数理解析研究所講究録
第426巻 1981年 54-63

Lorentz群上の c-関数について

早大 理工　大豆生田 雅一

§0. Notations

$G = Spin(n,1)$ ($SO_0(n,1)$ の double covering group $n \geq 2$) とする。K を G の極大 compact 部分群とすると $K \cong Spin(n)$ となる。又 $Q = MAN$, $G = KAN$ を G の極小放物部分群及び岩沢分解とする。このとき、$M \cong Spin(n-1)$ $(n > 2)$
($n = 2$ のとき、M は G の中心で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型となる。)

$A = \{ a_t = \exp(tH) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$N \cong \mathbb{R}^{n-1} \cong \{ n_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \}$

となる。そこで $x \in G$ の岩沢分解を、

$x = \kappa(x)\, a_{t(x)}\, n_{\xi(x)}$

と書く。又 θ を G の K に関する Cartan involution とするとき $\bar{N} = \theta N$　$\bar{n}_y = \theta n_y$　$y \in \mathbb{R}^{n-1}$ と書く。

次に $\hat{K}$, $\hat{M}$ を各々 K, M の既約ユニタリ表現の同値類全体とすると、これらはその highest weights によって一意

に決定されるから，$\hat{K}$，$\hat{M}$ をそれぞれの highest weights の集合と考えてよい。そこで $\Lambda\in\hat{K}$，$\mu\in\hat{M}$ に対し各々に対応する K, M の表現を $(\tau_\Lambda, E_\Lambda)$ (σ_μ, V_μ) 等と書く。

§1 non unitary principal series 及び intertwining operators.

1.1) non-unitary principal series.

$\mu\in\hat{M}$ に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\mu$ を次の様に定義する。

$\mathcal{H}_\mu=$ $\varphi : K\to V_\mu$ summable で次を満すもの．

(i) $\varphi(km)=\sigma_\mu(m^{-1})\varphi(k)$ $k\in K$, $m\in M$

(ii) $\int_K \|\varphi(k)\|^2_{V_\mu}\,dk<\infty$

但し，$\|\ \|_{V_\mu}$ は V_μ の norm．dk は K 上の normalized Haar measure

そこで．$s\in\mathbb{C}$ に対して G の $\mathcal{H}_\mu$ 上の連続表現 $\pi_{s\mu}$ を．$x\in G$ $k\in K$．$\varphi\in\mathcal{H}_\mu$

$$(\pi_{s\mu}(x)\varphi)(k)=e^{-(s+\rho)t(x^{-1}k)}\varphi(\kappa(x^{-1}k))$$

（ここで $\rho=(n-1)/2$ とする。）

と定義する。

$\Lambda\in\hat{K}$ に対して $\mathcal{H}_\mu(\Lambda)$ を $\pi_{s\mu}$ による type Λ の K-finite vector の全体とする（これは s によらない。）すると

Frobenius の reciprocity theorem より

$$\mathcal{H}_\mu(\Lambda) \simeq (\Lambda : \mu) E_\Lambda \quad (\text{as } K\text{-modules})$$

ここで、$(\Lambda : \mu)$ は τ_Λ の M への制限 $\tau_\Lambda|M$ に属する σ_μ の multiplicity とする。この場合は $(\Lambda : \mu) = 0$ or 1.
となる。従って

$$\begin{cases} \mathcal{H}_\mu(\Lambda) \simeq E_\Lambda & \text{if } (\Lambda : \mu) = 1 \\ \mathcal{H}_\mu(\Lambda) = \{0\} & \text{if } (\Lambda : \mu) = 0 \end{cases}$$

となる。$(\Lambda : \mu) = 1$ のとき、

$P_\mu^\Lambda \; E_\Lambda \to V_\mu$　M-module homomorphism であって $P_\mu^\Lambda P_\Lambda^\mu = id_{V_\mu}$ ($P_\Lambda^\mu = (P_\mu^\Lambda)^*$) となるものは $U(1)$ factor を除いて一意に定まる。そこで isometry

$J_\mu^\Lambda \; E_\Lambda \to \mathcal{H}_\mu(\Lambda)$ を $v \in E_\Lambda$, $k \in K$

$$J_\mu^\Lambda(v)(k) = \sqrt{\frac{\dim E_\Lambda}{\dim V_\mu}} \; P_\mu^\Lambda(\tau_\Lambda(k^{-1})v)$$

によって与えることが出来る。しかもこれは K-module homomorphism となる。

1.2) Intertwining operators $A_\mu(s)$.

W を (G, A) に関する Weyl 群とすると、$W = \{1, w\}$ ($w^2 = 1$) $\mu \in \hat{M}$ に対して $w\mu \in \hat{M}$ を次の関係に

$$\sigma_{w\mu}(m) = \sigma_\mu(w^{-1} m w) \quad (m \in M).$$

よって定義する。 $s\in\mathbb{C}$, $Re(s)>0$ のとき有界作用素

$A_\mu(s)\ \ \mathcal{H}_\mu \longrightarrow \mathcal{H}_{w\mu}$

を次の式

$(A_\mu(s)\varphi)(k)=\int_{\bar{N}} e^{-(s+\rho)t(\bar{n})}\,\varphi(kw\,k(\bar{n}))\,d\bar{n}$.

$k\in K$, $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$.

$\left\{\begin{array}{l}\text{ここで } d\bar{n} \text{ は } \bar{N} \text{ の Haar measure であり}\\ \int_{\bar{N}} e^{-2\rho t(\bar{n})}\,d\bar{n}=1\end{array}\right.$

と normalize されているものとする。

によって与える。

<u>命題1</u> 任意の $x\in G$, $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ $(\mu\in\hat{M})$ 及び $s\in\mathbb{C}$
$Re(s)>0$ に対して

(1) $A_\mu(s)\pi_{s\mu}(x)\varphi=\pi_{-s,w\mu}(x)A_\mu(s)\varphi$

が成立する。さらに等式 (1) は φ が C^∞-関数のとき x, φ を固定すれば s について ($\mathcal{H}_{w\mu}$-値関数として) $\mathbb{C}$ 全体にまで meromorphic に解析接続することが出来る。又，各 $\Lambda\in\hat{K}$, $\mu\in\hat{M}$, $(\Lambda:\mu)=1$ に対して meromorphic な関数 $s\longrightarrow c_\mu(s:\Lambda)$ が存在して

(2) $A_\mu(s)\mathcal{J}_\mu^\Lambda=c_\mu(s:\Lambda)\mathcal{J}_{w\mu}^\Lambda$

となる。特に $A_\mu(s)$ $\mathcal{H}_\mu(\Lambda)\longrightarrow\mathcal{H}_{w\mu}(\Lambda)$ linear mapping と見做せる。

<u>定義</u> $\Lambda\in\hat{K}$, $\mu\in\hat{M}$ $(\Lambda:\mu)=1$ のとき
関数 $s\longrightarrow C_\mu(s:\Lambda)$ を Λ,μ に関する C-関数と呼ぶ。

§2 $C_\mu(s:\Lambda)$ の関数等式

B を G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing form とする。そこで、

$$B_0(X,Y)=B(X,Y)/B(H,H)\quad X,Y\in\mathfrak{g}$$

とする。$\mathfrak{k}$ を K の Lie 代数、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする。B_0 を $\mathfrak{p}_c=\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上の positive definite な Hermitian form に拡張する。これも B_0 で表わす。
$Z\in\mathfrak{p}_c$, $k\in K$ に対し

$$\phi_Z(k)=B_0(\mathrm{Ad}(k^{-1})Z,H).$$

とすると ϕ_Z は K 上の C^∞-関数であり $\phi_Z(km)=\phi_Z(k)$ $(k\in K,\ m\in M)$ が成立する。又 $Z\longrightarrow\phi_Z$ は線型となる。$Z\in\mathfrak{p}_c$ $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ に対して

$$\mathcal{M}_\mu(Z)\varphi=\phi_Z\varphi.$$

とすると $\mathcal{M}_\mu(Z)$ $\mathcal{H}_\mu\longrightarrow\mathcal{H}_\mu$ 有界作用素となる。
$\{X_i\}$ を $\mathfrak{k}$ の基底で $B_0(X_i,X_j)=-\delta_{ij}$ となるものとし

$$\omega_k=-\sum_i X_i^2$$

とする。

命題２　$Z \in \mathfrak{p}_c$　$\varphi \in \mathcal{H}_\mu$　C^∞-関数に対して

(3)　$\pi_{s,\mu}(Z)\varphi = \{ s\,\omega_\mu(Z) + \frac{1}{2}[\pi_{s,\mu}(\omega_K), \omega_\mu(Z)]\}\varphi$

が成り立つ。ここで [,] は作用素の交換子積.

(1)から得られる等式

(1)′　$A_\mu(s)\,\pi_{s,\mu}(Z)\varphi = \pi_{-s,w\mu}(Z)\,A_\mu(s)\varphi$.

と (2), (3) を用いて 以下の $c_\mu(s,\Lambda)$ の Λ に関する漸化式が成立する。

Case I.　$n=2m$.

$\Lambda \in \hat{K}$;　$\Lambda = \Lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \Lambda_m\varepsilon_m$,　$\Lambda_1, \cdots \Lambda_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$\Lambda_i - \Lambda_j \in \mathbb{Z}$　$\Lambda_1 \geqq \cdots \geqq |\Lambda_m|$.

$\mu \in \hat{M}$;　$\mu = \mu_1\varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1}\varepsilon_{m-1}$,　$\mu_1 \cdots \mu_{m-1} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$\mu_i - \mu_j \in \mathbb{Z}$　$\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_{m-1} \geqq 0$

であり. $(\Lambda, \mu) = 1$ である為には.

$\Lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}$　&　$\Lambda_1 \geqq \mu_1 \geqq \cdots \geqq \Lambda_{m-1} \geqq \mu_{m-1} \geqq |\Lambda_m|$

が必要十分.

(4.1)　$(s+\rho-i+\Lambda_i+1)\,c_\mu(s, \Lambda+\varepsilon_i) = (-s+\rho-i+\Lambda_i+1)\,c_\mu(s,\Lambda)$

$i = 1, \cdots, m$　,　$s \in \mathbb{C}$

Case II.　$n = 2m+1$.

$\Lambda \in \hat{K}$;　$\Lambda = \Lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \Lambda_m\varepsilon_m$　$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$\Lambda_i - \Lambda_j \in \mathbb{Z}$　$\Lambda_1 \geqq \cdots \geqq \Lambda_m \geqq 0$.

$\mu \in A$；$\mu = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_m \varepsilon_m$，$\mu_1 \cdots \mu_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$$\mu_i - \mu_1 \in \mathbb{Z},\quad \mu_1 \geq \cdots \geq |\mu_m|$$

であり $(\Lambda, \mu) = 1$ と成る為には

$$\Lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z} \ \& \ \Lambda_1 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \Lambda_m \geq |\mu_m|$$

が必要十分

(4.2) $(s+\rho-i+\Lambda_i+1)\, C_\mu(s ; \Lambda+\varepsilon_i) = -(-s+\rho-i+\Lambda_i+1)\, C_\mu(s ; \Lambda)$

$$i = 1, \cdots, m \qquad s \in \mathbb{C} \,//$$

以上より，次の命題を得る。

命題 3　$s \in \mathbb{C}$　$l \in \mathbb{N}$　$(s)_l = \Gamma(s+l)/\Gamma(s)$ とする。
(ここで Γ は Γ-関数)．

(i)　$n = 2m$　$(m > 0)$

$$C_\mu(s : \Lambda) = \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(-s+\delta_i+\mu_i)_{\Lambda_i-\mu_i}}{(s+\delta_i+\mu_i)_{\Lambda_i-\mu_i}} \right) \left(\frac{(s+\delta_m+\Lambda_m)_{\mu_{m-1}-\Lambda_m}}{(-s+\delta_m+\Lambda_m)_{\mu_{m-1}-\Lambda_m}} \right) C_\mu(s ; \Lambda(\mu))$$

ここで　$\delta_i = m + \frac{1}{2} - i = \rho + 1 - i$

$$\Lambda(\mu) = \mu + \mu_{m-1}\varepsilon_m = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1}\varepsilon_{m-1} + \mu_{m-1}\varepsilon_m .$$

(ii)　$n = 2m+1$　$(m > 0)$

$$C_\mu(s : \Lambda) = \left(\prod_{i=1}^{m} (-1)^{\Lambda_i - |\mu_i|} \frac{(-s+\delta_i+|\mu_i|)_{\Lambda_i-|\mu_i|}}{(s+\delta_i+|\mu_i|)_{\Lambda_i-|\mu_i|}} \right) C_\mu(s ; \Lambda(\mu))$$

ここで　$\delta_i = m + 1 - i = \rho + 1 - i$．

$$\Lambda(\mu) = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1}\varepsilon_{m-1} + |\mu_m| \varepsilon_m .$$

§3 $c_\mu(s:\Lambda(\mu))$ の explicit formula

まず、次の補題が成立する。

補題1

(i) $n=2m$.

任意の $\Lambda\in\hat{K}$ に対して $\varepsilon_\Lambda=\pm1$ が存在して $\tau_\Lambda(w)=\varepsilon_\Lambda\tau_\Lambda(1)$

1, $[\Lambda:\mu]=1$ のとき $s\in\mathbb{C}$ $Re(s)>0$ ならば.

$$c_\mu(s:\Lambda)=\frac{\varepsilon_\Lambda}{\dim V_\mu}\int_{\bar{N}}e^{-(s+\rho)t(\bar{n})}tr(P_\mu^\Lambda\tau_\Lambda(k(\bar{n})^{-1})P_\Lambda^\mu)d\bar{n}$$

(ii) $n=2m+1$.

$s\in\mathbb{C}$ $Re(s)>0$, $[\Lambda:\mu]=1$ のとき.

$$c_\mu(s:\Lambda)=\frac{1}{\dim V_\mu}\int_{\bar{N}}e^{-(s+\rho)t(\bar{n})}tr(P_\mu^\Lambda\tau_\Lambda(k(\bar{n})^{-1})P_\Lambda^\mu)d\bar{n}$$

次に $\Lambda\in\hat{K}$, $e_\Lambda\in E_\Lambda$ を $\|e_\Lambda\|_{E_\Lambda}=1$ となる highest weight vector とする。そこで

$$\varphi_\Lambda(k)=(\tau_\Lambda(k)e_\Lambda,e_\Lambda)_{E_\Lambda}\quad k\in K.$$

とおく。

1, $y=(y_1,\cdots y_\ell)\in\mathbb{R}^\ell$ に対して $|y|^2=y_1^2+\cdots+y_\ell^2$ さらに

$$\nu_0(y)=0$$

$$\nu_k(y)=\sum_{j=1}^{k}(y_j^2+(y_{m+j})^2)$$

$$\begin{cases}\ell=2m-1 \text{ のとき } & k=1,\cdots,m-1.\\ \ell=2m \text{ のとき } & k=1,\cdots,m\end{cases}$$

とする。

補題2.

(i) $n=2m$

$$\Delta_k(y)=\begin{cases}1-\dfrac{\nu_k(y)}{1+|y|^2} & 0\le k\le m-1\\ \dfrac{(1-iy_m)^2}{1+|y|^2} & k=m.\end{cases} \qquad y\in\mathbb{R}^{2m-1}$$

とすると，

$$\varphi_\Lambda(k(\bar{n}_y))=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)}\right)^{\Lambda_k}$$

なら は

$$c_\mu(s\ \Lambda(\mu))=\int_{\bar{N}}\ \varepsilon_{\Lambda(\mu)}\ e^{-(s+\rho)t(\bar{n}_y)}\varphi_{\Lambda(\mu)}(k(\bar{n}))\,d\bar{n}.$$

(ii) $n=2m+1$.

$$\Delta_k(y)=1-\frac{\nu_k(y)}{1+|y|^2}\qquad 0\le k\le m\qquad y\in\mathbb{R}^{2m}.$$

とすると，

$$\varphi_\Lambda(k(\bar{n}_y))=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)}\right)^{\Lambda_k}$$

なら は．

$$c_\mu(s\ \Lambda(\mu))=\int_{\bar{N}}\ e^{-(s+\rho)t(\bar{n})}\ \varphi_{\Lambda(\mu)}(k(\bar{n}))\,d\bar{n}\ //$$

$\bar{n}=\bar{n}_y\in\bar{N}\qquad y\in\mathbb{R}^{n-1}$ のとき．

$d\bar{n}=\ c_0\,dy\qquad(dy=dy_1\cdots dy_{n-1})$ であり．

$e^{t(\bar{n})}=1+|y|^2$

に注意して計算すると次の定理が得られる。

9.

定理 ($c_\mu(s:\Lambda)$ の explicit formula)

(i) $n=2m$.

$$c_\mu(s:\Lambda)=\frac{\varepsilon_\Lambda\,(-1)^{\Lambda_m-\mu_{m-1}}\,2^{2\rho-2s}\,\Gamma(\delta_m+\rho)\,\Gamma(2s)}{\Gamma(s+\delta_m+\Lambda_m)\,\Gamma(s+\delta_m-\Lambda_m)}\left(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{(-s+\delta_i+\mu_i)_{\Lambda_i-\mu_i}}{(s+\delta_i+\mu_i)_{\Lambda_i-\mu_i}}\right)$$

$$\begin{cases}\rho=\delta_1=m-\frac{1}{2} & \delta_i=m+\frac{1}{2}-i=\rho+1-i\\ \Lambda=\Lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\Lambda_m\varepsilon_m & \mu=\mu_1\varepsilon_1+\cdots+\mu_{m-1}\varepsilon_{m-1}\end{cases}$$

(ii) $n=2m+1$.

$$c_\mu(s:\Lambda)=\frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{\Lambda_i-|\mu_i|}\,(-s+\delta_i+|\mu_i|)_{\Lambda_i-|\mu_i|}}{(s+\delta_i+|\mu_i|-1)\,(s+\delta_i+|\mu_i|)_{\Lambda_i-|\mu_i|}}\right)$$

$$\begin{cases}\delta_i=\rho+1-i=m+1-i\\ \Lambda=\Lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\Lambda_m\varepsilon_m \quad \mu=\mu_1\varepsilon_1+\cdots+\mu_m\varepsilon_m.\end{cases}$$