数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 58-72

定常軸対称真空重力場方程式の無限次元変換群に関する話題

京大・数理研　上野喜三雄

§-0 〈はじめに〉

研究集会に於いては“重力場方程式へのモノドロミー保存変形理論の応用”と題する講演をしましたが，詳細は既に，講究録No 414 に報告してありますので，ここでは，上記の話題にスポットを当てて話しをしてみたいと思います。

重力場方程式の変換群論は，Geroch [7]に端を発っし，その後，Kinnersley-Chitre [1]～[6] 等の物理学者によって整備され，厳密解の構成上，必要な程度詳しく研究されています。その理論は数学的に十分興味深いものであるにも拘らず一部の“相対論屋”を除いて，全くと言って良い程，数学者の注意を惹かなかった。不思議である!?

彼らの理論の根幹をコムパクトに整理してまとめることは意義深いことであると信じます。何しろ，彼らの議論は，重力場方程式に限らず，他の場の方程式に対しても適用可能なのである。（最後の§を読んで下さい。）しかも，彼らの論文は，物理屋好みのテンソル記号で書かれてあるので，数学屋にとっては読みづらい代物である。

それでは，Kinnersley - Chitre の理論の根幹は何かと言うと，

"<u>定常軸対称真空重力場方程式の無限小変換全体のつくるLie環</u>"

$\cong \underline{sl(2,\mathbb{R})} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \underline{\mathbb{R}[t,t^{-1}]}$

ということに尽きる。$sl(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[t,t^{-1}]$ というLie環は，最<u>近話題</u>になっている<u>Kac-Moody Lie環</u>と呼ばれる無限次元Lie環の一例です。(Kac-Moody Lie 環の正確な定義及びその周辺の話題については，小池[ ] が面白く，又参考になる。なお，$sl(2)\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ は普通はKac-Moody Lie 環とは言わず，それの一次元の中心拡大を指して言う。)

以下，Kinnersley-Chitre [1], [2]の内容を整理してみる。

<u>§1.</u> 重力場方程式の内部対称性

<u>§1.1</u> 重力場方程式と$H^{(0)}$変換群

まず，定常軸対称真空重力場方程式についてであるが，これは，4次元の metric form

(1.1) $-ds^2 = e^{2\Gamma}(d\rho^2+dz^2) - g_{ab}\,dx^a dx^b \qquad (a,b=1,2)$

$(x^1, x^2) = (t,\phi),\ g_{ab} = g_{ab}(\rho,z),\ \Gamma = \Gamma(\rho,z)$

$\det g = -\rho^2,\quad g=(g_{ab})$ は対称

に対してEinstein方程式 $R_{ij}=0$ を課して得られる。本質的

な部分は，次の形にまとめられる。

(1.2) $\nabla\circ(\rho g^{-1}\nabla g)=0$

ここで，$\nabla=(\partial_\rho,\partial_z)$である。また，$\nabla$のdual operatorを$\tilde{\nabla}=(\partial_z,-\partial_\rho)$とおく。即ち(1.2)は，

(1.3) $\partial_\rho(\rho g^{-1}\partial_\rho g)+\partial_z(\rho g^{-1}\partial_z g)=0$

である。

(1.2)が(t,ϕ)の線型変換$\xi\in SL(2,\mathbb{R})$の下で共変であることに注意する。実際，

(1.4) $\xi:\begin{bmatrix}t\\ \phi\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}t'\\ \phi'\end{bmatrix}=\xi\begin{bmatrix}t\\ \phi\end{bmatrix}$

という座標変換で，gは

(1.5) $\xi: g\longmapsto g'={}^t\xi^{-1}g\,\xi^{-1}$

と変換されるが，g'は明らかに(1.2)を満たす。我々は，この変換群$H^{(0)}$と記す。gが対称であること，及び，$SL(2,\mathbb{R})\simeq SO(2,1)$ということに注意して，

(1.6) $g=\begin{pmatrix}g_1 & g_2\\ g_2 & g_3\end{pmatrix}$

によって$SO(2,1)$ベクトルg_aを定義する。又，一般に下つきベクトルf_aに対して，上つきベクトルf^aを

(1.7) $f^1=f_3,\ f^2=-2f_2,\ f^3=f_1$

により定める。$2\det g=2(g_1g_3-g_2^2)$は$SO(2,1)$不変な内積を定めることに注意する。

場の方程式(1.2)は，

(1.8) $\nabla_3 \circ v^c = 0$, $c = 1, 2, 3$

where $\nabla_3 \circ = \rho^{-1} \nabla \circ \rho$, $v^c = \rho^{-2} \epsilon^{abc} g_a \nabla g_b$

と同値になる。ここで，添え字の和については Einstein の規約を用ちいた。ϵ^{abc} は完全反対称テンソルである。

$SL(2, \mathbb{R})$ の generators

$$\xi_a : \begin{bmatrix} t \\ \phi \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} t' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \xi_b : \begin{bmatrix} t \\ \phi \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} t' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$\xi_c : \begin{bmatrix} t \\ \phi \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} t' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & \\ & c^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ \phi' \end{bmatrix}$$

に対してベクトル g_a は次の様に変換される。

$$\xi_a : \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ & 1 & 2a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \quad \xi_b : \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2b & 1 & \\ b^2 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

(1.9)

$$\xi_c : \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c^2 & & \\ & 1 & \\ & & c^{-2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

(1.9)は，$H^{(0)}$ 群の $SO(2,1)$ ベクトル表現である。

次に我々は，Ernst ポテンシャル E を導入する。(1.2)より

(1.10) $\exists \psi$ s.t. $\nabla \psi = \rho^{-1} g \sigma \tilde{\nabla} g$, where $\sigma = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

を満たす ψ が積分定数を除いて定まる。従って，

(1.11) $E = g + i\psi$

とおけば，E は

(1.12) $\nabla E = i \rho^{-1} g \sigma \tilde{\nabla} E$

をみたす。E を Ernst ポテンシャルという。ここで注意すべきことは，ψ が対称ではないことである。即ち，

(1.13) $\nabla(\psi_{21} - \psi_{12}) = 2 \tilde{\nabla} \rho$

という関係がある。又，ψに対応する$SO(2.1)$ ベクトルψ^aを

(1.14) $\nabla\psi^a = \rho^{-1}\epsilon^{abc}g_b\nabla g_c$

によって定義する。

§1.2 Ehlers変換と変換$H^{(1)}$の構成

さて$H^{(0)}$群の変換性を見るにはgという変数が適切であったが，$H^{(1)}$を導入するには，次によって新たな従属変数を導入しなければならない。

(1.15) $g_{12}=-g_{11}\omega,\ g_{22}=g_{11}\omega^2-\rho^2g_{11}^{-1}$

とおく。この変数のもとで場の方程式(1.8)は次に帰着される。

(1.16) $\begin{cases}\nabla_3\circ(g_1^{-1}\nabla g_1+g_1^{-2}\psi_1\nabla\psi_1)=0\\ \nabla_3\circ(g_1^{-2}\nabla\psi_1)=0\end{cases}$

我々は，更に，新しい従属変数として，$SO(2.1)$ベクトルF_aを

(1.17) $F_1=g_1^{-1},\ F_2=g_1^{-1}\psi_1,\ F_3=g_1^{-1}(g_1^2+\psi_1^2)$

によって定義する。このとき，簡単な計算により次の命題を得る。

命題1.1 場の方程式(1.16)は，次の$SO(2.1)$共変な方程式

(1.18) $\nabla_3\circ V^a=0$

ここで，

(1.19) $V^a=\epsilon^{abc}F_b\nabla F_c$

と同値である。

さて場の方程式を(1.18)と表わしたときの $SO(2.1)$ の作用をH群と呼ぶことにすれば，それは F_a に対して次の様に表現される。

$$(1.20)\quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\alpha & 1 & \\ \alpha^2 & -2\alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \beta^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2\gamma & \gamma^2 \\ & 1 & -\gamma \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

H群の変数 (g_1, ψ_1), もしくは E_{11} に対する *action* は次によって与えられる。

<u>命題1.2</u>　Hは次の3つの *generator* で生成される

$$(1.21)\quad g_1 \mapsto g_1,\quad \psi_1 \mapsto \psi_1 - \alpha$$

$$(1.22)\quad g_1 \mapsto \beta g_1,\quad \psi_1 \mapsto \beta\psi_1$$

$$(1.23)\quad g_1 \longmapsto \frac{g_1}{(1-\gamma\psi_1)^2+\gamma^2 g_1^2},\quad \psi_1 \longmapsto \frac{\psi_1 - \gamma(g_1^2+\psi_1^2)}{(1-\gamma\psi_1)^2+\gamma^2 g_1^2}$$

Ernst ポテンシャル E_{11} に対しては，

$$(1.21)'\quad E_{11} \longmapsto E_{11} - i\alpha$$

$$(1.22)'\quad E_{11} \longmapsto \beta E_{11}$$

$$(1.23)'\quad E_{11} \longmapsto \frac{E_{11}}{i\gamma E_{11}+1}$$

(1.21), (1.22)は各々，ψ_1 の *gauge* 変換, *rescaling* を意味するもので単純な変換であるが，(1.23), (1.23)′ は本質的である。(1.23) が謂ゆる <u>*Ehlers* 変換</u>に他ならぬ。

我々が次にすることは，この *Ehlers* 変換がもとの変数 $g =$

(g_{ab})に対して，無限小の意味でどの様に作用するかを見ることである。その為に$SO(2.1)$ベクトルΦ^aを

(1.24) $\quad \nabla\Phi^a = \rho\,\epsilon^{abc} F_b \hat{\nabla} F_c$

によって導入する。積分定数を適当に調節することで，

(1.25) $\quad \Phi_1 = \omega, \qquad \Phi_2 = \omega\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 - Z$

としてよいことは容易に判る。Ehlers変換(1.23)に対して，ベクトルΦ_aが，

(1.26) $$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}1 & -2r & r^2\\ & 1 & -r\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{bmatrix}$$

という変換を受けることがΦ^aの定義からわかるので，次の命題を得る。

<u>補題1.3</u> Ehlers変換(1.23)に対して，ωは

(1.27) $\quad \omega \mapsto \omega - 2r\Phi_2 + r^2\Phi_3$

と変換される。

従って，<u>無限小Ehlers変換</u>に対しては，g_1, ω は，

(1.28) $\quad g_1 \mapsto g_1 + 2r g_1\psi_1, \quad \omega \mapsto \omega - 2r\Phi_2$

と変換される。

<u>命題1.4</u> 無限小Ehlers 変換によるg^aの変換は，次の式で$r_1 = r_2 = 0$とおいて得られる。

(1.29) $$\begin{bmatrix}g^1\\ g^2\\ g^3\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}g^1\\ g^2\\ g^3\end{bmatrix} + 2[r_1, r_2, r_3]\begin{bmatrix}g^1\\ g^2\\ g^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^1\\ \psi^2\\ \psi^3\end{bmatrix} - 2(g_b\psi^b)\,G^{-1}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} & r_3 & -r_2\\ -r_3 & & r_1\\ r_2 & -r_1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ g_3\end{bmatrix} Z$$

ただし，$G^{-1}=\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ である。

無限小変換 (1.29) で各々 $r_2=r_3=0$, $r_1=r_3=0$ としたものは，$H^{(0)}$ 群と無限小 Ehlers 変換との適当な合成によって得られる。従って，(1.29) において r_1, r_2, r_3 は各々独立なものが許される。例えば，$r_2=r_3=0$ に対応する変換は，$H^{(0)} \ni \xi=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ として，ξ(Ehlers 変換)ξ^{-1} の無限小変換である。(1.29) において重要なことは，この変換が $H^{(0)}$ 共変になっていることである。

(1.29) に対応する変換全体を $\underline{H^{(1)}}$ と記す。これは群を成さない。また，$H^{(0)}$, $H^{(1)}$ の無限小変換を $\underline{\mathfrak{h}^{(0)}}$, $\underline{\mathfrak{h}^{(1)}}$ とする。

次に，$\mathfrak{h}^{(1)}$ が，$g=(g_{ab})$, Ernst ポテンシャル E にどのように act するかを調べる。

<u>補題 1.5</u> 無限小 Ehlers 変換 (1.28) に対して，

(1.30)
$$
\begin{aligned}
g_{11} &\longmapsto g_{11} + 2r\, g_{11}\psi_{11} \\
\omega &\longmapsto \omega - 2r(\psi_{21} + \omega\psi_{11}) \\
\psi_{11} &\longmapsto \psi_{11} - r(E_{11}E_{11}^{*} - 2\psi_{11}^{2}) \\
\psi_{21} &\longmapsto \psi_{21} - r(\Phi_3 - \omega E_{11}E_{11}^{*} - 2\psi_{11}\psi_{21})
\end{aligned}
$$

と変換される。ここで，$*$ は複素共役である。

この補題より次の命題を得る。

<u>命題 1.6</u> 無限小 Ehlers 変換に対して $g=(g_{ab})$ は，

(1.31)
$$
\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} r g_{11}\psi_{11} & r g_{11}\psi_{21} \\ r g_{11}\psi_{21} & r(-g_{22}\psi_{11} + 2\psi_{21}g_{12}) \end{bmatrix}
$$

と変換される。

Ernst ポテンシャルに対するEhlers変換の作用を見る為に，新たにポテンシャルを導入しなければならない。

<u>補題1.7</u> 次を満たすポテンシャルNが（積分定数を除いて）unique に存在する。

(1.32) $\quad \nabla N = E^{*}\sigma\nabla E$

ここで，$*$ はエルミート共役を意味する。

このポテンシャルの助けを借りて，Eは，Ehlers 変換により，次の如き変換を受けることがわかる。

<u>命題1.8</u> Eに対する無限小Ehlers変換のactionは，次の変換で $\gamma = \begin{pmatrix} & \\ & \gamma_{22} \end{pmatrix}$ とすることにより得られる。

(1.33) $\quad E \mapsto E + iE\sigma\gamma\sigma E + i\gamma\sigma N - i(N + E\sigma E)\sigma\gamma$

この命題の証明は，大変長く，又，困難なものである。（Kinnersley-Chitre の原論文[1] では，勿論，証明など無い。結果のみ書かれている。）

無限小変換$\mathfrak{g}^{(1)}$が，Eにどのようにact するかを知るには，次のことに注意すれば十分である。即ち，

$$sym(2,\mathbb{R}) = \{\gamma \in M(2.\mathbb{R}) \mid {}^{t}\gamma = \gamma\} \cong sl(2.\mathbb{R}) \quad (\text{Lie環の同型})$$
$$\gamma \longmapsto \sigma\gamma$$

このことと，$SO(2.1)$ベクトル${}^{t}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ が$SL(2.\mathbb{R})$対称テンソル$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$に対応することより，命題1.4で(1.29) から$\mathfrak{g}^{(1)}$

を構成したのと同じ手続きで，次の定理を得る。

定理1.9 無限小変換$\mathfrak{g}^{(1)}$に対して，ポテンシャルEは，γを任意の実対称行列として，(1.33)という変換を受ける。

なお，$\mathfrak{g}^{(0)}$によって，Eは，

(1.34) $E \longmapsto E + \gamma\sigma E - E\sigma\gamma$, $\gamma \in sym(2,\mathbb{R})$

と変換される。又，

(1.35) $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(0)}]$

であることに注意しよう。

§2 K-C変換群とKac-Moody Lie 環

§2.1 ポテンシャルの無限系列

§1.2で，Eから新しいポテンシャルNを導入したが，実は無限個のポテンシャル $N^{(m,n)}$ を帰納的に定義することができる。

命題2.1 次の関係によってポテンシャル$E^{(n)}$，及び$N^{(m,n)}$が導入できる。

(2.1) $E^{(n+1)} = i\,(N^{(1,n)} + E^{(1)}\sigma E^{(n)}) \qquad n \geqq 0$

$E^{(0)} = +i\sigma$

(2.2) $\nabla N^{(m,n)} = E^{(m)*}\sigma \nabla E^{(n)} \qquad m \geqq 0,\ n \geqq 1,$

$N^{(0,n)} = -iE^{(n)}$,

しかも$N^{(m,n)}$の間には次の漸化関係式が成立する。

(2.3) $$N^{(m,n)}-N^{(n,m)*}=E^{(m)*}\circ E^{(n)}$$

(2.4) $$N^{(m,n+1)}-N^{(m+1,n)}=i\,N^{(m,1)}\circ E^{(n)}$$

$\mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(0)}$の元を$\{N^{(m,n)}\}$上に作用させるとどうなるかを見よう。$\mathfrak{g}^{(1)}$の元を$r^{(1)}t^{-1}$, $r^{(1)}\in sym(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}^{(0)}\ni r^{(0)}$は, $sym(2,\mathbb{R})$の元とする。

補題2.2, $r^{(0)}$, $r^{(1)}t^{-1}$は, 各々, $\{N^{(m,n)}\}$上に次の様に作用する。

(2.5) $$r^{(0)}:\ N^{(m,n)}\mapsto N^{(m,n)}+r^{(0)}\circ N^{(m,n)}-N^{(m,n)}\circ r^{(0)}$$

(2.6) $$r^{(1)}t^{-1};N^{(m,n)}\mapsto N^{(m,n)}+r^{(1)}\circ N^{(m+1,n)}-N^{(m,n+1)}\circ r^{(1)}$$
$$-N^{(m,1)}\circ r^{(1)}\circ N^{(0,n)}$$

for $m\geqq 0,\ n\geqq 1$.

証明は, 漸化式(2.3), (2.4)を用いて, 帰納的に成される。

§2.2 Kac-Moody Lie環

$\mathfrak{g}^{(1)}$より, 無限小変換$\mathfrak{g}^{(k)}$ $(k\geqq 2)$を,

(2.7) $$\mathfrak{g}^{(k+1)}=[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(1)}]$$

によって定義する。$r^{(k)}t^{-k}\in\mathfrak{g}^{(k)}$とすると次の命題を得る。

命題2.3 $r^{(k)}t^{-k}$は$\{N^{(m,n)}\}$上に次の様に作用する。

(2.8) $$r^{(k)}t^{-k};\ N^{(m,n)}\mapsto N^{(m,n)}+r^{(k)}\circ N^{(m+k,n)}-N^{(m,n+k)}\circ r^{(k)}$$
$$-\sum_{j=1}^{k}N^{(m,j)}\circ r^{(k)}\circ N^{(k-j,n)}$$

しかも，すべての $k, l \geqq 0$ に対して，

(2.9) $\quad [r^{(k)}t^{-k}, r^{(l)}t^{-l}] = [r^{(k)}, r^{(l)}]t^{-k-l}$

が成立する。ただし，$[r^{(k)}, r^{(l)}] = r^{(k)} \circ r^{(l)} - r^{(l)} \circ r^{(k)}$ ($sym(2, \mathbb{R})$ の Lie ブラケット)。(2.9)に於いて，左辺のブラケットは，無限小変換に対するものである。

マイナスの degree をもつ無限小変換も構成することが出来る。$\mathfrak{g}^{(-1)}$ は，gauge 変換に対応する無限小変換であって，その元は，$r^{(-1)}t$，$r^{(-1)} \in sym(2, \mathbb{R})$ と表わされる。ここで，gauge 変換とは，ポテンシャル $N^{(m,n)}$ を導入する際の積分定数の不定さを意味する。このことに注意して，次の補題を得る。

補題 2.4 $r^{(-1)}t \in \mathfrak{g}^{(-1)}$ は，$\{N^{(m,n)}\}$ 上に次の様に作用する。

(2.10) $\quad N^{(m,n)} \mapsto N^{(m,n)} - \delta_{m,0} r^{(-1)} \delta_{n,1} + r^{(-1)} \circ N^{(m-1,n)} - N^{(m,n-1)} \circ r^{(-1)}$

ただし，$\delta_{m,0}$，$\delta_{n,1}$ はクロネッカーのデルタ記号。

前と同じく，帰納的に，

(2.11) $\quad \mathfrak{g}^{(-k-1)} = [\mathfrak{g}^{(-k)}, \mathfrak{g}^{(-1)}] \qquad k \geqq 1$，

と定義する。$\mathfrak{g}^{(-k)}$ の元を $r^{(-k)}t^{k}$，$r^{(-k)} \in sym(2, \mathbb{R})$ と表わすことにすれば，次の命題が成立する。

命題 2.5 $r^{(-k)}t^{k}$ ($k \geqq 1$) は，$\{N^{(m,n)}\}$ 上に，次の様に作用する。

(2.12) $\quad r^{(-k)} : N^{(m,n)} \mapsto N^{(m,n)} - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{m,j} r^{(-k)} \delta_{k-j,n} + r^{(-k)} \circ N^{(m-k,n)} - N^{(m,n-k)} \circ r^{(-k)}$

しかもすべての $k\geqq 0$, $l\geqq 0$ について,

(2.13) $\quad [r^{(-k)}t^{k}, r^{(-l)}t^{l}] = [r^{(-k)}, r^{(-l)}]t^{k+l}$

が成立する。

そこで,我々は,

(2.14) $\quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}^{(k)}$

と定義しよう。主定理は次の如く述べられる。

定理2.6 $\mathfrak{g}$ は, Lie 環として, $sym(2,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[t,t^{-1}]$ と同型である。即ち,すべての, k, l について,

(2.15) $\quad [r^{(k)}t^{-k}, r^{(l)}t^{-l}] = [r^{(k)}, r^{(l)}]t^{-k-l}$

が成立する。

$\mathfrak{g}$ に対応する変換群を, Kinnersley と Chitre に因んで, K-C 変換群と呼ぶことにする。K-C群は,無限次元の群であって,その Lie 環は, Kac-Moody algebra $sl(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[t, t^{-1}]$ なのである。

§3 その他の話題

§1, 2 で紹介した話は, K-C [1] [2] の内容の一部を(数学者にとって判り易いように)整理し,書き換えたものである。変換群の構成は,随分とまわりくどいものであるが,それだけに, Kinnersley と Chitre のパイオニア精神が感じられ,素朴な感動が湧き上ってくる。これが, Kac-Moody Lie 環

なるものを知らない物理学者の仕事なのである!!

なお，K-C[1],[2]では，電磁場を外場とするときの方程式(Einstein-Maxwell 方程式)の変換群も構成されている。今度は，Lie 環は，$su(2,1)\otimes \mathbb{R}[t,t^{-1}]$と同型である。

K-Cの一連の論文が発表された後，Hauser と Ernst は，[9]に於いて，Riemann-Hilbert問題を用ちいて，直接的にK-C変換群を構成する方法を提出した。彼らの方法は，本人達が意識しているか否かは知らないが，かなり一般性のあるもので，実際，筆者は，彼らの formalism を modify して，SU(2) chiral field equation の変換群を構成するのに成功した。Lie 環は $su(2)\otimes \mathbb{R}[t,t^{-1}]$ となる。又，重力場に於けるH-E formalism とモノドロミー保存変形との関連も，筆者により明らかにされている。これらの報告は，他日を期すことにする。

1981. 4. 8

References

[1] W. Kinnersley ; J. Math. Phys Vol 18 No 8 1977, 1529～1537.

[2] W. Kinnersley, D.M. Chitre ; (上に同じ) 1538～1542.

[3] 〃 ; J. Math. Phys. 19(9), 1978,

1926～1931.

[4] W. Kinnersley, D.M. Chitre; J. Math. Phys 19 (10), 1978, 2037～2042.

[5]. C. Hoenselaers ; J. Math. Phys 20 (12) 1979, 2526～2529.

[6]. C. Hoenselaers, W. Kinnersley, and B. C. Xanthopoulos; (上に同じ) 2530～2536.

[7] R. Geroch ; J. Math. Phys. 12, 1971, 918, 同, 13, 1972. 394.

[8] I. Hauser, J. Ernst ; Phys. Rev. D 20 (2), 1979, 362～369.

[9] 〃 ; 〃 20 (8) 1979, 1783～1790.

[10] 〃 ; J. Math. Phys. 21 (5), 1980, 1126～1140.

[11] 〃 ; 〃 21 (6), 1980, 1418～1422.

[12] C. M. Cosgrove ; J. Math. Phys. 21 (9), 1980, 2417～2447.