数理解析研究所講究録
第425巻 1981年 106-127

待ち行列システムの最適制御

京大 工・数理 大野 勝久

1. 序論

待ち行列システムはケンドールの記号に示されるように、客の到着過程、サービス分布、サーバー数、サービス規律等を与えることで規定される。したがってその制御としては、

(i) 到着過程の制御

(ii) サービス率の制御

(iii) サーバー数の制御

(iv) 優先権等の制御

が考えられる。待ち行列システムの最適制御における中心的な課題は、これら制御方法が定められた時、システムの全利得を最大にする最適制御政策がどのような性質を持つかを示し、それを決定することである。

待ち行列システムの最適制御に関する Survey paper としてはすでに[8],[19],[25]があり、文献表としては[9]

が知られている。本報告では、上記（i）～（iii）の制御方法にたいして，その最適制御政策の単調性等々性質がどのようにして導かれるかに焦点を絞り，できるだけ統一的に紹介したい。したがって、（iv）の問題あるいは待ち行列システムの最適設計等に関しては［8］，［9］を参考にされたい。

待ち行列システムの最適制御問題は、通常マルコフあるいはセミ・マルコフ決定過程として定式化される。次節では、まず準備としてセミ・マルコフ決定過程にたいするSchäl［20］の結果を述べ，最適制御政策が状態に関して単調になる条件［23］を紹介する。3，4節では2節の結果を用い、（i）到着過程の制御，（ii）サービス率の制御，にたいして最適制御政策の性質とその導出法を示す，5節では、（iii）サーバー数の制御を扱かい、Sobel［25］等の結果を紹介する。最後に結論として残された問題について簡単にふれる。

2．セミ・マルコフ決定過程

セミ・マルコフ決定過程は以下に与えられる（（$S,\sigma(S)$），（$A,\sigma(A)$），D,q,β,r）によって定められる［12］。

（i）（$S,\sigma(S)$）は状態空間であり、Sは完備な可分距離空間のボレル部分集合，$\sigma(S)$はSの全てのボレル部分集合の集りである。

（ii）（$A,\sigma(A)$）は決定(制御)空間であり、Aは完備な可分距

離空間のボレル部分集合，$\sigma(A)$ はAの全てのボレル部分集合の集りである。

(iii) DはSからAの全ての空でない部分集合への写像であり、$D(s)$ は状態sでとりうる決定の集合を与える。ただし、

(2.1) $K=\{(s, a)\in S\times A;\ a\in D(s)\}$

は $\sigma(S)\times\sigma(A)$ 可測であり、SからAへの可測な写像のグラフを含むものと仮定する。

(iv) q はKから$(S, \sigma(S))$の全ての確率測度の集合（以下 $P(S)$ で表わす）への写像であり、$q(s, a;\cdot)$ は状態sで決定aをとった時遷移する次の状態の分布を与える。

(v) β は $K\times S$ 上の非負値有界可測関数であり、割引率を与える。$P(s, a, s'; \tau)$ で状態sで決定aをとり状態s'へ遷移した時の遷移時間τの分布を表わせば、$\alpha\geq 0$ にたいして

(2.2) $\beta(s, a, s')=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}P(s, a, s'; d\tau)$

である。

(vi) rは $K\times S$ 上の上に有界な可測関数であり，利得を与える。$R(s, a, s'; \tau)$ で状態sで決定aをとり状態s'へ遷移する時τでえられる利得を表わすことにすれば、

(2.3)　$r(s,a,s';\tau)=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}R(s,a,s';\tau)P(s,a,s';d\tau)$

である。

全ての確定的な政策の集合を

(2.4)　$D^S=\{f;\ f:(S,\sigma(S))\to(A,\sigma(A)),\ f(s)\in D(s)\}$

で表わせば、マルコフ政策は $n\in\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ にたいして $f_n\in D^S$ となる系列 $\{f_n\}$ であり、定常政策は $f_n=f\ (n\in\mathbb{N})$ となるマルコフ政策 f^∞ である。実際興味があるのは定常政策であるが、一般的な政策としては $(s_1,a_1,\cdots,s_n)$ に依存する確率的な政策を考える必要がある。すなわち、

(2.5)　$H_1=S$, $H_{n+1}=H_n\times K\ (n\in\mathbb{N})$

で H_n を定義すれば、一般的な政策 $\pi=(\pi_n)$ は、任意の $(s_1,a_1,\cdots,s_n)\in H_n$ にたいして $D(s_n)$ 上で確率1をとる $\pi_n:H_n\to P(A)$ の系列として与えられる。$(s_1,a_1,\cdots,s_{n+1})\in H_{n+1}$ が与えられた時 n 期における利得 r_n は

(2.6)　$r_n(s_1,a_1,\cdots,s_n)=\beta(s_1,a_1,s_2)\cdots\beta(s_{n-1},a_{n-1},s_n)r(s_n,a_n,s_{n+1})$

で与えられる。したがって政策 π のもとでの全期間にわたる総平均費用 $I(\pi)$ は

(2.7)　$I(\pi)=E_\pi[\sum_{n=1}^\infty r_n]$

で表わされる。問題は一般的な政策の集合 Δ のなかで $I(\pi)$ を最大にする政策を求めることである。すなわち最大利得 v^*

(2.8) $u^* = \sup_{\pi\in\Delta} I(\pi)$

を与える政策を定めることである。ここで $n \in \mathbb{N}$ にたいして

$$I_n(\pi) = E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} r_i\right]$$

(2.9)

$$u_n = \sup_{\pi\in\Delta} I_n(\pi), \quad u_0 = 0$$

とおけば、u_nはn期間における最大利得を与える。

(2.10) $u_\infty = \liminf_{n\to\infty} u_n$

とおき、さらに $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ にたいして

$$I_{mn}(\pi) = E_\pi\left[\sum_{i=m}^{n} r_i\right]$$

(2.11) $u_{mn}(\pi) = \sup_{\pi\in\Delta} I_{mn}(\pi)$

$$z_m = \sup_n u_{m+1,n}$$

とおく。ただし、$n < m$にたいしては$I_{mn}(\pi)=0$である。以下次の条件

(C) $z_m(s) \to 0$ as $m \to \infty$, $s \in S$

を仮定する。この条件は

(N) $r \leqq 0$

あるいは

(D) $0 \leq \beta < 1$, $\|r\| \triangleq \sup_{x\in K\times S} |r(x)| < \infty$

であれば、常に成立し、

(P) $r \geqq 0$

であれば、$\sup_{\pi\in\Delta} E_\pi\left[\sum_{i=n}^{\infty} r_i\right] \to 0$ (as $n\to\infty$) が (C) の必要十分条件となる。

任意の関数 $u: S \to \underline{R}$ ($-\infty$ を付加した実数の集合) にたいして

$$
\begin{aligned}
(2.12)\quad Lu(s,a) &= \int q(s,a;ds')[r(s,a,s')+\beta(s,a,s')u(s')],\ a\in D(s)\\
L_f u(s) &= Lu(s,f(s)),\ f\in D^S\\
\nabla u(s) &= \sup_{a\in D(s)} Lu(s,a),\ s\in S
\end{aligned}
$$

を定義する。このとき次の定理が成立する。

(2.13) 定理 [20]

条件 (C) がなりたてば

(i) f^∞ が最適政策であり、$u_\infty = u^*$ となるための必要十分条件は

$$L_f u_\infty = u_\infty$$

である。

(ii) f^∞ が最適政策となる必要十分条件は

$$L_f u^* = u^*$$

である。

ここで、最適決定の集合 $\Gamma^*(s)$, $\Gamma_n(s)$ を $s\in S$ にたいして

$$
(2.14)\quad
\begin{aligned}
\Gamma^*(s) &= \{a\in D(s);\ Lu^*(s,a) = \sup_{a'\in D(s)} Lu^*(s,a')\}\\
\Gamma_n(s) &= \{a\in D(s);\ Lu_{n-1}(s,a) = \sup_{a'\in D(s)} Lu_{n-1}(s,a')\}
\end{aligned}
$$

で定義し、

(2.15) $\Gamma_\infty(s) = \{a\in A;\ a$ は $a_n\in\Gamma_n(s)$ をみたす系列 $\{a_n\}$ の集積点である$\}$

とおく．$C(A)$でAの全ての空でないコンパクト部分集合の族を表わすことにし、次の条件(W)を考える。

(W 1) $D(S)\subset C(A)$であり、$D: S\to C(A)$は上半連続である。

(W 2) $q: K\to P(S)$は w－連続である。すなわち、任意の有界連続関数vにたいして$\int v(s')q(s,a;ds')$は(s,a)に関して連続である．

(W 3) rは$K\times S$上の上に有界な上半連続関数であり、βは$K\times S$上の有界連続関数である．

(W 4) Aは局所コンパクトである．

(2.16) 定理[20]

条件(C)および(W)がなりたてば

(i) $u_\infty(s)=u^*(s),\quad s\in S$

(ii) $\Gamma_\infty(s)\subset\Gamma^*(s),\quad s\in S$

(iii) 最適定常政策f^∞が存在し、$f(s)\in\Gamma_\infty(s),\ s\in S$である．

定理(2.16)は(2.9)式で与えられるu_nにたいして

$$u_n(s)=Lu_{n-1}(s,f_n(s))=\sup_{a'\in D(s)} Lu_{n-1}(s,a')$$

となるf_nの極限が最適定常政策となることを主張している．したがって、あるN以上の全てのnでf_nがある性質をもてば、最適定常政策もその性質をもつことが示される．待ち行列システムの最適制御における最適定常政策が持つ最っとも一般

的な性質は状態にたいする単調性である。f_nへこの単調性を定義するためにA＝Rに限定し、Sに半順序≦を導入する。さらに（2.14）式で与えられるΓ_nを用いて、

（2.17）　$f_n(s) = \sup\{a \in \Gamma_n(s)\} \quad s \in S$

とおく。このとき、任意の$s_1 \leq s_2$にたいして$f_n(s_1) \leq f_n(s_2)$となればf_nは単調（非減少）である。f_nが単調となる条件が次の定理に示される。

（2.18）　定理［23］

$s_1 \leq s_2$にたいして

（i）$D(s_1) \subset D(s_2)$

（ii）$Lu_{n-1}(s_2, \cdot) - Lu_{n-1}(s_1, \cdot)$は$D(s_2)$上で単調非減少である。

となればf_nは単調である。

この定理から（ii）が$n \geq 1$で成立すれば最適定常政策fは単調である。また（ii）において、u_{n-1}をu^*でおきかえた条件がなりたつことが直接示されればfが単調となることも明らかである。（ii）と同様な条件が補題（3.7），（4.5）に現われるであろう。この定理の証明は非常に簡単である。すなわち、f_nの定義より

$$u_n(s_2) = Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_2)) \geq Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_1))$$

$$u_n(s_1) = Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_1)) \geq Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_2))$$

がなりたち、

$$Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_2)) - Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_2)) \geq Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_1)) - Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_1))$$

となることに注意すれば、(ii)と(2.17)式よりただちに f_n の単調性が示される。

3．到着過程の制御

種々のタイプの客を処理するGI/G/1即時系を考える。客の到着時間間隔は分布Fに従い、そのタイプ s $(-\infty<s<\infty)$ は分布Hに従うものとする。サーバーが稼動していない時タイプ s の客が到着すれば、サーバーはその客をサービスするか(accept)あるいはサービスをしないか(reject)を決定する。タイプ s の客をacceptした時その客からえられる利得が x 以下であり、サービス時間が t 以下である結合確率が $G_s(x, t)$ で与えられているものとする。rejectによる損失は考えないものとし、サーバーが稼動中に到着した客は待たずに系を立ち去るものとする。無限期間にわたる期待利得を最大にするにはどのタイプの客をacceptすればよいであろうか?

時点列としてサーバーが稼動していない時の客の到着時点をとり、状態としてその時刻着した客のタイプをとる。したがって状態空間は $S=(-\infty, \infty)$ であり、$a=0$ でrejectを $a=1$ でacceptを表わせば $A=\{0, 1\}$ である。さらに任意の $s \in S$ にたいして $D(s)=A$ である。次の客のタイプはその以前の決定等には独立に分布Hに従うから、$q(s, a)=H$ $(s \in S, a \in A)$

である。(2.2)式より

(3.1) $\beta(s,0,s')=\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}dF(\tau)\triangleq\beta(0)$

であり、客のサービスにt時間要した時次の客が到着するまでの時間τが分布$B(\tau|t)$に従うものとすれば

(3.2) $\beta(s,1,s')=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}dB(\tau|t)dG_s(\infty;t)\triangleq\beta(s,1)$

である。最後に利得がacceptと同時にえられるものとすれば

(3.3) $r(s,0,s')=0$, $r(s,1,s')=\int_{-\infty}^\infty x\,dG_s(x,\infty)\triangleq\bar{r}(s,1)$

で与えられる。

$\alpha>0$, $F(0)<1$を仮定すれば$\beta(0)<1$がなりたち、$B(\tau|t)$がtにおけるexcess lifeの分布を表わすことから$\beta(s,1,s')\leq\beta(0)$である。さらに$|r(s,1,s')|<\infty$ ($^\forall s\in S$)を仮定すれば(D)が成立し、(C)がなりたつ。また条件(W)がなりたつことは明らかであり、

(3.4) $u_n(s)=\max\{\beta(0)\int_{-\infty}^\infty u_{n-1}(s')dH(s'),$

$\bar{r}(s,1)+\beta(s,1)\int_{-\infty}^\infty u_{n-1}(s')dH(s')\}$

とおけば、定理(2.16)より

$\lim_{n\to\infty}u_n(s)=u^*(s)$

がなりたち、最適定常政策が存在する。(3.4)式より$n\to\infty$, $\alpha\to 0$として平均期待利得vにたいする関数方程式

(3.5) $v(s)=\max\{\int_{-\infty}^\infty v(s')dH(s')-g\mu,\ \bar{r}(s,1)+\int_{-\infty}^\infty v(s')dH(s')-g\bar{\mu}(s,1)\}$

がえられる。ここでgは単位時間当りの最大利得であり、

μ, $\bar{\mu}(s,1)$ は各々 (s, 0), (s, 1) からの平均遷移時間を表わす。したがって (3.5) 式より最適定常政策はタイプ s の客を

(3.6) $\quad \bar{r}(s,1)/\{\bar{\mu}(s,1)-\mu\} \geq g$

の時 accept する政策である。[15]. さらに, $\bar{r}(s,1)-g\bar{\mu}(s,1)$ が単調非減少であれば、この政策は s に関して単調である。

類似の問題は [1], [14], [17] [22] [24] でも論じられているが、簡単に [1] を紹介しよう。タイプ s ($-\infty<s<\infty$) の客を扱かう G/M/C 待ち行列システムを考える。C 人のサーバーのサービス分布は各々 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_c$ の指数分布であり、サービス時間は客のタイプによらないものとする。タイプ s の客が到着した時, 全てのサーバーが稼動中であれば客は待ち行列に並び処理されるが、複数人のサーバーが稼動中でなければどのサーバーにその客を割りあてるかを決定しなければならない。タイプ s の客を μ のサーバーが処理した時えられる平均利得を $\bar{r}(s,\mu)$ で表すことにすれば、定理 (2.18) と同様にして次の補題が成立する。

(3.7) 補題

$r(s,\mu)$ が任意の $s_1 \leq s_2$, $\mu_1 \leq \mu_2$ にたいして

(3.8) $\quad r(s_2,\mu_2)-r(s_1,\mu_2) \geq r(s_2,\mu_1)-r(s_1,\mu_1)$

であれば、

（3.9）　$\max_{1\le i\le c}\{r(s,\mu_i)+d_i\}=r(s,\mu_k)+d_k$

となるkにたいして，μ，dに依存する$-\infty\equiv b_0\le b_1\le\cdots\le b_c\equiv+\infty$が存在し，$b_{k-1}\le s\le b_k$がなりたつ。すなわち（3.9）をみたす$k$の最大値は$s$の非減少関数である．

客sが到着し，k人のサーバーが遊休中であり、それらのサーバーの構成等の状態を$\bar{s}$で表わせば、補題（3.7）より，$-\infty\equiv b_0(\bar{s})\le b_1(\bar{s})\le\cdots\le b_k(\bar{s})\equiv+\infty$が存在する。したがって、$b_{j-1}(\bar{s})\le s\le b_j(\bar{s})$であればタイプ$s$の客を$\mu_{i_j}$（$i_1<\cdots<i_k$）のサーバーに割りあてるのが最適定常政策になる。

このように客をサーバーに割りあてる問題（客のreject，accept は仮空のサーバーに客を割りあてることに相当する）は単調な最適定常政策をもっている。しかし，［24］では、待ち時間がTを越えれば待っている客が系を立ち去るM/M/2待ち行列システムにたいして，サービス率の大きいサーバーへ客を割りあてる通常の政策が処理客数を最大にする意味での最適政策にならないことが示されている．

4．サービス率の制御

M/M/1待ち行列システムにおいて客の到着、退去時点でサービス率を制御する問題を考える。状態sとして系内人数をとり、sにおけるとりうるサービス率として$D(s)=A=[\underline{\mu},\bar{\mu}]$

を考える。$\delta(s)=0$ $(s=0)$, $=1$ $(s\neq 0)$ とすれば、

(4.1) $q(s,a,s+1)=\lambda/(\lambda+a\delta(s))$, $q(s,a,s-1)=a\delta(s)/(\lambda+a\delta(s))$

であり、

(4.2) $\beta(s,a,s')=(\lambda+a\delta(s)+\alpha)^{-1}$

である。費用構造として s 人の客の単位時間当り待ち費用を $w(s)$，サービス率 a の稼動費用を $c(a)$ ととれば、

(4.3) $r(s,a,s')=-\{w(s)+c(a)\}/\{\lambda+a\delta(s)+\alpha\}$

である。以下

(i) $w(s)$ は非負値，非減少凸関数である。

(ii) $c(a)$ は非負値，非減少関数である。

を仮定すれば、(N) が成立し、(C) がなりたつ。$u_0=0$ とおき、$n=1,2,\cdots$ で

(4.4) $u_n(s)=\sup_{a\in A}\{Lu_{n-1}(s,a)\}=Lu_{n-1}(s,f_n(s))$

とおく。ここで

(4.5) $Lu(s,a)=\{-(w(s)+c(a))+\lambda u(s+1)+a\delta(s)u(s-1)\}/\{\lambda+a\delta(s)+\alpha\}$

である。

$$Lu_{n-1}(0,a)=\{-(w(0)+c(a))+\lambda u_{n-1}(1)\}/(\lambda+\alpha)$$

であるから (ii) より $\Gamma_n(0)\ni\{\underline{a}\}$ がなりたつ。定理 (2.18) から次の補題がえられる。

(4.6) 補題 [19, 26]

$$Lu_{n-1}(s+1,a_2)-Lu_{n-1}(s,a_2)\geq Lu_{n-1}(s+1,a_1)-Lu_{n-1}(s,a_1)$$

が $\forall s \in S$, $a_1 \le a_2 \in A$ で成り立てば $f_n(s)$ は s に関して単調である。

$s > 0$, $a_1 < a_2$ にたいして

$D(s, a_1, a_2) = Lu_{n-1}(s+1, a_2) - Lu_{n-1}(s, a_2) - Lu_{n-1}(s+1, a_1) + Lu_{n-1}(s, a_1)$

とおけば（4.5）式より

（4.7）　$(\lambda + a_1 + \alpha)(\lambda + a_2 + \alpha) D(s, a_1, a_2) = (a_2 - a_1)(w(s+1) - w(s))$

$+ \lambda(a_2 - a_1)(u_{n-1}(s+1) - u_{n-1}(s+2)) - (\lambda + \alpha)(a_2 - a_1)(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$

がえられる。したがって、$D(s, a_1, a_2) \ge 0$ を示すには（4.7）式右辺 ≥ 0 を示せばよい。（4.7）式右辺を Δ_{n-1} とおけば $\Delta_0 = (a_2 - a_1)(w(s+1) - w(s)) \ge 0$ である。今、$\Delta_{n-1} \ge 0$ を仮定し、$\Delta_n \ge 0$ を導こう。まず、

（4.8）　$\sup_{a \in A}\{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\} \ge u_n(s) - u_n(s+1)$

$\ge \inf_{a \in A}\{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}$

であり、

（4.9）　$\{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}(\lambda + a + \alpha)$

$= w(s+1) - w(s) + \lambda(u_{n-1}(s+1) - u_{n-1}(s+2)) + a(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$

がなりたつ。ゆえに $\Delta_{n-1} \ge 0$ より

$\{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}(\lambda + a + \alpha)$

$\ge (\lambda + \alpha + a)(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$

となり、（4.8）式より

（4.10）　$u_n(s) - u_n(s+1) \ge u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s)$

がえられる。同様に

(4.11) $u_n(s)-u_n(s+1)\leq\{w(s+1)-w(s)+\lambda(u_{n-1}(s+1)-u_{n-1}(s+2))\}/(\lambda+\alpha)$

である。(4.10),(4.11)式より、

$$\Delta_n/(a_2-a_1)=w(s+1)-w(s)+\lambda(u_n(s+1)-u_n(s+2))-(\lambda+\alpha)(u_n(s-1)-u_n(s))$$
$$\geq w(s+1)-w(s)+\lambda(u_{n-1}(s)-u_{n-1}(s+1))-\{w(s)-w(s-1)+\lambda(u_{n-1}(s)$$
$$-u_{n-1}(s+1))\}=\{w(s+1)-w(s)\}-\{w(s)-w(s-1)\}$$

であり、wは凸関数であるから$\Delta_n\geq 0$が示される。したがって補題(4.6)より、任意のn, sにたいして

(4.12) $f_n(s)\leq f_n(s+1)$

がなりたつ。明らかに定理(2.16)が成立し、$\Gamma_\alpha(s)\subset\Gamma^*(s)$であるから最適定常政策$f$も(4.12)式をみたす[26]。

同様な問題が[7],[10],[18],[21],[28]等で論じられている。[28]はサービス率の切り換えに要する費用を考慮しており、[10],[18],[21]はM/G/1待ち行列システムを扱かっている。

5. サーバー数の制御

単一窓口をもつ待ち行列システムにおいて、とりうる決定がサーバーをonあるいはoffするものであるとき、系内人数とサーバーの状態を知って、稼動費用、遊休費用,サーバーのon,offの切換費用,客の待ち費用からなる費用関数を最

小にするにはどのような政策をとればよいかを考える。

Heymen [11] はM/G/1待ち行列系にたいしてこの問題を考察し，セミ・マルコフ決定過程を用いて最適定常政策が存在し、(M, m)政策，常にon，常にoffのいずれかになることを示した。しかし、その証明は不完全であり，Sobel [25] はGI/G/1系にたいしてランダム・ウォーク的な接近を用い(M.m)政策が最適であることを示している。今sで系内人数を表わし、$\underline{s}$, $\bar{s}$でsでサーバーがoff，on状態にあることを表わす。$A=\{0,1\}$とし，0でoff，1でonを表わすことにする。(M.m)政策は$s \leq m$となればoff，$s \geq M$となればonする政策であり，

(5.1) $f(s,a)=0 \ (s \leq m), \ =a \ (m<s<M), \ =1 \ (s \geq M)$

である．任意の定常政策fにたいしてその開始集合B_f，停止集合H_fを

(5.2) $B_f=\{s \in S \mid f(\underline{s})=1\}, \ H_f=\{s \in S \mid f(\bar{s})=0\}$

で定義し、

(5.3) $m_f=\max\{s \in H_f\}. \quad M_f=\min\{s \in B_f \mid s>m_f\}$

とおく。このようにして任意の定常政策fに対して定まる(M_f, m_f)政策を$\bar{f}$で表わせば政策fを用いて状態$\bar{m}_f$に到達した後の状態遷移は政策$\bar{f}$と完全に一致する。したがってfと$\bar{f}$にたいする単位時間当りの平均費用が等しくなる条件を仮

定すれば(M.m)政策が最適であることが示される。Bell [4] はこの結果を用い、平均割引費用を最小にする問題を扱かい [11] を精密化し最適定常政策を与えるアルゴリズムを示した。

サーバー数の制御問題においてはon, offの切換費用を考慮しなければならず、状態に現在実行中の決定をも組みこまなければならない。この点で切換費用を考慮しない3, 4節の問題に比べて解析が困難になってくる。しかしM/G/1あるいはM/M/C待ち行列システムのサーバー数の制御問題にたいして定理(2.18)を適用することは可能であり、実際[13], [16]ではM/M/C待ち行列システムにおける最適定常政策の単調性を示すために利用されている。一方, [5]では(3.5)式と同様な関数方程式から直接単調性が示されている。ただし、[5]ではサーバーのon, offが客の到着あるいはサービス終了直後にのみ行なわれているのにたいして, [13], [16]では一定時間間隔で可能と仮定されている。

以上の結果は全て系の状態として系内人数を考えていたが[2]では仮待ち時間を状態にとり、それをD-政策と名ずけている。このD-政策はサービス開始費用と待ち費用を考えた場合常に(M, 0)政策よりすぐれていることが示されている[3, 6].

6. 結論

待ち行列システムの最適制御は比較的新らしい分野ではあ

るが、[9]にみられるように，待ち行列理論とセミ・マルコフ決定過程とを単純に結びつけて単調性等が示される問題は基本的なものに関する限り出つくしたように思われる。しかし、その多くは単調性を示すにとどまり、示された性質を有効に利用した最適定常政策の決定アルゴリズムは[27]等に論じられているにすぎない。また単調性等が示された問題も現実の待ち行列システムへ適用するには不十分な点が多く残されており、利用可能な情報、費用構造を検討し直すとともにネットワーク等のより現実的な問題への拡張，有効なアルゴリズムの開発が今後の課題であろう。

すでに再々述べたように待ち行列システムの最適制御問題はセミ・マルコフ決定過程として定式化される。有限状態，有限決定のセミ・マルコフ決定過程にたいしては最適定常政策を求めるアルゴリズムとして、逐次近似法，政策反復法，修正政策反復法，線形計画法が知られている。したがって、最適政策の性質を何んら知らなくても、これらアルゴリズムを直接適用することで最適定常政策を数値的に決定することが可能なように思われる。たとえば、M/M/C待ち行列システムにおいて各サーバーのとりうるサービス率がKレベル与えられ，その切換費用を考慮する問題を考える。系内人数をNに制限すれば，とりうる状態の個数は$N \cdot C^K$あるいは$N \cdot K^C$

となるから、$N=50$, $K=5$, $C=5$の時15.6万になる。このような多状態に適用可能なアルゴリズムは可能とすれば、修正政策反復法に限定され、多状態問題に適用できるより有効なアルゴリズムの開発がまたれる現状である。

参考文献

[1] S.C.Albright, "Structure of Optimal Policies in Complex Queuing Systems," Operations Res. 25, 1020-1027 (1977).

[2] K.R.Balachandran, "Control Policies for a Single Server System," Management Sci. 19, 1013-1018 (1973).

[3] K.R.Balachandran and H.Tijms, "On the D-Policy for the M/G/1 Queue," ibid. 21, 1073-1076 (1975).

[4] C.E.Bell, "Characterization and Computation of Optimal Policies for Operating an M/G/1 Queueing System with Removable Servers," Operations Res. 19, 208-218 (1971).

[5] C.E.Bell, "Optimal Operation of an M/M/2 Queue with Removable Servers," Operations Res. 28, 1189-1204 (1980).

[6] O.J.Boxma, "Note on a Control Problem of Barachandran and Tijms," Management Sci. 22, 916-920 (1976).

[7] T.B.Crabill, "Optimal Control of a Service Facility with Variable Exponential Service Time and Constant Arrival Rate," Management Sci.

18, 560-566 (1972).

[8] T.B.Crabill, D.Gross and M.J.Magazine, "A Survey of Research on Optimal Design and Control of Queues," Tech. Paper T-280, The George Washington Univ. 1973.

[9] T.B.Crabill, D.Gross and M.J.Magazine, "A Classified Bibliograply of Research on Optimal Design and Control of Queues," Operations Res. 25, 219-232 (1977).

[10] B.T.Doshi , "Optimal Control of the Service Rate in an M/G/1 Queueing System," Adv. Appl. Prob. 10, 682-701 (1978).

[11] D.P.Heyman, "Optimal Operating Policies for M/G/1 Queuing Systems," Operations Res. 16, 362-382 (1968).

[12] K.Hinderer, "Foundations of Non-stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter," Springer, Berlin, 1970.

[13] C.C.Huang, S.L.Brumelle, K.Sawaki and I.Vertinsky, "Optimal Control for Multi-Servers Queueing Systems under Periodic Review," Naval Res. Log. Quart. 24, 127-135 (1977).

[14] J.Keilson, "A Simple Algorithm for Contract Acceptance," Opsearch, 7, 157-166 (1970).

[15] S.A.Lippman and S.M.Ross, "The Street Walker's Dilemma: A Job Shop Model," SIAM J. Appl. Math. 20, 336-342 (1971).

[16] M.J.Magazine, "Optimal Control of Multi-Channel Service Systems,"

Naval Res. Log. Quart. 18, 177-183 (1971).

[17] B.I.Miller, "A Queuing Reward System with Several Customer Classes," Management Sci. 16, 234-245 (1969).

[18] B.Mitchell, "Optimal Service-Rate Selection in an M/G/$\hat{1}$ Queue," SIAM J. Appl. Math. 24, 19-35 (1973).

[19] N.Prabhu and S.Stidham,Jr., "Optimal Control of Queuing Systems" in "Mathematical Methods in Queuing Theory," pp.263-294, 1974.

[20] M.Schäl, "Conditions for Optimality in Dynamic Programming and for the Limit of n-Stage Optimal Policies to Be Optimal," Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 32, 179-196 (1975).

[21] R.Schassberger, "A Note on Optimal Service Selection in a Single Server Queue," Management Sci. 21, 1326-1331 (1975).

[22] M.Scott, "A Queueing Process with Some Discrimination," Management Sci. 16, 227-233 (1969).

[23] R.F.Serfozo, "Monotone Optimal Policies for Markov Decision Processes," Math. Prog. Studies, 6, 202-215 (1976).

[24] K.Seth, "Optimal Service Policies, Just after Idle Periods, in Two-Server Heterogeneous Queuing Systems," Operations Res. 25, 356-360, (1977).

[25] M.J.Sobel, "Optimal Average-Cost Policy for a Queue with Start-up and Shut-Down Costs," Operations Res. 17, 145-162 (1969).

[26] M.J.Sobel, "Optimal Operation of Queues," in "Mathematical Methods in Queuing Theory," pp.231-261, Springer, 1974.

[27] H.C.Tijms, "An Algorithm for Average Costs Denumerable State Semi-Markov Decision Problems with Applications to Controlled Production and Queueing Systems," pp.143-179, R.Hartley et al. ed. "Recent Development in Markov Decision Processes" Acad. Press, 1980.

[28] S.Zacks and M.Yadin, "Analytic Characterization of the Optimal Control of a Queueing System," J. Appl. Prob. 7, 617-633 (1970).