推定量を構成する方法が示されているが(Heiderberger 1980)、これも一般化するのは容易なことではない。

GI/G/S モデルのシミュレーションに限って言うと、系内保留時間W，系内客数L，待ち客数Q，サービス負荷V は直接推定するよりも、列待ち時間Dの推定値から次の式を使

って推定した方が分散が小さくなる、ということが証明されている（Carson & Law 1980）。

$$W = D + E(S), \quad L = W/E(A), \quad Q = D/E(A)$$

$$V = E(S)\cdot D/E(A) + E(S^2)/2\cdot E(A)$$

但し、A, S はそれぞれ到着間隔・サービス時間を表わす。

これも制御変量法の一種と言える。

マルコフモデルに対する分散減少法のテクニックとして、再生周期間の推移をひとまとめにした推移確率行列をあらかじめ計算しておき、それにもとづいてシミュレーションを行うという、「時間圧縮法」とでも呼べるような方法が提案されているが、推移確率行列を計算するという前処理に結構時間がとられ、大きい問題には余り有効とはならないようである。（Heidelberger 1979）

5．分散減少法は、現在のところ余り汎用性がなく、精度を良くする為にはサンプル数を増す以外に方法はなさそうであるが、決められた時間内に得られる再生周期の数は限られたものでしかない。これに対して再生周期を増やす為の近似的な方法が提案されている。いま問題にしている確率過程は、その再生時点で状態をuからひに変化させるものとしよう。

この時、uを含む任意の集合Uと、vを含む任意の集合Vを選び、確率過程の状態がUの要素からVの要素に変化したことをもって再生と考え、2節のように推定する。いいかえれば、この方法は、もとの regenerative process における再生周期を、ある基準によっていくつかに分割し、それらの一つ一つを再生周期と考えて上記の推定方法を適用する方法と言える。このようにして得られた、云わば擬似再生周期は真の再生周期と異なり互いに独立でないが、(3)式の形の推定量はθの一致推定量となり、$\hat{\theta}_N$と同様の漸近正規性を持つことが言える(Gunther & Wolff 1980)。擬似再生周期が殆んど独立とみなせるような時点列がうまくとれれば、独立標本にもとづく推定法によって近似的に精度をおさえることができるが、さもなければ、(5)式の形の推論はサンプル数が少ない時、その正当性が保証できない。分散あるいは平均自乗誤差を厳密に評価する為には、擬似再生周期間の系列相関係数の大きさを知る必要がある。系列相関については、一般の議論どころか、個別のモデルについても計算することはむづかしく、この推定法の実際の精度は数値実験によって験証するしか方法はないが、いくつかの、それ程小規模でない、真の再生周期がかなり長い幾つかのモデルについて数値実験した結果では、十分に実用的な精度が得られることが確められ

た。しかし、実際の問題に適用される為には、再生周期の分割の仕方、すなわち U, V の選び方と精度の関係などについて、更に議論を深化させる必要がある。

6. 推定量の偏りを量的に評価する方法は、扱うモデルごとの数値実験によるしかないようであるが、偏りの少ない推定量を工夫する試みはなされていて、jackknife 法と呼ばれる推定法が、いくつかの実験で好結果をもたらした、という報告がある（Iglehart 1976）。　サンプルサイズが小さい時、確かに偏りは少なくなっているが、サンプルサイズが大きくなると、$\hat{\theta}_N$ による場合との差はわずかで、その推定のわずらわしさ（総てのサンプルを記憶しておく必要がある）を考えると、$\hat{\theta}_N$ による推定で十分のように思われる。

7. Regenerative method に関係する文献を年代順に並べたリストを以下に載せる。journal に発表されたものに限定したが、この他にも、technical report あるいは会議録の形で多くの数値実験例が報告されていることを注意しておく。

BIBLIOGRAPHY

1972

Miller,D.R. (1972), Existence of limits in regenerative processes. Ann. Math. Statist. 43.4, 1275-1282.

1974

Crane,M.A. and Iglehart,D.L. (1974), Simulating stable stochastic systems, I:General multiserver queue, II:Markov chains, JACM 21, 103-113, 114-123.

Fishman,G.S. (1973), Estimation in multiserver queueing simulations, OR 22,72-78.

1975

Crane,M.A. and Iglehart,D.L. (1975), Simulating stable stochastic systems, III:Regenerative processes and discrete event simulations, OR 23, 33-45, IV:Approximation techniques, Mgmt Sci. 21, 1215-1224.

Iglehart,D.L. (1975), Simulating stable stochastic systems, V:Comparison of ratio estimators, Naval Res. Logist. Quart. 22, 553-565.

Lavenberg,S.S. and Slutz,D.R. (1975), Introduction to regenerative simulation, IBM J. Res. Develop. 19, 458-462.

Lavenberg,S.S. and Slutz,D.R. (1975), Regenerative simulation of a queueing model of automated tape library, IBM J. Res. Develop. 19, 463-475.

1976

Iglehart,D.L. (1976), Simulating stable stochastic systems, VI:Quantile estimation, JACM 23, 347-360.

1977

Crane,M.A. and Lemoine,A.J. (1977), An Introduction to the Regenerative Method for Simulation Analysis, Springer.

Iglehart,D.L. (1977), Simulating stable stochastic systems, VII:Selecting the best system, TIMS Studies in Management Sci. 7, 37-49.

Lavenberg,S.S. and Sauer,C.H. (1977), Sequential stopping rules for the regenerative method of simulation, IBM J. Res. Develop. 21, 545-558.

1978

Iglehart,D.L. (1978), The regenerative method for simulation analysis, Current Trends in Programming Methodology Vol.3 (Chandy,M. et al. eds.), 52-71.

Iglehart,D.L. and Shedler,G.S. (1978), Regenerative simulation of response times in networks of queues, JACM 25.3, 449-460.

Iglehart,D.L. and Shedler,G.S. (1978), Simulation of response times in finite capacity open networks of queues, OR 26, 896-914.

1979

Heiderberger,P. (1979), A variance reduction technique that increases regeneration frequency. Current Issues in Computer Simulation (N.A.Adam et al. Eds.) (Academic), 257-269.

Heiderberger,P. and Iglehart,D.L. (1979), Comparing stochastic systems using regenerative simulation with common random numbers, Adv. Appl. Prob. 11, 804-819.

Iglehart,D.L. and Shedler,G.S. (1979), Regeneratve simulation of response times in networks of queues with multiple job types, Acta Inform. 12, 159-175.

Iglehart,D.L. and Lewis,P.A.W. (1979), Regenerative simulation with internal controls, JACM 26.2, 271-282.

Lavenberg,S.S., Moeller,T.L. and Sauer,C.H. (1979), Concomitant control variables applied to the regenerative simulation of queueing systems, OR 27.1, 134-160.

1980

Carson,J.S. and Law,A.M. (1980), Conservation equations and variance reduction in queueing simulations, OR 28.3, 535-546.

Gunther,F.L. and Wolff,R.W. (1980), The almost regenerative method for stochastic system simulations, OR 28.2, 375-386.

Heiderberger,P. (1980), Variance reduction techniques for the simulation of Markov processes, I: Multiple estimates. IBM J. Res. Develop. 24.5, 570-581.

Iglehart,D.L. and Shedler,G.S. (1980), Regenerative Simulation of Response Times in Networks of Queues, Springer.