数理解析研究所講究録
第429巻 1981年 40-62

ある種のブロック・デザインの不存在

カルガリイ大学　小川潤次郎
(名誉教授)

釣合型不完全ブロック計画—略してBIBD—は次のように定義される。v個の処理と大きさkのb個のブロックがあって、

(1) 各ブロックはk個の相異なる処理を含み、

(2) 各処理はr個のブロックに現われる。

(3) 任意の二つの処理の対は丁度λ個のブロックに現われる。

BIBDを規定する5個の径数 v, b, r, k, λ の間には次の関係があることは見易い。

$$vr = bk, \qquad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

更に又'Fisherの不等式'

$$v \leq b \quad 従って \quad r \geq k$$

が成り立つ。$v=b$ 従って $r=k$ のときBIBDは対称であるといい、然らざるときは非対称であるという。

1930年代にR.A. FisherとF. Yatesは$r \leq 10$の範囲のBIBDを全部リストしようとした。そのときどうしても作れないものが現われた。それは次のものであった。

(α) $v=15,\ b=21,\ r=7,\ k=5,\ \lambda=2,$

(α^*) $v=22,\ b=22,\ r=7,\ k=7,\ \lambda=2.$

(β) $v=21,\ b=28,\ r=8,\ k=6,\ \lambda=2.$

(β^*) $v=29,\ b=29,\ r=8,\ k=8,\ \lambda=2.$

(γ) $v=36,\ b=45,\ r=10,\ k=8,\ \lambda=2.$

(γ^*) $v=46,\ b=46,\ r=10,\ k=10,\ \lambda=2.$

(δ) $v=46,\ b=69,\ r=9,\ k=6,\ \lambda=1.$

(ε) $v=51,\ b=85,\ r=10,\ k=6,\ \lambda=1.$

色々な人々が試みたが作れないのでこれらの不存在証明ということが問題になつて来た訳である．更に部分釣合型不完全ブロック計画—PBIBD—でも同様の問題がある．この不存在証明に対する有力な武器はHasse-Minkowskiのp-不変量である．

§1. BIBDの結合行列　全体で$n=vr=bk$個ある実験単位又はプロットに任意に一連番号をつける．α-処理に対して，n次元のベクトルζ_αを次のように定める．但しζ_α'はζ_αの転置された行ベクトルを表わす．

$$\zeta_\alpha' = (\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \cdots, \zeta_{n\alpha})$$

で，その成分は

$$\zeta_{f\alpha} = \begin{cases} \text{もし}\alpha\text{処理が}f\text{プロットに施されるならば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0. \end{cases}$$

$n\times v$行列　$\Phi = \| \zeta_1\ \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_v \|$

を処理の結合行列という。a-ブロックに対してn次元ベクトルη_a

を次のように定める

$$\eta_a' = (\eta_{1a}\ \eta_{2a} \cdots\cdots \eta_{na}),$$

その成分は

$$\eta_{fa} = \begin{cases} \text{もし } f\text{-プロットが } a\text{-ブロックに属せば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0. \end{cases}$$

$n\times b$ 行列 $\Psi = \|\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_b\|$

をブロックの結合行列という。このとき

$$\Phi'\Phi = r I_v, \qquad \Psi'\Psi = k I_b.$$

さて、$v\times b$ 行列

$$N = \Phi'\Psi = \|n_{\alpha a}\|$$

を考えると、その要素 $n_{\alpha a}$ は

$$n_{\alpha a} = \sum_{f=1}^{n} \zeta_{f\alpha}\eta_{fa} = \begin{cases} \text{若し } \alpha\text{-処理が } a\text{-ブロックにあれば} & 1, \\ \text{然らざれば} & 0. \end{cases}$$

これは今考えているBIBDの結合行列と呼ばれている。

$$NN' = (r-\lambda) I_v + \lambda G_v.$$

但し G_v はその要素がすべて1である $v\times v$ 行列である。その行列式を取ると

$$\det NN' = rk(r-\lambda)^{v-1}.$$

この左辺は N の v 個の b 次元行ベクトルのグラム行列式であるから、これらは $r\neq\lambda$ なる限り一次独立で、従って $v\leqq b$ である。これは Fisher の不等式であった。若し $r=\lambda$ なら $v=k$, $b=r=\lambda$ となって完

全ブロック計画となつてゐる。

BIBDが対称ならNはnon-singularな正方行列であるから、$NN'=N'N$ 即ち正規行列となる。従って任意の二つのブロックはλ個の処理を共有することが判る。このことから、$v=b, r=k, \lambda$ である対称なBIBDが存在すればそれから1ブロックと、そのブロックに含まれるk個の処理を省くことによつて

$$v^* = v-k,\quad b^* = v-1,\quad r^* = k,\quad k^* = k-\lambda,\quad \lambda^* = \lambda$$

なる非対称なBIBDが生ずる。これを'切捨法'という。(α),(β),(γ)は夫々対称な(α*),(β*),(γ*)から切捨法で得られるものである。1ブロックを省き、それに含まれる処理丈を取ると

$$v^{**} = k,\quad b^{**} = v-1,\quad r^{**} = k-1,\quad k^{**} = \lambda,\quad \lambda^{**} = \lambda-1$$

なる非対称なBIBDが生ずる。

対称なBIBDでは結合行列は0−1要素をもつ正方行列だから det N は整数。従って

$$r^2(r-\lambda)^{v-1} = (\det N)^2 = \text{完全平方}.$$

$$(r-\lambda)^{v-1} = \text{完全平方}.$$

となる。もしvが偶数ならば、$v-1$ が奇数だから $r-\lambda$ 自身が完全平方にならねばならない。従って前掲の内(α*),(γ*)の不存在が判る。然し(α),(γ)の不存在はいえない。(β*)の存在不存在を判定するにはHasse-Minkowskiのp-不変量を引用しなければならない。

§2. Hasse-Minkowski の p-不変量　pを素数 a_i は正,負の整数又は0として

$$\alpha = a_{-\nu}p^{-\nu} + a_{-\nu+1}p^{-\nu+1} + \cdots + a_{-1}p^{-1} + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots\cdots$$

の形の級数をp-進数という.これからp^k以上の項を捨て去って残りの有限和をα_kとおくことにすると.二つのp-進数α,βについて,$\alpha=\beta$ということはある一定の正整数Kより大きなすべてのkについて

$$\alpha_k \equiv \beta_k \mod. p^k$$

が成り立つことと同値である.特に係数a_iを$0 \leqq a_i \leqq p-1$に限ることが出来るが,このときはp-進数のカノニカルな表現という.α,βが共にカノニカルな表現で表わされているならば,$\alpha=\beta$ということはすべてのkについて$a_k=b_k$というのと同値である.pの負巾を含まない

$$\gamma = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots\cdots$$

の形のものをp-進整数という.特に$a_0 \neq 0$とき単数という.γが単数ということは,γ^{-1}が整数ということゝ同値である.p-進数の全体は可換体をなしこれをQ_pで表わす.$Q \subseteq Q_p$.実数体を$R=Q_\infty$とおいてこれに対応するものをp_∞で表わすことにする.

今α,βを共に0でないp-進整数として,記号$(\alpha,\beta)_p$を次のように定義してこれをHilbertのノルム剰余記号と呼ぶ.不定方程式

$\alpha x^2+\beta y^2=1$ が p-進整数解をもてば，$(\alpha,\beta)_p=+1$，
然らざるとき　　　，$(\alpha,\beta)_p=-1$.

Hilbert記号の性質:

(1) a,b が共に負の整数でない限り $(a,b)_{p_\infty}=+1$.

(2) $(a,b)_p=(b,a)_p$.

(3) $(ac^2,bc^2)_p=(a,b)_p$.

(4) $(a,-a)_p=+1$.

(5) $(2ab,p)=1$ ならば有限の p では $(a,b)_p=1$.

(6) $(a,b)_p\cdot(a,c)_p=(a,bc)_p$

(7) $(a,a)_p=(a,-1)_p$.

(8) $(ac,bc)_p=(a,b)_p\cdot(c,-ab)_p$.

(9) $(a,p)_p=\left(\frac{a}{p}\right)$ (Legendre記号).

(10) a,b が 0 でない整数ならば $\prod_p(a,b)_p=+1$. 但しこの積は p_∞ を含むすべての素数にわたるものとする。

Hilbert記号については Helmut Hasse: Number Theory. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1980, Chapt. 5. §6. The Quadratic Reciprocity Law as Product Formula for the Hilbert Symbol pp. 92—96 参照.

二つの有理且対称な n 次の行列 A,B について，正則な有理行列 C があって，$C'AC=B$ となるとき，A と B とは有理的に合同であるといい，$A\sim B$ で表わすことにする．有理的合同については Hasseの定理が基本的である．吾々取って必要な形で Hasseの定理

を述べる.

<u>Hasseの定理</u> 二つのn次有理対称な定正行列A, Bが有理的に合同である為の必要且十分な条件は

$$\det A \sim \det B$$

で更にp_∞を含むすべての素数pに対して

$$c_p(A) = c_p(B)$$

であることである. 但しこゝに$D_0=1, D_1, D_2, \cdots, D_n=\det A$を夫々$0, 1, 2, \cdots, n$次の首座小行列式として

$$c_p(A) = (-1,-1)_p \prod_{i=1}^{n} (D_i, -D_{i-1})_p$$

であつて これが<u>Hasse-Minkowski</u>の<u>p-不変量</u>である.

吾々が使うのは必要条件の方丈である. すべてのnon-singularな二次形式はnon-singularな有理変換で対角線型になるから, 上の定理の必要条件の方を証明するには次の補題を証明すれば良い.

<u>補題</u> 二つのnon-singularな二次形式

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \quad と \quad f' = \sum_{i=1}^{n} a_i' x_i'^2$$

とが有理的に合同ならば,すべての素数pに対して

$$\bar{c}_p(f) = \bar{c}_p(f')$$

但しこゝで

$$\bar{c}_p(f) = \prod_{i=1}^{n} (D_i, -D_{i-1})_p = \prod_{i \leq k} (a_i, a_k)_p .$$

<u>証明</u>はnについての数学的帰納法でやる. 先ず$n=1$のときは, fとf'が有理的に合同ならば$a_1 \sim a_1'$, 従つて$(a_1, a_1)_p = (a_1', a_1')_p$.

$n=2$ のときは

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2=a_1'y_1^2+a_2'y_2^2$$

但し y_1, y_2 は x_1, x_2 の有理係数の一次式である.両辺に a_1 をかけて,こゝで $y_2=0$ とおくと

$$a_1^2x_1^2+a_1a_2x_2^2=a_1a_1'y_1^2$$

よって

$$a_1a_1'\left(\frac{y_1}{a_1x_1}\right)^2-a_1a_2\left(\frac{x_2}{a_1x_1}\right)^2=1$$

よって

$$(a_1a_1', -a_1a_2)_p=1$$

$$(a_1, -a_1a_2)_p=(a_1', -a_1a_2)_p$$

一方 $d(f)=a_1a_2\sim d(f')=a_1'a_2'$ であるなら

$$(a_1, -a_1a_2)_p=(a_1', -a_1'a_2')_p \Longrightarrow (a_1, a_2)_p=(a_1', a_2')_p$$

$$\bar{c}_p(f)=(a_1, a_1)_p(a_1, a_2)_p(a_2, a_2)_p=(-1, a_1)_p(a_1, a_2)_p(-1, a_2)_p=(-1, a_1a_2)_p(a_1, a_2)_p$$

$$=(-1, a_1'a_2')_p(a_1', a_2')_p=(a_1', a_1')_p(a_1', a_2')_p(a_2', a_2')_p=\bar{c}_p(f').$$

$n\geq 3$ のときは,$n-1$ 次迄は有理変換に対する $\bar{c}_p(f)$ の不変性は証明されたものと仮定する.

$$f=a_1x_1^2+\varphi(x_2, \cdots, x_n)\ ,\quad f'=a_1'x_1^2+\varphi'(x_2, \cdots, x_n)$$

で変換行列を $S=\|\alpha_{ik}\|$ とすれば

$$S'\begin{Vmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 \ddots & \\ 0 & & a_n \end{Vmatrix}S=\begin{Vmatrix} a_1' & & 0 \\ & a_2' \ddots & \\ 0 & & a_n' \end{Vmatrix}$$

である。今行列 S_0 を次の如くとる

$$S_0 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{a_2}{a_1'}\alpha_{21} & \cdots & -\frac{a_n}{a_1'}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

然らば計算して見れば判るように

$$f_0 = S_0' f S_0 = a_1' x_1^2 + \varphi_0(x_2, \cdots, x_n)$$

こゝで φ_0 の係数行列は

$$\begin{Vmatrix} a_2 - \frac{a_2^2\alpha_{21}^2}{a_1'} & -\frac{a_2 a_3 \alpha_{21}\alpha_{31}}{a_1'} & \cdots\cdots & -\frac{a_2 a_n \alpha_{21}\alpha_{n1}}{a_1'} \\ -\frac{a_3 a_2 \alpha_{31}\alpha_{21}}{a_1'} & a_3 - \frac{a_3^2\alpha_{31}^2}{a_1'} & \cdots\cdots & -\frac{a_3 a_n \alpha_{31}\alpha_{n1}}{a_1'} \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_n a_2 \alpha_{n1}\alpha_{21}}{a_1'} & -\frac{a_n a_3 \alpha_{n1}\alpha_{31}}{a_1'} & \cdots\cdots & a_n - \frac{a_n^2\alpha_{n1}^2}{a_1'} \end{Vmatrix}. \quad (*)$$

さて

$$S' S_0'^{-1} f_0 S_0^{-1} S = f'$$

でかつ計算で確かめられるように

$$S_0^{-1} S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{Vmatrix},$$

但し

$$\underset{(n-1)\times(n-1)}{B} = \|\beta_{ik}\|, \quad \beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{i1}\alpha_{1k}}{\alpha_{11}}.$$

従って

$$B' \varphi_0 B = \varphi'.$$

数学的帰納法の仮定から

$$d(\varphi_0)\sim d(\varphi'),\quad \overline{\zeta}_p(\varphi_0)=\overline{\zeta}_p(\varphi')$$

ところで

$$\overline{\zeta}_p(f_0)=(a_1',a_1')_p(a_1',d(\varphi_0))_p\cdot\overline{\zeta}_p(\varphi_0)=(a_1',a_1')_p(a_1',d(\varphi'))_p\cdot\overline{\zeta}_p(\varphi')=\overline{\zeta}_p(f').$$

従って われわれの証明すべきことは

$$\overline{\zeta}_p(f)=\overline{\zeta}_p(f_0)$$

ということになる.

扨て

$$\begin{array}{lll}
a_1' & & =u_1,\\
a_1'-a_2\alpha_{21}^2 & =u_1-a_2\alpha_{21}^2 & =u_2,\\
a_1'-a_2\alpha_{21}^2-a_3\alpha_{31}^2 & =u_2-a_3\alpha_{31}^2 & =u_3,\\
\text{-----------} & & \\
a_1'-a_2\alpha_{21}^2-a_3\alpha_{31}^2\cdots-a_{r-1}\alpha_{r-1\,1}^2 & =u_{r-2}-a_{r-1}\alpha_{r-1\,1}^2 & =u_r,
\end{array}$$

とかくと, φ_0 の係数行列(*)は次の行列と有理的合同となる.

$$\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
a_2\dfrac{u_2}{u_1} & 0 & \cdots & 0 & & & & \\
0 & a_3\dfrac{u_3}{u_2} & \cdots & 0 & & & O & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{r-1}\dfrac{u_{r-1}}{u_{r-2}} & & & & \\
\hline
 & & & & a_r\dfrac{u_{r-1}-a_r\alpha_{r1}^2}{u_{r-1}} & -\dfrac{a_ra_{r+1}\alpha_{r1}\alpha_{r+1\,1}}{u_{r-1}} & \cdots & -\dfrac{a_ra_n\alpha_{r1}\alpha_{n1}}{u_{r-1}}\\
 & O & & & -\dfrac{a_{r+1}a_r\alpha_{r+1\,1}\alpha_{r1}}{u_{r-1}} & a_{r+1}\dfrac{u_{r-1}-a_{r+1}\alpha_{r+1\,1}^2}{u_{r-1}} & \cdots & -\dfrac{a_{r+1}a_n\alpha_{r+1\,1}\alpha_{n1}}{u_{r-1}}\\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & -\dfrac{a_na_r\alpha_{n1}\alpha_{r1}}{u_{r-1}} & -\dfrac{a_na_{r+1}\alpha_{n1}\alpha_{r+1\,1}}{u_{r-1}} & \cdots & a_n\dfrac{u_{r-1}-a_n\alpha_{n1}^2}{u_{r-1}}
\end{array}\right\|$$

適当に変数の番号をつけかえて若し

$$u_r = u_{r-1} - a_r \alpha_{r1}^2 = 0$$

ならば

$$u_{r-1} - a_{r+1}\alpha_{r+1\,1}^2 = u_{r-1} - a_{r+2}\alpha_{r+2\,1}^2 = \cdots = u_{r-1} - a_n \alpha_{n1}^2 = 0$$

であるようにしておく．$r=n$ は不可能，何となればこれは $d(\varphi_0)=0$ を意味する．又 $r=n+1$ なら

$$\varphi_0 \sim \sum_{i=2}^{n} \frac{u_i}{u_{i-1}} x_i^2 \sim \sum_{i=2}^{n} u_{i-1}u_i x_i^2$$

$$2 < r \leqq n-1$$

の場合には

$$\varphi_0 \sim \varphi_1 + \varphi_2$$

ここで

$$\varphi_1 = \sum_{i=2}^{r-1} a_i \frac{u_i}{u_{i-1}} x_i^2 \sim \sum_{i=2}^{r-1} a_i u_i u_{i-1} x_i^2$$

$$\varphi_2 = -\sum_{i\neq j=0}^{n-r} \frac{a_{r+i}a_{r+j}\alpha_{r+i\,1}\alpha_{r+j\,1}}{u_{r-1}} x_{r+i}x_{r+j} \sim -u_{r-1}\sum_{i\neq j=0}^{n-r} x_{r+i}x_{r+j}$$

ところで，$u_1 = a' = a_1\alpha_{11}^2 + a_2\alpha_{21}^2 + \cdots + a_n\alpha_{n1}^2$ であって

$$a_r\alpha_{r1}^2 = a_{r+1}\alpha_{r+1\,1}^2 = \cdots = a_n\alpha_{n1}^2 = u_{r-1}$$

であったなら

$$a_1\alpha_{11}^2 = u_1 - a_2\alpha_{21}^2 - \cdots - a_{r-1}\alpha_{r-1\,1}^2 - (n-r+1)u_{r-1} = -(n-r)u_{r-1}$$

すなわち

$$a_1 \sim -(n-r)u_{r-1}$$

であることより

$$d(\varphi_1)\sim\prod_{i=2}^{r-1} a_i u_i u_{i+1} \sim a_2 a_3 \cdots a_{r-1} u_1 u_{r+1} \sim -(n-r) a_1 a_2 \cdots a_{r-1} \cdot u_1$$

又 $H_1=1$, $\nu\geq 2$ $H_\nu = |I_\nu - G_\nu| = -(\nu-1)$ として

$$\varphi_2 \sim H_1 x_r^2 + \frac{H_2}{H_1} x_{r+1}^2 + \cdots + \frac{H_{n-r+1}}{H_{n-r}} x_n^2$$

$$\sim x_r^2 - x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} (i-1) i\, x_{r+i}^2$$

から

$$d(\varphi_2)\sim -(n-r) a_r a_{r+1}\cdots a_n .$$

ところで $f_0 \sim u_1 x_1^2 + \varphi_1 + \varphi_2$ であることより, $\bar\varphi_1 = u_1 x_1^2 + \varphi_1$ として

$$f_0\sim\bar\varphi_1+\varphi_2$$

$$\bar c_p(f_0) = \bar c_p(\bar\varphi_1)\cdot \bar c_p(\varphi_2)\cdot (d(\bar\varphi_1), d(\varphi_2))_p$$

そこで

$$\bar c_p(\bar\varphi_1) = \prod_{1\le i\le k\le r-1} (a_i,a_k)_p \cdot (-(n-r), -a_2\cdots a_{r-1})_p ,$$

$$d(\bar\varphi_1)\sim -(n-r)a_1a_2\cdots a_{r-1},$$

$$\bar c_p(\varphi_2) = \prod_{r\le i\le k\le n} (a_i,a_k)_p \, (-(n-r), -a_r^{n-r})_p ,$$

$$d(\varphi_2)\sim -(n-r)a_r^{n-r}\sim -(n-r)a_ra_{r+1}\cdots a_n ,$$

から $\bar c_p(f_0)$ を計算して結局

$$\bar c_p(f_0)=\prod_{1\le i\le k\le n}(a_i,a_k)_p=\bar c_p(f)$$

を得る. これで補題の証明が終る.

定義から判ることは

(1) $c_p(\omega A) = (-1,\omega)_p^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(\omega,|A|)_p\cdot c_p(A)$

(2) $c_p(A\dotplus B) = (-1,-1)_p\cdot(|A|,|B|)_p\cdot c_p(A)\cdot c_p(B)$

(3) $c_p(\underset{n}{A}\otimes\underset{m}{B}) = (-1,-1)_p^{m+n+1}(-1,|A|)_p^{\frac{m(m-1)}{2}}\cdot(-1,|B|)_p^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(|A|,|B|)_p^{mn+1}\, c_p^m(A)\cdot c_p^n(B)$

但し $|A| = \det A$, $A \dotplus B = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$, $A \otimes B$ は Kronecker 積を表わすものとする.

Hilbert 記号の計算で有用なものに

$$(a, b)_p = (a+b, -ab)_p$$

特に $a = n+1$, $b = -1$ とすると

$$(n+1, -1)_p = (n, n+1)_p.$$

§3 対称な BIBD の存在の必要条件. BIBD が対称なら, その結合行列 N は正方行列であって

$$N I_v N' = (r-\lambda) I_v + \lambda G_v$$

だから

$$M \equiv (r-\lambda) I_v + \lambda G_v \sim I_v.$$

ところで M の特有根 $r + (v-1)\lambda = r^2$ に対応する固有ベクトルは $j_v' = (1, 1, \cdots, 1)$ であり, これに直交する有理ベクトルは M のもう一つの特有根 $r-\lambda$ に対応する.

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & v-1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & -1 & v-2 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & -1 & -1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots\cdots & -1 \end{Vmatrix},$$

とすれば

$$H' M H = \begin{Vmatrix} r^2 v & 0 \\ 0 & (r-\lambda) Q \end{Vmatrix},$$

こゝで

$$Q=\left\|\begin{matrix} v(v-1) & & & 0 \\ & (v-1)(v-2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\cdot 1 \end{matrix}\right\|.$$

$$C_p(Q)=(-1,-1)_p$$

であるから

$$C_p(M)=(-1,-1)_p\cdot(-1,r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}}(v,r-\lambda)_p.$$

一方 $C_p(I_v)=(-1,-1)_p$ であるから. 必要条件として, すべての素数 p に対して

$$S_p\equiv(-1,r-\lambda)_p^{\frac{v(v-1)}{2}}(v,r-\lambda)_p=+1.$$

を得る.

例えば, $v=b=29,\ r=k=8,\ \lambda=2$ のときは

$$S_p=(29,6)_p=(29,2)_p(29,3)_p$$

だから. $p=3$ とすれば,

$$S_3=\left(\frac{29}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$$

となるから. この径数に対応するBIBDは存在しない.

<u>§4 アソシエーション代数</u>　v 個の要素の間に定義された<u>アソシエーション</u>とは次の3条件を満たす関係である.

(1) 任意の二つの要素をとれば, それは互に第1種のアソシエートか, 第2種のアソシエートか, ……, 又は第 m 種のアソシエートかのいずれかである.

(2) 各要素は n_i 個の第 i 種アソシエートをもつ.

(3) 今 α と β が第 i 種のアソシエートであれば，α に対して第 j 種，β に対しては第 k 種アソシエートであるような要素 γ の数は p^i_{jk} であって，これはすべての第 i 種アソシエートの対に対して共通である.

各要素はそれ自身の第0種アソシエートであるということにすれば

$$n_0=1,\quad p^i_{0k}=\delta_{ik},\quad p^0_{ij}=n_i\delta_{ij}$$

ここに δ_{ij} は Kroneckerのデルタである.

これらの径数の間には次の関係が成りたつ.

$$\sum_{i=0}^m n_i = v.$$

$$p^i_{jk}=p^i_{kj},\quad \sum_{j=0}^m p^i_{jk}=n_k,$$

$$n_i p^i_{jk} = n_j p^j_{ki} = n_k p^k_{ij}.$$

第 i 種アソシエーションを表わす行列として

$$A_i = \| a^\beta_{\alpha i} \|,\ \text{但し}\ a^\beta_{\alpha i} = \begin{cases} \alpha \text{と} \beta \text{が第} i \text{種アソシエートなら} & 1, \\ \text{然らざるときは} & 0, \end{cases}$$

とすれば，まず

$$\sum_{i=0}^m A_i = G_v,$$

で更に

$$A_iA_j=\sum_{k=0}^m p^k_{ij}A_k = A_jA_i$$

となることが分る. すなわち一次独立な $m+1$ 個のアソシエーション

行列$\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$は有理数体の上に可換代数$\mathfrak{A}$を張り，これをアソシエーション代数という．

$$\mathfrak{P}_i = \| p_{\alpha\beta}^{i} \|_{\alpha,\beta=0,1,\cdots,m}, \quad i=0,1,\cdots,m$$

とすれば

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{A}_0 \\ \mathfrak{A}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_m \end{bmatrix} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{P}_i \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_0 \\ \mathfrak{A}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_m \end{bmatrix} \text{によって } \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{P}_i.$$

なる写像が定まるが，これは一次写像であって，$\mathfrak{A}$の正規表現を生成する．もし$\mathfrak{P}_i$, $i=0,1,\cdots,m$のすべての固有値が有理数ならば，$\mathfrak{A}$の正規表現は有理数体内で$m+1$個の一次表現に分解されて，従って$\mathfrak{A}$自身もこれら一次表現の一次結合として表わされる．

$$\mathfrak{A}_i \mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathfrak{A}_i = n_i \mathfrak{G}$$

なることを考慮して，

$$\mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m0} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{Vmatrix}$$

の形の non-singular な行列があって

$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}_i\mathfrak{C}^{-1} = \begin{Vmatrix} z_{0i}=n_i & & & 0 \\ & z_{1i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z_{mi} \end{Vmatrix}, \quad i=0,1,\cdots,m$$

となる．これから

$$
Z=\begin{Vmatrix} n_0=1 & n_1 & \cdots\cdots & n_m \\ z_{10}=1 & z_{11} & \cdots\cdots & z_{1m} \\ z_{20}=1 & z_{21} & \cdots\cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m0}=1 & z_{m1} & \cdots\cdots & z_{mm} \end{Vmatrix}
$$

として,

$$
C=Z'^{-1}
$$

ととれば良いことがわかる.

$$
A_u^{\#}=\sum_{t=0}^{m} c_{ut}A_t \quad , u=0,1,\cdots,m
$$

とおくとこれは互に直交するアイデムポテントであって

$$
A_u^{\#}A_i=z_{ui}A_u^{\#},\ u=0,1,\cdots,m\ ;\ i=0,1,\cdots,m.
$$

であって $A_u^{\#}$ の階数 α_u は $A_i\to z_{ui},\ i=0,1,\cdots,m$ の $\mathfrak{A}$ における重複度である. 従ってこれらは

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=v \\
\alpha_0 n_1+\alpha_1 z_{11}+\alpha_2 z_{21}+\cdots+\alpha_m z_{m1}=0 \\
\alpha_0 n_2+\alpha_1 z_{12}+\alpha_2 z_{22}+\cdots+\alpha_m z_{m2}=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_0 n_m+\alpha_1 z_{1m}+\alpha_2 z_{2m}+\cdots+\alpha_m z_{mm}=0
\end{array}\right\}
$$

から定められる. 勿論 $\alpha_0=1$ なることは見易い.

§5. 正則・対称な PBIBD の存在の必要条件. アソシエーションをもった v 個の処理が大きさ k の b 個のブロックに次の条件を満たすように割当てられているとき, これを部分釣合型不完全ブ

ロック計画 PBIBDという.

(1)各ブロックはk個の相異なる処理を含む.

(2)各処理はr個のブロックに現われる.

(3)第i種アソシエートの各処理対はλ_i個のブロックに現われる.

この場合も勿論 $vr=bk$ であり. 又

$$n_1\lambda_1+\cdots+n_m\lambda_m=r(k-1)$$

であるから. $\lambda_0=r$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{m} n_i\lambda_i=rk.$$

$v=b$ 従って $r=k$ の場合は PBIBD は対称であるという.

この PBIBDの結合行列を N とすれば

$$NN'=rA_0+\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_mA_m$$

さて

$$A_i=z_{0i}A_0^{\#}+z_{1i}A_1^{\#}+\cdots+z_{mi}A_m^{\#},\ i=0,1,\cdots,m$$

であったから. NN'を直交アイデンポテントで表わして

$$NN'=\rho_0A_0^{\#}+\rho_1A_1^{\#}+\cdots\cdots+\rho_mA_m^{\#}$$

とすれば

$$\rho_0=\sum_{i=0}^{m}z_{0i}\lambda_i=\sum_{i=0}^{m}n_i\lambda_i=rk,$$

$$\rho_i=\sum_{t=0}^{m}z_{it}\lambda_t,\ i=1,2,\cdots,m.$$

すべての $\rho_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$ のとき, PBIBD は正則であるという.

以下では PBIBD は対称,正則で且 $\mathcal{P}_i$ の固有値がすべて有理

数の場合を考える。説明を簡単にする為に $m=2$ として説明するが一般の場合への拡張は簡単である。

$m=2$ の場合には三つの直交する冪等行列 $A_0^{\#}=\frac{1}{v}G_v$, $A_1^{\#}$, $A_2^{\#}$ はみな有理行列であるから、これらから一次独立な列ベクトルを取り出して横にならべた行列を S とする。すなわち

$$S=\left\| a_1^{0\#}\, a_2^{1\#} \cdots a_{\alpha_1+1}^{1\#}\, a_{\alpha_1+2}^{2\#} \cdots a_v^{2\#} \right\|,$$

とし、更に

$$Q_1=\left\| \begin{matrix} a_2^{1\#\prime} \\ \vdots \\ a_{\alpha_1+1}^{1\#\prime} \end{matrix} \right\| \left\| a_2^{1\#} \cdots a_{\alpha_1+1}^{1\#} \right\|, \quad Q_2=\left\| \begin{matrix} a_{\alpha_1+2}^{2\#\prime} \\ \vdots \\ a_v^{2\#\prime} \end{matrix} \right\| \left\| a_{\alpha_1+2}^{2\#} \cdots a_v^{2\#} \right\|$$

とすれば

$$S'S=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{v} & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{matrix} \right\|$$

より

$$v\cdot|Q_1|\cdot|Q_2|\sim 1,$$

$$(|Q_1|,|Q_2|)_p\, C_p(Q_1)\cdot C_p(Q_2)=1,$$

また

$$S'NN'S=\left\| \begin{matrix} \frac{r^2}{v} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 Q_2 \end{matrix} \right\|$$

であって、対称なら $NN'\sim I_v$ だから

$$v\cdot \rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}|Q_1||Q_2|\sim 1$$

より

$$\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\sim 1.$$

更に $C_p(NN')$ を計算すると

$$(-1,-1)_p\cdot(\rho_1^{\alpha_1},\rho_2^{\alpha_2})_p\cdot(\rho_1,|Q_1|)_p\cdot(\rho_2,|Q_2|)_p\cdot(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}}\cdot(-1,\rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}$$

を得るので各件すべての素数 p について

$$O_p\equiv(-1,\rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}}\cdot(-1,\rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}\cdot(\rho_1,\rho_2)_p^{\alpha_1\alpha_2}\cdot(\rho_1,|Q_1|)_p\cdot(\rho_2,|Q_2|)_p=+1.$$

を得る. $|Q_1||Q_2|\sim v$ であったのだから, 結果は $|Q_1|$ さえその核が判れば O_p を書下せることになる.

(1) Group-divisible type: $v=b=mn,\ r=k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$

$$\rho_0=r^2,\quad \rho_1=r^2-v\lambda_2,\quad \rho_2=r-\lambda_1$$

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=m-1,\quad \alpha_2=(n-1)m.$$

$$(r^2-v\lambda_2)^{m-1}\cdot(r-\lambda_1)^{(n-1)m}\sim 1,$$

$$O_p=(-1,\rho_1)_p^{\frac{m(m-1)}{2}}\cdot(-1,\rho_2)_p^{\frac{m(n-1)(mn-m+1)}{2}}(\rho_1,n)_p^m(\rho_2,n)_p^m(\rho_1,\lambda_2)_p=1.$$

(2) Triangular type or T_2 type: $v=b=\frac{n(n-1)}{2},\ r=k,\ \lambda_1,\ \lambda_2.$

$$\rho_0=r^2,\ \rho_1=r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2,\quad \rho_2=r-2\lambda_1+\lambda_2$$

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=n-1,\quad \alpha_2=n(n-3)/2.$$

$$[r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2]^{n-1}[r-2\lambda_1+\lambda_2]^{\frac{n(n-3)}{2}}\sim 1.$$

$$O_p=(-1,\rho_1)_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1,\rho_2)_p^{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}}\cdot(\rho_2,n)_p\cdot(\rho_1,n-2)_p^{n-1}\cdot(\rho_2,2)_p\cdot(\rho_2,n-1)_p\cdot(\rho_2,n-2)_p^{n-1}=1.$$

(3) L_t type : $v=b=n^2,\ r=k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$

$$\rho_0=r^2,\ \rho_1=r+(n-t)\lambda_1-(n-t+1)\lambda_2,\ \rho_2=r-t\lambda_1+(t-1)\lambda_2$$

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=t(n-1),\quad \alpha_2=(n-1)(n-t+1)$$

$$\rho_1^{t(n-1)}\cdot\rho_2^{(n-1)(n-t+1)}\sim 1,$$

$$C_p = (-1, \rho_1)_p^{\frac{t(n-1)(n-t+1)}{2}} \cdot (-1, \rho_2)_p^{\frac{(n-1)(n-t+1)(2n-t-2)}{2}} \cdot (n, \rho_1\rho_2)_p^{nt} = 1$$

特に L_2 type においては

$$C_p = (-1, \rho_1)_p^{n-1} = 1$$

となる.

References

1. Bose, R. C. & Connor, W. S. (1952) Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, AMS. 23, 367—383.

2. Bruck, R. H. & Ryser, H. J. (1949) Non-existence of certain finite projective planes, Can. J. Math. 1, 88—93.

3. Connor, Jr., W. S. (1952). On the structure of balanced incomplete block designs, AMS. 23, 57—71.

4. Fisher, R. A. (1940). An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks. Ann. of Eugenics. 10, 52—75.

5. Fisher, R. A. & Yates, F. (1949) Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. Hafner Publishing Company. New York.

6. Hasse, H. (1923) Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. J. reine u. angewandte Math. 152, 205—224.

7. Ogawa, J. (1959) A necessary condition for existence of regular and symmetrical experimental designs of triangular type with partially balanced incomplete blocks. AMS. 30, 1063—1071.

8. Ogawa, J. (1960) On a unified method of deriving necessary conditions for exist—

ence of symmetrical partially balanced incomplete block designs of certain types, Bulletin of the International Statistical Institute, 38. Part IV. 43–57.

9. 小川潤次郎 (1965) 或種のブロック・デザインの不存在 数学 17. 65–72.

10. Ogawa, J. (1969) On the nonexistence of certain block designs, The Univ. of North Carolina Monograph Series in Probability and Statistics No. 4. The Univ. of North Carolina Press

11. Ogasawara, M. (1964) A necessary condition for existence of regular and symmetrical PBIBD of T_m type. Institute of Statistics Mimeograph Series No. 148, The Univ. of North Carolina.

12. Raghavarao, D. (1960) A generalization of group divisible designs. AMS 31. 756–771.

13. Raghavarao, D. & Chandrasekharao, K. (1964) Cubic designs. AMS 35. 389–397.

14. Seiden, Ester (1963) On necessary conditions for the existence of some symmetrical and unsymmetrical triangular PBIB designs. AMS 34. 348–351.

15. Shrikhande, S.S. (1950) The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs. AMS. 21. 106–111.

16. Shrikhande, S.S. (1951) Impossibility of some affine resolvable balanced incomplete block designs. Sankhyā 11, 185–186.

17. Shrikhande, S.S. (1953) The non-existence of certain affine resolvable balanced incomplete block designs, Canad. J. Math., 5, 413–420.

18. Shrikhande, S.S. (1959) The uniqueness of the L_2 association scheme, AMS 30. 781–789.

19. Shrikhande, S.S. (1960) Relations between certain incomplete block designs, Contributions to Probability and Statistics, Essays in Honor of Harold Hotelling. Stanford Univ. Press 388–395.

20. Shrikhande, S.S., Raghavarao, D. and Tharthare, S.K. (1963) Non-existence of some unsymmetrical PBIB designs, Canad. J. Math. 15. 686–701.

21. Singh, N.K. and Shukla, G.C. (1961). Non-existence of some PBIBD, J. Indian Statist. Assoc. 1, 71–78.

22. Tharthare, S.K. (1963) Right angular designs, AMS. 34. 1057–1067.

23. Vartak, M.N. (1958) On the Hasse-Minkowski invariant of the Kronecker product of matrices, Canad. J. Math. 10, 66–72.

24. Vartak, M.N. (1959) The non-existence of certain PBIB designs, AMS. 30, 1051–1062.

25. Yamamoto, K. (1965) A necessary condition for existence of partially balanced incomplete block designs with an m-subset association scheme, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 19. 76–98.

26. Yamamoto, K. (1965) On an orthogonal basis of the eigenspaces associated with partially balanced incomplete block designs of a Latin square type association scheme, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 19, 99–104.