数理解析研究所講究録
第 431 巻 1981 年 78-82

Higher residues とその応用

京大 数理研 斎藤恭司 *)

微分形式

$$\frac{dx}{x}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

等に対し一種の"Hamilton系"を導入し、これらをそれぞれそれに同伴した原始積分とみなすことを考える。Hamiltonian として

$$F = xy-t, \qquad x^2+y^2-r^2\ (\text{符号を除き}), \quad y^2-(4x^3-g_2x-g_3)$$

とおけば、上はそれぞれ $\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{F}\right]$ となる。例えば

$$\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{xy-t}\right] = \frac{dx}{\frac{\partial(xy-t)}{\partial y}} = \frac{dx}{x}$$

つまり、一般に $\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{F}\right]$ の Hamiltonian が F だというわけである。上の F はそれぞれ A_1, A_2, A_3 という特異点の普遍変形になっていることに注意すれば、A_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ のすべてについて F が構成できるはずである。実際、A_n については超楕円積分で書ける。更に進むと面白そうな超越函数が出て来る。これらは以下に述べる higher residue

*) 文責・研究代表者

$K^{(k)}$という概念を用いると，これに対する広田の双一次形式を用いた２階微分方程式で書けるのである．

$$F(x_0,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_\mu)=t_1-F_1(x,t')$$

を Hamiltonian とする．$t'=(t_2,\cdots,t_\mu)$ である．

$$\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{\mu}\supset X=\{F=0\}$$
$$\cup$$
$$C=\left\{\frac{\partial F}{\partial x_0}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=0\right\}$$

により C を導入し，また

$$\mathcal{O}_T=\mathbb{C}\{t_2,\cdots,t_\mu\},\quad \Omega^{n+1}_{X/T}=\mathcal{O}_X\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n$$

とおく．*higher residue*

$$K^{(k)}:\Omega^{n+1}_{X/T}\times\Omega^{n+1}_{X/T}\longrightarrow\mathcal{O}_T,\quad k=0,1,2,\cdots$$

を次の様に帰納的に定義する．$x=(x_0,\cdots,x_n)$ とおき，まず

$$K^{(0)}(\varphi(x,t')dx,\psi(x,t')dx):=\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{\varphi\psi\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]$$

とおく．ただし $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=0$ は完全交叉になっているとする．そのときResは次々にとれ，最後は $\mathcal{O}_T$ の元となる．

$$K^{(1)}(\varphi dx,\psi dx):=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\psi-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]$$

$$K^{(2)}(\varphi dx,\psi dx):=\frac{1}{4}\sum_{i\le j}\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{(\varphi_{ij}\psi-\varphi_i\psi_j-\varphi_j\psi_i+\varphi\psi_{ij})\,dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{i\le j\le k}\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{\varphi\psi\frac{\partial^3F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\,dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right)$$

ここで，$K^{(1)}$，$K^{(2)}$ の分子はそれぞれ広田の記号で $D_{x_i}\varphi\cdot\psi$，$D_{x_i}D_{x_j}\varphi\cdot\psi$ と書けることに注意せよ．一般にも最高階のとこ

るはそう書ける. さて柏原の理論によれば, Fに同伴したGauss-Manin 接続が単純ホロノミー系となり, 従って後者を考えておけばもとのFは同型を除き一意に復元できる. そこで一般の$K^{(k)}$は次の諸性質により定義する.

0) $K^{(k)}$ はkが偶数のとき対称, kが奇数のとき歪対称.

1) $K^{(k)}(t_1\omega_1, \omega_2) - K^{(k)}(\omega_1, t_1\omega_2) = (n+k-1)K^{(k-1)}(\omega_1, \omega_2)$

(これは Schlesinger 変換 (exponent のずらし) とも解釈できる.)

2) $\frac{\partial}{\partial t_i} K^{(k)}(\omega_1, \omega_2) = K^{(k)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}\omega_1, \omega_2) + K^{(k)}(\omega_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}\omega_2)$

$i = \cdots, \mu.$

3) $K^{(k)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}\omega_1, \omega_2) = K^{(k+1)}(\omega_1, \omega_2)$

また, ζをn-形式とすれば,

$$K^{(k+1)}(dF_1 \wedge \zeta, \varphi dx) = K^{(k)}(d\zeta, \varphi dx)$$

故に$K^{(k)}$は $dF_1 \wedge d\Omega^{n-1}_X \times \Omega^{n+1}_{X/T}$ を0に写すので, $\mathcal{H} = \Omega^{n+1}_{X/T} / dF_1 \wedge d\Omega^{n-1}_{X/T}$ とおけば, 実は

$$K^{(k)} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}_T$$

という双一次形式とみなせる. $\mathcal{H}$は階数μの自由$\mathcal{O}_S$-加群である. $(S = \mathbb{C}^\mu)$. $\mathcal{H}$の filtration として,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \supset \mathcal{H}^{(-1)} \supset \mathcal{H}^{(-2)} \supset \cdots$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}$$

を考える. $\mathcal{H}^{(0)}$は $\mathbb{C}\{\{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}})^{-1}\}\}$-加群として単純 holonomy 系.

（即ち単項生成）となる．その生成元 $\zeta^{(0)}$ が Hamiltonian の候補を与えるであろう．そこで一般に

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i>k} a_{ik}(t')\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}\right)^{-k}\zeta^{(0)}=\omega$$

を計算してみる．$\zeta^{(-k)}=\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}\right)^{-k}\zeta^{(0)}$ とおけば，$\delta,\delta'\in\sum_{i=1}^{\mu}\mathcal{O}_T\frac{\partial}{\partial t_i}=\mathcal{G}$ に対し

$$\nabla_\delta\nabla_{\delta'}\zeta^{(-2)}=\nabla_{\delta*\delta'}\zeta^{(-1)}+\nabla_{\nabla_\delta\delta'}\zeta^{(-2)}+\nabla_{\bigcirc}\zeta^{(-3)}+\cdots$$

と書ける．ここに $\delta*\delta'$ は residue product と云われるものである．同様に

$$t_1\nabla_\delta\zeta^{(-1)}=\nabla_{t_1*\delta}\zeta^{(-1)}+\nabla_{N\delta}\zeta^{(-2)}+\nabla_{\bigcirc}\zeta^{(-3)}+\cdots$$

と書ける．ここで

∇: $\mathcal{G}$ 上の integrable, torsion free, metric connection

N: $\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ は $\mathcal{O}_T$-endomorphism.

$\nabla N=0$, $N+N^*=(n+1)I$

等がわかる．具体的計算は未知だが面白いと思う．時間が無いのでうまく説明できないが，flat coordinate の存在と τ 函数の存在が対応している．さて，生成元をうまく選べば $\zeta^{(-3)}$ から先は消せるかもしれない．即ち

<u>定義</u> $\zeta^{(0)}\in\mathcal{H}^{(0)}$ が原始積分とは，

i) $K^{(i)}(\nabla_\delta\zeta^{(-1)},\nabla_{\delta'}\zeta^{(-1)})=0$ $\quad i\geq 1$

ii) $K^{(i)}(\nabla_\delta\nabla_{\delta'}\zeta^{(-2)},\nabla_{\delta''}\zeta^{(-1)})=0$ $\quad i\geq 2$

iii) $K^{(i)}(t, \nabla_\delta \zeta^{(-1)}, \nabla_\delta \zeta^{(-1)}) = 0 \qquad i \geq 2$

を満たすことを云う.

このとき $\zeta^{(0)}$ は Ψ.D.O. ではなく P.D.O. としても単純ホロノミー系を満たすことになる.

$F(x,t)$ の計算については A_k. D_k. E_6. E_7. E_8 で実際上の意味での原始積分が存在することがわかっている. $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ については未知の函数となるはずである.