数理解析研究所講究録
第 429 巻 1981 年 25-39

Moufang loop から作られる affine triple system の幾何学的構造と P-rank について

広島大 理　浜田昇

§1. 定義と予備的結果

幾何学的な観点から affine triple system を定義するために Steiner triple system $(X, \mathcal{B})$ (i.e., パラメータ $k=3$, $\lambda=1$ をもつ BIB design $(X, \mathcal{B})$) の中に次のようにして，点，直線，平面の概念を導入する。

X の元を点と呼び，$\mathcal{B}$ のブロックを直線と呼ぶ。X の部分集合 S (ただし，$|S| \geqq 3$) のどの相異なる2点 a と b に対しても，$a \circ b$ が S に属するならば，S は $(X, \mathcal{B})$ の subsystem であるという。ここに，$a \circ b$ は2点 a と b を含む $\mathcal{B}$ の (ただ一つの) ブロックの a と b 以外の (ただ一つの) 点を表わす。X の部分集合 A ($|A| \geqq 2$) を含むすべての subsystem の交わり (これも subsystem である) を A によって生成された subsystem という。特に，同一直線上にない3点 a, b, c によって生成された subsystem の濃度が 3^2

であるとき，この subsystem を3点 a, b, c によって生成された平面（または，アフィン平面）という． 同一直線上にないどの3点もアフィン平面を生成するような Steiner triple (ST) system $(X, \mathcal{B})$ のことを affine triple system（または，Hall triple system）といい，以下，これを AT system（または，HT system）と略記する．

$(X, \mathcal{B})$ が AT system であるためには，X の濃度 v が3のべき乗（i.e., $v = 3^n$; $n \geq 2$）でなければならない．

逆に，$n \geq 2$ なるどんな整数 n に対しても，アフィン幾何 $AG(n, 3)$ の点の全体を X，直線の全体を $\mathcal{B}$ とすることによって，AT system $(X, \mathcal{B})$（以下，$AG(n, 3) : 1$ と略記）を作ることが出来る． $AG(n, 3) : 1$ のような AT system を affine AT system といい，$AG(n, 3) : 1$ 以外の AT system を non-affine AT system という．

M. Hall [4, 5, 6] は群論的な立場から AT system を調べ，（$n = 2, 3$ の場合には，non-affine な AT system は存在しないが）$n = 4$ の場合には，ただ一つの non-affine な AT system が存在することを示した．

H. P. Young [12] は次のような結果を得た．

(i) affine triple system と exponent 3-commutative Moufang loop（以下，exp. 3-CML と略記）との間には，1対1対応が

ある．　すなわち，AT system $(E, \mathcal{B})$ $(\equiv S)$ が与えられると，Eの任意の元 x と y に対して，“$\cdot$” を

$$\underline{(1.1)} \qquad x \cdot y = (e \circ x) \circ (e \circ y)$$

（ただし，e は E の任意の元（fix））と定義すると，$(E, \cdot)$ $(\equiv G_e(S))$ は（e を単位元にもつ）exp. 3-CML であり，かつ，E の任意の元 e_1, e_2 に対して，$G_{e_1}(S)$ と $G_{e_2}(S)$ は同値である．　ここに，$x \circ x = x$ で，$x \circ y = z$ $(x \neq y)$ $\Leftrightarrow$ $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$ である．　逆に，単位元 e をもつ exp. 3-CML $G = (E, \cdot)$ が与えられると，

$$\underline{(1.2)} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \{a, b, (a \cdot b)^2\} : a, b \in E,\ a \neq b \right\}$$

とおけば，$S = (E, \mathcal{B})$ は $G_e(S) = G$ をみたす AT system である．

(ii) $|E| = 3^n$ である exp. 3-CML $(E, \cdot)$ が associative である（i.e., 結合法則をみたす）ならば，対応する AT system は $AG(n, 3) : 1$ と同値であり，対応する AT system の幾何学的な構造（i.e., subsystem の構造）はアフィン幾何 $AG(n, 3)$ の構造（i.e., flat の構造）と同じである．

最近，L. Beneteau [2] は non-associative な exp. 3-CML に対して，次のような結果を得た．

(i) $|E| = 3^n$ である exp. 3-CML $(E, \cdot)$ が non-associative であるならば, $n \geqq 4$, $3 \leqq |Z(E)| \leqq 3^{n-3}$ である. ここに,

$$Z(E) = \{ z : z \in E, \ {}^{\forall}x, y \in E, \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \}$$

で, $Z(E)$ は $(E, \cdot)$ の associative center と呼ばれている.

(ii) $n \geqq 4$ なる任意の整数 n に対して,

(1.3) $\quad |E| = 3^n \quad$ かつ $\quad |Z(E)| = 3^{n-3}$

をみたす exp. 3-CML がただ一つ存在する. 以下, この exp. 3-CML を $(E_n, \cdot)$ と略記する. (§2 参照)

一般に, $|E| = 3^n$ である non-associative な exp. 3-CML の中では, associative center の濃度が大きければ大きい程, 対応する affine triple system の幾何学的な構造はきれいで, アフィン幾何 $AG(n, 3)$ の構造に近い構造をもつであろうと思われる. ここでの目的は, $|E| = 3^n$ $(n \geqq 4)$ である non-associative な exp. 3-CML の中で, associative center の濃度が最大である exp. 3-CML $(E_n, \cdot)$ から作られる affine triple system (以下, ATS_n と略記) の幾何学的な構造を平行性, subsystem, p-rank 等の概念を用いて詳しく調べ, アフィン幾何 $AG(n, 3)$ の場合と比較することである. なお, 詳しくは, N. Hamada [10] を参照のこと.

§2. exp. 3-CML $(E_n, \cdot)$ から作られる AT system の幾何学的構造

$(E, \cdot)$ を exp. 3-CML とし，$(E, \mathcal{B})$ を (1.2) によって $(E, \cdot)$ から作られる AT system とする．　この AT system の中に §1 で述べた方法を用いて，点，直線，平面の概念を導入する．

L_1 と L_2 を $(E, \mathcal{B})$ の同一平面上にある２つの直線とする．このとき，$L_1 = L_2$ または $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ならば，L_1 と L_2 は平行であるといい，これを $L_1 /\!/ L_2$ で表わす．

L. Beneteau [1] は $L_1 /\!/ L_2$ かつ $L_2 /\!/ L_3$ である $(E, \mathcal{B})$ のどんな３直線 L_1, L_2, L_3 に対しても，$L_1 /\!/ L_3$ (i.e., 平行性の推移性) が成り立つのは，もとの exp. 3-CML $(E, \cdot)$ が associative であるとき，かつそのときに限ることを示した．これは，どんな non-associative な exp. 3-CML $(E, \cdot)$ に対しても，$L_1 /\!/ L_2$, $L_2 /\!/ L_3$ であるが，$L_1 /\!/ L_3$ が成り立たないような３直線 L_1, L_2, L_3 が $(E, \mathcal{B})$ の中に存在することを示しているから，平行性の推移性が non-associative な exp. 3-CML $(E, \cdot)$ から作られる affine triple system の構造を特徴付けるのに重要な役割をはたすであろうと思われる．

ここでは，$L_1 /\!/ L_2$, $L_2 /\!/ L_3$ である ATS_n の３直線 L_1, L_2, L_3 が $L_1 /\!/ L_3$ をみたすための L_1, L_2, L_3 に対する必要十分条件を求める．

$E_n = (Z_3)^n = Z_3 \times Z_3 \times \cdots \times Z_3$ とし，E_n の任意の２点

$\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と $\underline{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ に対して，"・" を次のように定義する．

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = (a_1+b_1, \cdots, a_3+b_3, a_4+b_4+\theta(\underline{a},\underline{b}), a_5+b_5, \cdots, a_n+b_n)$$

ここに，$n \geqq 4$，$\theta(\underline{a},\underline{b}) = (a_3-b_3)(a_1b_2-a_2b_1)$ で，$\underline{a}\cdot\underline{b}$ の各成分における＋は3を法とする加法を表わす。 上の $(E_n, \cdot)$ は (1.3) をみたす exp. 3-CML である．L_1, L_2, L_3 が $L_1 /\!/ L_2$，$L_2 /\!/ L_3$ であって，かつ，同一平面上にある場合には，どんな AT system においても，$L_1 /\!/ L_3$ が成り立つから，以下，L_1, L_2, L_3 が同一平面上にない場合を考える．

次の定理は，ATS_n の幾何学的な構造を調べたり，ATS_n の点と直線から作られる BIB design の結合行列の P-rank を求めるときに，重要な役割をはたす．

(定理 2.1) L, L_1, L_2 を $L_1 /\!/ L$，$L /\!/ L_2$ であって，かつ同一平面上にない ATS_n の3直線とする．

(i) $L_1 /\!/ L_2$ が成り立つための必要十分条件は，$\underline{a}, \underline{b} \in L$ $(\underline{a} \neq \underline{b})$，$\underline{c} \in L_1$，$\underline{d} \in L_2$ をみたすある4点 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ に対して，$\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}) \equiv 0 \mod 3$ が成り立つことである。ここに，

$$\underline{(2.1)} \qquad \Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

で，$|A|$ は行列 A の行列式を表わす．

(ii) $L_1 /\!/ L_2$ ならば，$L_1 /\!/ L \circ L_2$, $L \circ L_1 /\!/ L_2$, $L \circ L_1 /\!/ L \circ L_2$ が成り立つ．ここに，$L \circ L_i$ $(i=1,2)$ は L と L_i を含む平面上の L と平行な L, L_i 以外のただ一つの直線を表わす．

（証明は，*N. Hamada* [10] を参照せよ）

<u>(注意)</u>　(1)　L, L_1, L_2 が $L_1 /\!/ L$, $L /\!/ L_2$ であって，かつ，同一平面上にある場合にも，(i) は成り立つ．

(2)　$\Delta(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \equiv 0 \mod 3$ をみたすある4点 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$（ただし，$\underline{a}, \underline{b} \in L$, $\underline{c} \in L_1$, $\underline{d} \in L_2$ $(\underline{a} \neq \underline{b})$）が存在するならば，$\underline{a}^*$, $\underline{b}^* \in L$ $(\underline{a}^* \neq \underline{b}^*)$, $\underline{c}^* \in L_1$, $\underline{d}^* \in L_2$ であるどんな4点 $\underline{a}^*$, $\underline{b}^*$, $\underline{c}^*$, $\underline{d}^*$ に対しても，$\Delta(\underline{a}^*, \underline{b}^*, \underline{c}^*, \underline{d}^*) \equiv 0 \mod 3$ が成り立つ．

<u>(系 2.1)</u>　$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ を ATS_n の同一平面上にない4点とし，S を4点 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ によって生成された ATS_n の *subsystem* とする．

(i) $\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}) \equiv 0 \mod 3$ ならば, $|S| = 3^3$ である.

(ii) $\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}) \not\equiv 0 \mod 3$ ならば, $|S| = 3^4$ である.

一般の場合： $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \cdots, \underline{\alpha}_m$ $(2 \leqq m \leqq n)$ を ATS_n の相異なる m 個の点とし, S を $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \cdots, \underline{\alpha}_m$ によって生成された ATS_n の subsystem とする. このとき, $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \cdots, \underline{\alpha}_m\}$ の中に S を生成する真部分集合が存在しないならば, m 個の点 $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \cdots, \underline{\alpha}_m$ は独立であるという. また, ATS_n の任意の点 $\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して, $\rho_1(\underline{a})$ と $\rho_2(\underline{a})$ を

(2.2) $\quad \rho_1(\underline{a}) = (a_1, a_2, a_3), \quad \rho_2(\underline{a}) = (a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, \cdots, a_n)$

と定義する.

(定理 2.2) $\underline{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m+1)$ を ATS_n $(n \geqq 4)$ の任意の $m+1$ 個の独立な点とし, A_1 を $\{\rho_1(\underline{\alpha}_i) : i = 1, 2, \cdots, m+1\}$ によって生成された $AG(3,3)$ の flat とし, A_2 を $\{\rho_2(\underline{\alpha}_i) : i = 1, 2, \cdots, m+1\}$ によって生成された $AG(n-1,3)$ の flat とする. ここに, $3 \leqq m \leqq n - 3 + \log_3 |A_1|$ とする.

(i) $|A_1| = 1, 3, 3^2$ or 3^3, $|A_2| = 3^{m-1}$ or 3^m である.

(ii) $|A_1| = 1, 3$ or 3^2 の場合には, $|S| = 3^m$ で, S はどの 2 つも平行な 3^{m-1} 個の直線から成り立っている.

(iii) $|A_1| = 3^3$ の場合には, $|S| = 3^m$ or 3^{m+1} で, A_2 が $AG(n-1, 3)$ の $(m-1)$-flat ならば, S は 3^{m-1} 個の直線 $\{L(\underline{x}) : \underline{x} \in A_2\}$ から成り立っており, A_2 が $AG(n-1, 3)$ の m-flat ならば, S は 3^m 個の直線 $\{L(\underline{x}) : \underline{x} \in A_2\}$ から成り立っている. ここに, $L(\underline{x})$ は $AG(n-1, 3)$ の点 $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ に対して, ATS_n の直線 $L(\underline{x}) = \{(x_1, x_2, x_3, u, x_4, \cdots, x_{n-1}) : u = 0, 1, 2\}$ を表わす.

§3. ATS_n の点と直線から作られる BIB design の結合行列の p-rank

パラメータ (v, b, r, k, λ) をもつ BIB design の結合行列 N をパリティ・チェック行列にもつ符号長 v の p 進線形符号 C (以下, これをパラメータ (v, b, r, k, λ) をもつ p-ary BIBD code という. ここに, p は任意の素数) は多数決決定素子を用いて比較的簡単に誤りを訂正出来るという長所をもっている. この線形符号 C の情報点の数は $v - \mathrm{Rank}_p(N)$ であるから, 同じパラメータ (v, b, r, k, λ) をもつ p-ary BIBD code の中で, 情報点の数が最大であるものを求めるには, パラメータ (v, b, r, k, λ) をもつ BIB design の中で, $\mathrm{Rank}_p(N)$ の値が最小であるような BIB design を求めればよい. ここに, $\mathrm{Rank}_p(N)$ は結合行列 N のガロア体 $GF(p)$ 上での rank (以下, p-rank という) を表わす. 著者 [7, 8] は有限射影幾何

$PG(t, p^m)$ ((or アフィン幾何 $AG(t, p^m)$)) における点と d-flat ($1 \leqq d \leqq t-1$) から作られる BIB design (以下, $PG(t, p^m):d$ or $AG(t, p^m):d$ と略記) の結合行列の p-rank を求め, 次のような予想をした。 ここに, m は正の整数である。

(予想 1) BIB design $PG(t, p^m):d$ と同じパラメータをもつどんな BIB design D の結合行列 N に対しても,

$$\text{(3.1)} \qquad \mathrm{Rank}_p(N) \geqq R_d(t, p^m)$$

が成り立つ。 特に, 等号が成り立つのは, BIB design D が $PG(t, p^m):d$ と同値であるときに限る。 ここに, $R_d(t, p^m)$ は BIB design $PG(t, p^m):d$ の結合行列の p-rank を表わす。

(予想 2) BIB design $AG(t, p^m):d$ と同じパラメータをもつどんな BIB design D の結合行列 N に対しても,

$$\text{(3.2)} \qquad \mathrm{Rank}_p(N) \geqq r_d(t, p^m)$$

が成り立つ。 特に, 等号が成り立つのは, BIB design D が $AG(t, p^m):d$ と同値であるときに限る。 ここに, $r_d(t, p^m)$ は BIB design $AG(t, p^m):d$ の結合行列の p-rank を表わす。 ($R_d(t, p^m)$ や $r_d(t, p^m)$ の値については, N. Hamada [8] を参照)

N. Hamada と H. Ohmori [9] は $p^m = 2,\ t \geq 2,\ d = t-1$ の場合には，予想1と予想2が正しいことを示した。 J. Doyen, X. Hubaut, M. Vandensavel [3] は，$p^m = 2,\ t \geq 2,\ d = 1$ の場合には予想1が，$p^m = 3,\ t \geq 2,\ d = 1$ の場合には予想2が正しいことを示した。彼等の方法と定理2.2を用いて，ATS_n の点と直線から作られる BIB design の結合行列の p-rank を求めることが出来る。

Steiner triple system $S = (X, \mathcal{B})$ の subsystem $S_1\ (\neq X)$ が次の2つの条件をみたすならば，S_1 は<u>アフィン超平面</u>であるという。

(i) S_1 に属さない X のどんな点 x に対しても，$x \in B_i$ かつ $S_1 \cap B_i = \emptyset$ をみたす $\mathcal{B}$ のすべてのブロック B_i の和 $S_2 = \cup B_i$ が S の subsystem である．

(ii) $|S_1 \cap B_i| = 1$ である $\mathcal{B}$ のどんなブロック B_i に対しても，$|S_2 \cap B_i| = 1$ が成り立つ．

X の各点 x に対して，x を含む S のすべてのアフィン超平面の交わりを A_x で表わす． $\{A_x : x \in X\}$ は X の分割である． L. Teirlinck [11] は“部分集合 $A_x\ (x \in X)$ のいくつかの和として表わされるようなすべての subsystem の作る束 (i.e., inclusion によって順序づけられた lattice) は，ある整数 $t\ (\geq 0)$ に対して，アフィン幾何 $AG(t,3)$ の flat の全体が作る束と同値である”ことを示した．以下，この $AG(t,3)$ の

次元 t を d_A で表わす。特に、S の中にアフィン超平面が一つもない場合には、$d_A = -1$ とする。

Steiner triple system $S = (X, \mathcal{B})$ の subsystem S_1 $(\neq S)$ が $\mathcal{B}$ のどんなブロック B_i に対しても、$S_1 \cap B_i \neq \emptyset$ をみたすならば、S_1 は射影超平面であるという。L. Teirlinck [11] は"S のすべての射影超平面の交わりを A とするとき、A を含む S のすべての subsystem の作る束は、ある整数 t $(\geqq 0)$ に対して、有限射影幾何 PG$(t,2)$ の flat の全体が作る束と同値である"ことを示した。以下、この PG$(t,2)$ の次元 t を d_P で表わす。特に、S の中に射影超平面が一つもない場合には、$d_P = -1$ とする。次の結果は、J. Doyen, X. Hubaut, M. Vandensavel [3] によるものである。

(定理 3.1) $S = (X, \mathcal{B})$ を任意の Steiner triple system とし、N を S の点とブロックから作られる BIB design の結合行列とする。

(i) N のガロア体 GF(p) 上の rank (i.e., p-rank) は

$$\mathrm{Rank}_2(N) = v - (d_P + 1), \quad \mathrm{Rank}_3(N) = v - (d_A + 1), \quad \mathrm{Rank}_p(N) = v$$

$(p \neq 2, 3)$ で与えられる。ここに、$|X| = v$ である。

(ii) 特に、$v = 2^{n+1} - 1$ の場合には、どんな ST system (i.e., BIB design PG$(n,2):1$ と同じパラメータをもつどん

な BIB design) S に対しても,

<u>(3.3)</u> $\mathrm{Rank}_2(N) \geqq v-(n+1)$ (i.e., $d_P \leqq n$)

が成り立ち, 等号が成り立つのは, S が $PG(n,2):1$ と同値であるときに限る.

(iii) 特に, $v = 3^n$ の場合には, どんな ST system (i.e., BIB design $AG(n,3):1$ と同じパラメータをもつどんな BIB design) S に対しても,

<u>(3.4)</u> $\mathrm{Rank}_3(N) \geqq v-(n+1)$ (i.e., $d_A \leqq n$)

が成り立ち, 等号が成り立つのは, S が $AG(n,3):1$ と同値であるときに限る.

定理 2.2 を用いて, exp. 3-CML $(E_n,\cdot)$ から作られる AT system の場合には, $d_A = n-1$, $d_P = -1$ であることが示される. 従って, 定理 3.1 より次の結果をうる. (cf. [10])

<u>(定理 3.2)</u> exp. 3-CML $(E_n,\cdot)$ から作られる AT system の点とブロックから作られる BIB design の結合行列 N の 3-rank は, $\mathrm{Rank}_3(N) = 3^n - n$ (i.e., $d_A = n-1$) で, $P \neq 3$ ならば, $\mathrm{Rank}_p(N) = 3^n$ である. ここに, $n \geqq 4$ である.

(注意) 一般に, $|E| = 3^n$ である exp. 3-CML $(E, \cdot)$ から作られる AT system $(E, \mathcal{B})$ の結合行列 N の 3-rank は, associative center $Z(E)$ の濃度が大きければ大きい程, 小さいであろうと予想される.

REFERENCES

[1] L. Beneteau (1974), Etude algebrique des espaces barycentres et des espaces planairement affines, These de specialite, Toulouse.

[2] L. Beneteau (1980), Topics about 3-Moufang loops and Hall triple systems, SIMON STEVIN, A Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 54, 107-128.

[3] J. Doyen, X. Hubaut and M. Vandensavel (1978), Ranks of incidence matrices of steiner triple system, Math. Z. 163, 251-259.

[4] M. Hall, Jr. (1962), Automorphisms of Steiner triple systems, Proc. Symp. Pure Math., Vol. VI, Amer. Math. Soc., Providence.

[5] M. Hall, Jr. (1965), Group theory and block designs, Proc. Internat. Conf. on Theory of Group, Australian Nat. Univ., Canberra.

[6] M. Hall, Jr. (1972), Incidence Axions for Affine geometry, J. Algebra 21, 535-547.

[7] N. Hamada (1968), The rank of the incidence matrix of points and d-flats in finite geometries, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 32, 381-396.

[8] N. Hamada (1973), On the p-rank of the incidence matrix of a balanced or partially balanced incomplete block design and its applications to error correcting codes, Hiroshima Math. J. 3, 153-226.

[9] N. Hamada and H. Ohmori (1975), On the BIB design having the minimum p-rank, J. Combinatorial Theory 18, 131-140.

[10] N. Hamada (1981), The geometric structure and the p-rank of an affine triple system derived from a nonassociative Moufang loop with the maximum associative center, J. Combinatorial Theory Ser. A 30 (印刷中)

[11] L. Teirlinck (1980), On projective and affine hyperplanes, J. Combinatorial Theory Ser. A 28, 290-306.

[12] H. P. Young (1973), Affine triple systems and matroid designs, Math. Z. 132, 343-359.