数理解析研究所講究録
第429巻 1981年 1-8

Johnson scheme と t-design の 基本関係式について

鹿児島大 理　厚見寅司

1、Introduction

$(\Omega, \mathbb{B})$ t-(v,k,λ) design とする $[t/2]=s$

$\Omega=\{\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_v\}$ $\quad$ $\mathbb{B}=\{B_1,\ldots\ldots,B_{\lambda_0}\}$

Ω の h点 subsets の全体 $\quad \Omega^{(h)}=\{\Omega_{h_1},\ldots\ldots,\Omega_{h\binom{v}{h}}\}$

$\binom{v}{h}\times\lambda_0$ 行列 M_h

$$M_h(i,j)=\begin{cases}1 & \Omega_{h_i}\subseteq B_j\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

λ_0次横ベクトル $a_i=(r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_{\lambda_0}})$

$$r_{i_j}=\begin{cases}1 & \alpha_i\in B_j\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

吉沢により次の結果が示されている。(see Yoshizawa[4])

a_i-a_j $(1\leqq i,j\leqq v)$ で張られる空間は $M_l^T M_l$ $(0\leqq l\leqq t-1)$ の固有空間である。

上のことを一般化するために"n次" $(n\leqq s)$ のベクトル空間を Cameron [1] に従って定義する。

次の結果はよく知られている(cf. Cameron [1],
Peterson [3])

* この "m次" ($m \leqq s$) のベクトル空間は $M_\ell^T M_\ell$ ($0 \leqq \ell \leqq s$) の固有空間である。

ここでは実は次のことまでいえることを示す。

定理1　*は $M_\ell^T M_\ell$ ($0 \leqq \ell \leqq t-n$) で成立する。

Notations

C_{ij}^n　　$\binom{v}{i} \times \binom{v}{j}$ 行列

$$C_{ij}^n(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ia} \cap \Omega_{jb}| = n \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

B_{ij}　　$\binom{v}{i} \times \binom{v}{j}$ 行列

$$B_{ij}(a, b) = \begin{cases} 1 & \Omega_{ia} \subseteq \Omega_{jb} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

M_m^i　　$\binom{v}{m} \times \lambda_0$ 行列

$$M_m^i(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ma} \cap B_b| = i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

注意 $M_i = M_i^i$

2　Association scheme

定義　Ω 上の class number s の association scheme は $\Omega^{(2)}$ の(1)なる性質をもつ s class $C_1, \cdots, C_s$ への

partitionである。

(P) (i) $\forall p\in\Omega$に対して$\{p, q\}\in C_h$となる$q\in\Omega$の数はhにだけ依属する。

(ii) $\forall\{p, q\}\in C_h$に対して$\{p, r\}\in C_i$, $\{r, q\}\in C_j$なる$r\in\Omega$の数は(i, j, h)にだけ依属する。

A_i : $n\times n$行列

$$A_i(p, q) = \begin{cases} 1 & \{p, q\}\in C_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(1) $I, A_1, \cdots\cdots, A_s$で張られる実数体上のベクトル空間はalgebraになる。しかも可換である。

(centralizer algebra of the association scheme)

$V = R\Omega$ (Ωの元でラベルがついたbasisをもつ実数体上のベクトル空間)。Vにおのずから自然にcentralizer algebraが作用して加群になる。(1)より

(2) ..... $V = V_0\oplus\cdots\cdots\oplus V_s$と分解される。各$V_i$は$\langle I, A_1\cdots, A_s\rangle_R$のすべてのmatrixの固有空間である。

Johnson schemeについて

$\Omega^{(j)} = \{\Omega_{j_1}, \cdots\cdots, \Omega_{j\binom{n}{j}}\}$ class $C_i = \{\{\Omega_{j_k}, \Omega_{j_l}\} \mid |\Omega_{j_k}\cap\Omega_{j_l}| = i\}$

$0\leq i\leq j-1$

は$\Omega^{(j)}$上のassociation schemeになる C_iに対応するbasis matrixはC^i_{jj}とする。

上のassociation schemeのcentralizer algebraをR_jとする。

R_j は $W_j = R\Omega^{(j)}$ を表現加群としてもつ。

注意：知られている結果（Cameron [1]）

$B_{ij}B_{jh} = \binom{h-i}{j-i} B_{ih}$ $\quad B_{ij}M_j = \binom{h-i}{j-i} M_i$ $\quad B_{ij}B_{ij}^T \in R_i$

$B_{ij}^T B_{ij} \in R_j$ $\quad B_{ij}$ の rank $= \binom{v}{i}$ ただし $i<j\le \frac{1}{2}(v+1)$

よって $B_{ij}B_{ij}^T$: non-singular

R_i に対して(2)にあたる分解を

$$W_i = W_{i0} \oplus \cdots\cdots \oplus W_{ii}$$

とする。W_{ij} は R_i のすべての元（行列）の固有空間である。すると W_{i+1} は次の分解をもつ

$$W_{i+1} = W_{i+1,0} \oplus \cdots\cdots \oplus W_{i+1,i+1}$$

$$W_{i+1,j} = W_{ij}B_{i\,i+1} \quad 0\le j\le i \quad W_{i+1,i+1} = \{w\in W_{i+1} \mid wB_{i\,i+1}^T = 0\}$$

各 $W_{i+1,j}$ $0\le j\le i+1$ は R_{i+1} のすべての元の固有空間すなわち(2)の分解になっている。ゆえに $W_{mm}B_{mh} = W_{hm}$ $0\le m<h$

3 定理の証明

$(\Omega, \mathbb{B})$: $2s$ 又は $2s+1$ design より

$M_l^T M_l \in R_l$ $\quad 0\le l\le s$ $\left(\because M_l^T M_l = \lambda_l I + \lambda_{l+1} C_{ll}^{l-1} + \cdots + \lambda_{2l} C_{ll}^{0}\right)$

したがって W_{lh} : $M_l M_l^T$ の固有空間 よって $W_{lh}M_l$: $M_l^T M_l$ の固有空間 $\quad W_{hh}M_h = W_{hh}B_{hs}M_s = W_{sh}M_s = W_{lh}M_l$ より

$V_h = W_{hh}M_h$ $(0\le h\le s)$ は $M_l^T M_l$ $(0\le l\le s)$ の固有空間である（cf. Cameron [1]）。

実はこの $V_h = W_{hh}M_h$（我々は introduction で"h次"ベクトル空間

と呼んだもの）は $M_\ell^T M_\ell$ $(0 \leq \ell \leq N-h)$ の固有空間である。

$w_n M_h M_\ell^T M_\ell$ の計算　ただし $w_h \in W_{h,h}$

$$M_h M_\ell^T = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j} C_{h\ell}^{j}$$

$h \leq \ell$ としてよい（∵ $h > \ell$ のとき V_h 上 $M_\ell^T M_\ell$ は固有値 0 をもつ）

Peterson [3] より $W_h C_{h\ell}^{j} = (-1)^{h-j} \binom{h}{j} w_h B_{h\ell}$ 　　$w_h \in W_{h,h}$

これを使用すると

$$w_h M_h (M_\ell M_\ell^T) = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j} (-1)^{h-j} \binom{h}{j} \binom{k-h}{\ell-h} w_h M_h$$

証明終り

以下は Peterson の結果を使用しない別証明である。

$$C_{h\ell}^{j} M_\ell = \sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j} \binom{k-p}{\ell-j} M_h^p$$

$w_h \in W_{h,h}$ 　　$w_h = (\gamma_{\{a_1,\cdots a_h\}}, \cdots\cdots)$ とする

$w_h M_h^p = (-1)^{h-p} \binom{h}{p} w_h M_h$ が成立する。

これの証明には次の事を使用する

$$W_{h,h} = \{ w \in W_h \mid w B_{h-1\,h}^T = 0 \}$$ 　　i.e. $\forall \{a_1, \cdots, a_{h-1}\} \in \Omega^{(h-1)}$

fix すると $\displaystyle\sum_{a_h \in \Omega - \{a_1 \cdots a_{h-1}\}} \gamma_{\{a_1 \cdots a_{h-1}, a_h\}} = 0$

$w_h M_h M_\ell^T M_\ell$ を計算すると

$$w_h M_h M_\ell^T M_\ell = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j} \sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j} \binom{k-p}{\ell-j} (-1)^{h-p} \binom{h}{p} w_h M_h.$$

2つの証明は同じであること　すなわち次の式が成立する。

$$\sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j} \binom{k-p}{\ell-j} (-1)^{h-p} \binom{h}{p} = (-1)^{h-j} \binom{h}{j} \binom{k-h}{\ell-h}$$

$$\binom{p}{j}\binom{h}{p} = \binom{h}{j}\binom{h-j}{p-j}, \quad \binom{n-p}{m-p} = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{m}\binom{p}{k}.$$

に注意すればよい.

4 定理のSteiner systemsへの適用

$(\Omega\ \mathbb{B})$ t-$(v, k, 1)$ design とする。(i.e. Steiner system $S(t, k, v)$). A_h : $\lambda_0 \times \lambda_0$ 行列 $A_h(i,j) = \begin{cases} 1 & |B_i \cap B_j| = h \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$$(2)\quad \begin{cases} M_{t-1}^T M_{t-1} = A_{t-1} + \binom{k}{t-1} I \\ M_{t-2}^T M_{t-2} = (t-1) A_{t-1} + A_{t-2} + \binom{k}{t-2} I \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_l^T\ M_l = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{h}{l} A_h + \binom{k}{l} I \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

スタイナーシステムの基本関係式

定理2 スタイナーシステム$(\Omega, \mathbb{B})$において次の仮定を満足するとする。Ass. $\forall B \in \mathbb{B}$ $\Omega - B \ni \forall \alpha_1, \alpha_2$

$|\{B' \in \mathbb{B} \mid B' \ni \alpha_1, \alpha_2 \ \ |B' \cap B| = t-1\}| = c$ (一定)

このとき $W_{2,2} M_2$ は $A_{t-1}, \cdots\cdots, A_0, I$ の固有空間である。

証明 (2)より

$$M_2 A_{t-1} = (\lambda_{t-1} - 1)\binom{k-2}{t-3} M_2^2 + \binom{k-1}{t-2} M_2^1 + c\ M_2^0$$

$$w_2 M_2^i = (-1)^{2-i}\binom{2}{i} w_2 M_2 \qquad w_2 \in W_{22}$$

$W_{2,2} M_2$ は A_{t-1} の固有空間である。

また定理1より $W_{2,2} M_2$ は $M_l^T M_l$ $0 \leq l \leq t-2$ の固有空間である.

注意1. この定理の証明は別証明の方法でなければならないと思う。

注意2. 上の定理2のAss.を満足するSteiner systemについて

例1. 次の問題のスタイナーシステムは定理2のAss.を満たす。Cameron[2]の問題 Steiner system $S(t, k, v)$が次の条件を満たすとき。"$\forall B \in \mathbb{B}$を取ると

$\mathbb{B}' = \{ B' - B' \cap B \mid |B' \cap B| = t-1,\ B' \in \mathbb{B} \}$ $(\Omega - B,\ \mathbb{B}')$が

Steiner system $S(t-1,\ k-t+1,\ v-k)$を作る" このとき$S(t, k, v)$

はどのようなスタイナーシステムか？

例2. スタイナーシステム$S(t, k, v)$におけるCameron[2]の

不等式 $v \geq (t+1)(k-t+1)$で等号をattainするSteiner systemは

定理2のAss.を満足する。

次の結果を使用すればよい

$\forall B \in \mathbb{B}$取って $\forall \alpha_1 \cdots \alpha_t \in B$とすると $\Omega - B \ni \forall \alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}$に対して

$\exists_1 B' \ni \alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}$ かつ $|B' \cap B| = t-1$ (実はB'は$\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_t$を含み、$^{\exists}\alpha_i$は含まない)

となる。

注意3. $S(t, k, v)$のパラメーターが $v = (t+1)(k-t+1)$を

満たすならば上の結果を使用すると次のdesignを作ることができる。

$$2\text{-}\left(v-k,\ k-t+1,\ \frac{1}{(k-t+1)}\binom{k}{t}\right).$$

References

1. P. J. Cameron : Near-Regularity Conditions for Designs, Geometriae Dedicata, 2 (1973), 213 - 223.

2. ______________ : Parallelisms of Complete Designs, London Math. Soc. Lecture Notes 23. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1976.

3. C. Peterson : On Tight 6-Designs, Osaka J. Math. 14 (1977), 417 - 435.

4. M. Yoshizawa : Block Intersection Numbers of Steiner systems 1, (in Japanese) 1980.