数理解析研究所講究録
第 426 巻 1981 年 44-53

等質ベクトル束上の不変微分作用素

日本女子大学　峰村　勝弘

対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数の積分表示と関連する話題について，多くの研究があるが，(例えば [1]，[4] を参照.) ここでは，リーマン対称空間上の等質ベクトル束上で類似の問題を考える。とくに帯球函数の類似物については美しい性質がある．

G を連結実半単純リー群で，中心有限なものとし，K を G の一つの極大コンパクト部分群，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ をそれぞれ G，K のリー環とする．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ をカルタン分解，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の一つのカルタン部分空間．$\mathfrak{h}$ を，$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環とする．Φ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$ のルート系で $\Phi^+=\{\beta\in\Phi;\ \beta|\mathfrak{a}\neq 0\}$ とし，$\Phi^-=\Phi\setminus\Phi^+$ とする。又 Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のルート系とする．compatible order を一つ固定し．Σ，Φ の正負のルートのなす部分集合をそれぞれ $\Sigma_\pm$，$\Phi_\pm$ とする。$\mathfrak{n}_\pm=\sum\mathfrak{g}^\alpha\ (\alpha\in\Sigma_\pm)$，$\rho=\frac{1}{2}\sum\alpha\ (\alpha\in\Sigma_+)$，$\rho_-=\frac{1}{2}\sum\beta\ (\beta\in\Phi^-\cap\Phi_+)$，$N_\pm=\exp\mathfrak{n}_\pm$，

$A=\exp\mathfrak{a}$, $M=Z_K(\mathfrak{a})$, $\bar{M}=N_K(\mathfrak{a})$, $W_\Sigma=\bar{M}/M$ とおく．簡単の為，展開環 $U(\mathfrak{g}_c)$, $U(\mathfrak{k}_c)$, $U(\mathfrak{a}_c)$, $U(\mathfrak{n}_\pm)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_\pm$ とかく。岩沢分解 $G=KAN_+$ に対応して $G\ni g=\kappa(g)e^{H(g)}n$ $(\kappa(g)\in K,\ H(g)\in\mathfrak{a})$ と表わす．$\hat{K}$ で K の既約表現の全体を表わす．$(\tau,V)\in\hat{K}$ に対し，I_τ を τ の微分表現の $\mathfrak{k}$ における核とする．τ に同伴する G/K 上のベクトル束 E の超函数切断の全体を $\mathcal{B}(E)$ とするとき．自然に $\mathcal{B}(E)\cong\{f\in\mathcal{B}(G)\otimes V\,;\,f(gk)=\tau(k^{-1})f(g)\}$ となる．M の有限次元表現 δ に同伴するベクトル束を F_δ と書き $\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$ に対して $P=MAN$ の表現 $\delta\otimes e^{-\lambda+\rho}$ に同伴する G/P 上のベクトル束を $F_{\delta,\lambda}$ と書く．$\mathcal{B}(F_\delta)$，$\mathcal{B}(F_{\delta,\lambda})$ は $\mathcal{B}(E)$ と同様である．$\tau\in\hat{K}$ の M への制限 $\tau|_M$ については $F_{\tau|M}$，$F_{\tau|M,\lambda}$ の代りに単に F_τ, $F_{\tau,\lambda}$ と書く．

$\mathbb{D}_\tau=\mathbb{D}_\tau(G/K)$ を，E 上の G－不変な微分作用素全体のなす環とする．$\mu:\mathfrak{g}^K\longrightarrow\mathbb{D}_\tau$ を $D\in\mathfrak{g}^K$ に対して

$$(\mu(D)f)(g)=f(g;D)\qquad f\in\mathcal{B}(E),\ g\in G$$

で定めると μ は環準同型となる．$\mathfrak{g}$ の自然な逆自己同型を ^{T} と書く．

Prop 1. μ は全射で $\operatorname{Ker}\mu=\mathfrak{g}^K\cap\mathfrak{g}I_\tau^T$．従って $\bar{\mu}:\mathfrak{g}^K/\mathfrak{g}^K\cap\mathfrak{g}I_\tau^T\cong\mathbb{D}_\tau(G/K)$ となる．

リーマン対称空間の函数の場合とほぼ同様に，次式でポアソン積分変換 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$ を定める．（［2］参照）

Def.1 $\varphi \in \mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$ に対して

$$(\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\varphi)(g)=\int_K \tau(k)\varphi(gk)dk \quad (g\in G,\ \int dk=1)$$

この時容易に

Lemma 1. $\varphi \in \mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$ に対して

$$(\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\varphi)(g)=\int_K e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\tau(\kappa(g^{-1}k))\varphi(k)dk$$

従って $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\varphi$ は解析的な E 上の切断になることがわかるが，更に $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\varphi$ は次に示すような固有函数的な性質がある。その為に次の記号を導入する．

$R_\tau=\{(\delta,V_\delta)\in\hat{M};[\tau;\delta]\geq 1\}$ とおく．$(\delta,V_\delta)\in\hat{M}$ に対し，H_δ で $\mathrm{Hom}_M(V_\delta,V)$ を表わす．M－同型

$$V\cong\bigoplus_{\delta\in R_\tau}V_\delta\otimes H_\delta$$

により

$$\mathrm{End}_M V\cong\bigoplus_{\delta\in R_\tau}\mathrm{End}\,H_\delta$$

$$F_{\tau,\lambda}\cong\bigoplus_{\delta\in R_\tau}(F_{\delta,\lambda}\otimes H_\delta)$$

$$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})\cong\bigoplus_{\delta\in R_\tau}(\mathcal{B}(F_{\delta,\lambda})\otimes H_\delta)$$

を得る．$\mathrm{End}_M V$ から $\mathrm{End}\,H_\delta$ へ のこの分解による射影を

$$\omega_\sigma : \mathrm{End}_M V \longrightarrow \mathrm{End}\, H_\sigma$$

とおく．#を$\mathfrak{a}$上の$\#(H)=H+\rho(H)$ $(H\in\mathfrak{a})$により定まる自己同型写像とする．

Def. 2. $\omega : \mathfrak{g}^K \ni D \mapsto \omega(D) \in \mathfrak{a}\mathfrak{k}^M$ を $D \equiv \omega(D)$ mod. $\mathfrak{n}_+\mathfrak{g}$ で定め．$\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{k}^M \cong \mathfrak{a}\mathfrak{k}^M$ によりωを$\mathfrak{g}^K$から$\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{k}^M$への写像とみる．（このとき$\omega$は単射環準同型となる．）次の図式により$\omega_\tau$, $\omega_{\tau,\sigma}$, $\omega_{\tau,\sigma,\lambda}$ $(\sigma\in\hat{M}, \lambda\in\mathfrak{a}_c^*)$ を定める．（ここにe_λは$\mathfrak{a}$から$\mathbb{C}$へのevaluation map.）

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^K \arrow[r, hook, "\omega"] \arrow[rrd, "\omega_\tau"] \arrow[rrdd, "\omega_{\tau,\sigma}"'] \arrow[dd, "\omega_{\tau,\sigma,\lambda}"'] & \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{k}^M \arrow[r, "\#\otimes\tau"] & \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{k}^M \arrow[d, "1\otimes\tau"] \\
 & & \mathfrak{a}\otimes\mathrm{End}_M V \arrow[d, "1\otimes\omega_\sigma"] \\
\mathrm{End}\, H_\sigma & & \mathfrak{a}\otimes\mathrm{End}\, H_\sigma \arrow[ll, "e_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}\,\omega_\tau = \mathfrak{g}^K \cap \mathfrak{g}I_\tau^T$ より $\chi_{\tau,\sigma,\lambda}\circ\mu = \omega_{\tau,\sigma,\lambda}$ となる，$\mathbb{D}_\tau$のH_σ上の表現 $\chi_{\tau,\sigma,\lambda}$が唯一つ定まる．

$\mathbb{D}_\tau$-module H_σとG-module $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$のテンソル積は自然に$G$-$\mathbb{D}_\tau$-moduleとなる．そこでポアソン積分$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$を$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$の部分空間$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma$への制限を$\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}$とおけば

Lemma 2. $\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} : \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda}) \otimes H_\sigma \to \mathcal{B}(E)$

$\mathcal{P}_{\tau,\lambda} : \mathcal{B}(F_{\tau,\lambda}) \longrightarrow \mathcal{B}(E)$

は共に G－$\mathbb{D}_\tau$－準同型写像

Lemma 2. により，同時固有函数の類似物として次の定義達を下す。

Def. 3. $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau = \{\varphi \in \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$；$\varphi$ は K の左からの作用で τ に従って変換する. $\}$

$= \{ \varphi \in \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$；$\varphi(g) = d(\tau)\int_K \overline{\mathrm{tr}\,\tau(k)}\,\varphi(k^{-1}g)\,dk$

$\mathcal{B}(E)^\tau$ についても同様とする.

容易に，$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})^\tau = \bigoplus_{\delta \in R_\tau} \mathcal{B}(F_{\delta,\lambda})^\tau \otimes H_\delta$

$\mathcal{B}(F_{\delta,\lambda})^\tau \cong V \otimes H_{\tau,\delta}$ （但し $H_{\tau,\delta} = \mathrm{Hom}_M(V, V_\delta)$）

がわかる. $R(\mathbb{D}_\tau)$ で $\mathbb{D}_\tau$ の有限次元表現全体を表わす.

Def. 4. $(\chi, H) \in R(\mathbb{D}_\tau)$ に対し

$\mathcal{B}(E,\chi) = \{ f \in \mathcal{B}(E)$；$f$ は $\mathbb{D}_\tau$ の下で χ の商表現に従って変換する. $\}$

$\mathcal{B}(E,\chi)^\tau = \mathcal{B}(E,\chi) \cap \mathcal{B}(E)^\tau$

$\mathbb{D}_\tau$ には Casimir 元から来る elliptic な作用素があるので $\mathcal{B}(E,\chi)$ の元は解析的になる. 以下 $\mathcal{B}(E,\chi)$, $\mathcal{B}(E,\chi)^\tau$ の代りに $\mathcal{A}(E,\chi)$, $\mathcal{A}(E,\chi)^\tau$ と書く. Lemma 2. より容易に次の Cor. を得る.

Cor. $\rho_{\tau,\sigma,\lambda}$ は $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma \to \mathcal{A}(E,\chi_{\tau,\sigma,\lambda})$ なる G-準同型を与える.

I で, Def. 3. で帯球函数の類似物 $\mathcal{A}(E,\chi)^\tau$ を定義したが, この場合には精密な結果がある. まず写像を二つ定義する. $(\chi,H)\in R(\mathbb{D}_\tau)$ に対し, $\mathbb{D}_\tau\times\mathcal{A}(E,\chi)\ni(\Delta,f)\mapsto(\Delta f)(e)\in V$ なる bilinear map. から作られる写像 $\mathcal{A}(E,\chi)\longrightarrow V\otimes(\mathbb{D}_\tau/\mathrm{Ker}\,\chi)^*$ を s_χ とする. 従って, 任意の $\Delta\in\mathbb{D}_\tau$ と $f\in\mathcal{A}(E,\chi)$ に対し

$$\langle s_\chi(f),\ \Delta+\mathrm{Ker}\,\chi\rangle = (\Delta f)(e)$$

となる. 次に, (χ,H) が $(\chi_{\tau,\sigma,\lambda},H_\sigma)$ の部分表現と仮定する. (実は任意の $(\chi,H)\in R(\mathbb{D}_\tau)$ はある σ,λ により $(\chi_{\tau,\sigma,\lambda},H_\sigma)$ の部分表現として得られることがわかっている.). 自然な同型と埋め込み

$$(\mathbb{D}_\tau/\mathrm{Ker}\,\chi)\cong \mathrm{Im}\,\chi\subset\mathrm{End}\,H\cong H\otimes H^*\subset(H_{\tau,\sigma}\otimes H)^*$$

の転置として得られる全射 $H_{\tau,\sigma}\otimes H\longrightarrow(\mathbb{D}_\tau/\mathrm{Ker}\,\chi)^*$ を p_χ と書く.

Th. 1. (χ, H) を $(\chi_{\tau,\sigma,\lambda}, H_\sigma)$ の部分表現とする.(既約性を仮定しない.)このとき

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^{\tau}\otimes H & \xrightarrow{\cong} & V\otimes H_{\tau,\sigma}\otimes H \\ \Big\downarrow \rho_{\tau,\sigma,\lambda} & & \text{surj.}\Big\downarrow Id\otimes P_\chi \\ \mathcal{A}(E,\chi)^{\tau} & \xrightarrow[\text{inj}]{S_\chi} & V\otimes(\mathbb{D}_\tau/K_a\chi)^* \end{array}$$

は可換となる. 特に $\chi=\chi_{\tau,\sigma,\lambda}$ が既約ならば

$$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^{\tau}\otimes H\cong V\otimes H_{\tau,\sigma}\otimes H\cong \mathcal{A}(E,\chi)^{\tau}$$

Remark $V(\sigma,\lambda)$ を $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$ の K-finite vector 全体のなす空間とする. このとき $H_\sigma\cong \mathrm{Hom}_K(V^*, V(\sigma^*,-\lambda))$ で $V(\sigma^*,-\lambda)$ が $\mathfrak{g}$-既約ならば H_σ は $\mathfrak{g}^K$-既約となる.

次に $\mathcal{A}(E,\chi)$ の境界値をとるため, 次の様に $\mathcal{A}(E,\chi)$ と同型な空間を導入する. まず $(\chi, H)\in R(\mathbb{D}_\tau)$ が既約と仮定する. H^* を X 上の trivial なベクトル束と考え, ベクトル束のテンソル積 $E\otimes H^*$ を考える. $\mathcal{B}(E\otimes H^*)$ は $\Delta\in\mathbb{D}_\tau$ に対し

$$\Delta_\chi(f\otimes a)=\Delta f\otimes a - f\otimes\chi(\Delta)^t a \qquad f\in\mathcal{B}(E), a\in H^*$$

とおくことにより(リー環)$\mathbb{D}_\tau$-module となる. そこで

$$\mathcal{A}(E\otimes H^*,\chi)=\{F\in\mathcal{B}(E\otimes H^*);\ \Delta_\chi F=0\ \ {}^\forall\Delta\in\mathbb{D}_\tau\}$$

とおくと, 縮約により $\mathcal{A}(E,\chi)\cong\mathcal{A}(E\otimes H^*,\chi)\otimes H$ となる. $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{g}$ の中心とする. γ を $\mathfrak{z}$ から $S(\mathfrak{j}_c)$ の中への Harish-

Chandra iso. とする. λ_σ を $\sigma\in\hat{M}$ の highest weight とする.
容易に $\chi_{\tau,\sigma,\lambda}(Z)=\langle\gamma(Z),\lambda-\lambda_\sigma-\rho_-\rangle\,\mathrm{Id}$ がわかる.
以下, 次の仮定群 (A1)〜(A3) の下で考えるが, 仮定の間の関係はよくわからない. 写像 ω_τ による $\mathfrak{g}^K$ の image の性質を詳しく調べる必要がありそうである. (τ,σ,λ と $w\in W_\Sigma$ を一組固定している)

(A1): $\langle\lambda-\lambda_\sigma-\rho_-,\beta\rangle\neq 0\quad{}^\forall\beta\in\Phi$

(A2): (i) $\chi_{\tau,\sigma,\lambda}$ は既約

(ii) $\chi_{\tau,\delta,\mu}\cong\chi_{\tau,\sigma,\lambda}$ ならば ${}^\exists w_0\in W_\Sigma$

s.t. $\delta=w_0\sigma,\ \mu=w_0\lambda$

(A3): ${}^\forall\alpha\in\Sigma_+$ に対して $-\dfrac{2\langle w\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\notin\{1,2,3,\cdots\}$

仮定 (A1)〜(A3) の下に G-準同型写像

$$\tilde{\beta}_{\tau,w\sigma,w\lambda}:\mathcal{A}(E\otimes H_\sigma^*,\chi_{\tau,\sigma,\lambda})\to\mathcal{B}(F_{w\sigma,w\lambda})\otimes\mathrm{Hom}_{D_\tau}(H_\sigma,H_{w\sigma})$$

が構成される. C を $\mathrm{Hom}_{D_\tau}(H_\sigma,H_{w\sigma})$ の H_σ^* から $H_{w\sigma}$ への縮約とし, $\beta_{\tau,w\sigma,w\lambda}=(\mathrm{Id}\otimes C)\circ\tilde{\beta}_{\tau,w\sigma,w\lambda}$ とおく.
同型 $\mathcal{A}(E,\chi_{\tau,\sigma,\lambda})\cong\mathcal{A}(E\otimes H_\sigma^*,\chi_{\tau,\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma$ により $\beta_{\tau,w\sigma,w\lambda}$ を $\mathcal{A}(E,\chi_{\tau,\sigma,\lambda})$ から $\mathcal{B}(F_{w\sigma,w\lambda})\otimes H_{w\sigma}$ への写像

とみなす．このとき

Lemma 3.　β は $\mathcal{A}(E, \chi_{\tau,\sigma,\lambda})$ から $\mathcal{B}(F_{w\sigma,w\lambda})\otimes H_{w\sigma}$ への G－準同型写像．とくに $w=e$ のときは ポアソン核

$$e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\,\tau(\kappa(g^{-1}k))$$

の $\beta_{\tau,\sigma,\lambda}$ による像は Dirac の delta 函数の定数倍となる．その定数（行列）を $c(\tau,\sigma,\lambda)$ とおくと

$$\beta_{\tau,\sigma,\lambda}\circ\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} = Id\otimes c(\tau,\sigma,\lambda)$$

が成立する．

このLemma 3から次のTh.2.が得られる

Th.2.　仮定(A1)～(A3)（$w=e$）と $\det c(\tau,\sigma,\lambda)\neq 0$ の下に $\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}$ は $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$ から $\mathcal{A}(E, \chi_{\tau,\sigma,\lambda})$ の上への G－同型を与える．

参考文献

[1] Kashiwara, Kowata, Minemura, Okamoto, Oshima and Tanaka; Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space. Ann. of Math., 10 , 1-39 (1978)
[2] Okamoto, K. ; Harmonic Analysis on Homogeneous

Vector bundles, Lecture Notes in Math., Vol. 266, pp. 255–271, Springer-Verlag, 1972

[3] Minemura, K.; Invariant differential operators and spherical sections of a homogeneous vector bundle, preprint

[4] Oshima, T. and Sekiguchi, J.; Eigenspaces of Invariant Differential Operators on an Affine Symmetric Space, Inventiones math. 57, 1–81 (1980)