数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 83-89

Holonomic system の制限と characteristic variety

京大 数理研 柏原 正樹*)

Holonomic system を subvariety に制限したらその support はどうなるか，という問題を考える．$X \supset Y$ とし，$\mathcal{M}$ を連接 $\mathcal{D}_X$-加群，$\mathcal{M}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ をその Y への制限とする．これは $\mathcal{D}_Y$-加群である．

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y T^*Y & \hookrightarrow & T^*X \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\ T^*Y & & \end{array}$$

により射影 ρ を定義する．まず基本的な結果として

<u>定理</u> 非特性的な場合，即ち $Ch(\mathcal{M}) \cap T^*_Y X$ が 0-切断に含まれるとき，$\mathcal{M}_Y$ は連接的で

$$Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \rho\left(Ch(\mathcal{M}) \cap X \times_Y T^*Y \right)$$

(このとき ρ は $Ch(\mathcal{M})$ の上で有限的写像になり，像は閉集合となる．)

<u>注意</u> 一般には $\mathcal{M}_Y$ は連接的と限らぬ．連接的でない $\mathcal{M}_Y$

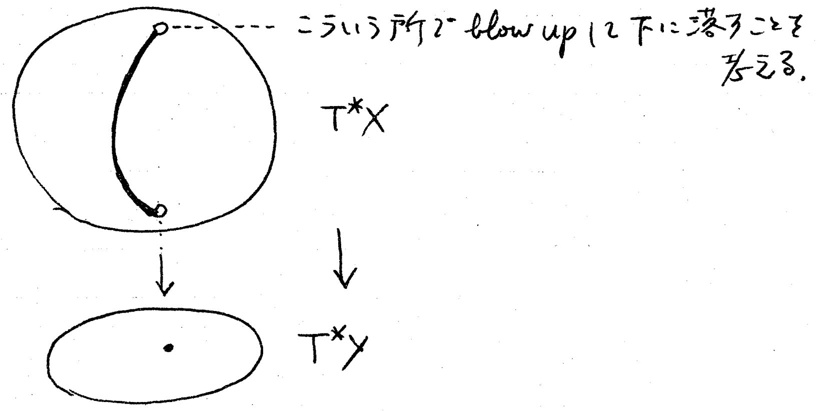
---

*) P. Schapira との共同の仕事．文責・研究代表者．

に対しては，その台を

$$Ch(\mathcal{M}_Y) = \bigcup_{\substack{\mathcal{N}\subset\mathcal{M}_Y \\ \text{coherent}}} Ch(\mathcal{N})$$

で定義する．



Xを複素多様体，$\mathcal{X}=T^*X$とし，Λをそのconic, homogeneous, non-singularなLagrange多様体とする．$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m)$を$\mathcal{X}$上のm次同次函数の作る層とする．このとき$T_\Lambda X \simeq T^*\Lambda$とみなせる．実際，

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
T_\Lambda\mathcal{X} \arrow[u] & T^*\Lambda \\
T\mathcal{X} \arrow[u] & T^*\mathcal{X}/T^*_\Lambda\mathcal{X} \arrow[l, "H"'] \arrow[u] \\
T\Lambda \arrow[u] & \\
0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

においてHamilton写像Hにより$T^*_\Lambda\mathcal{X}$と$T\Lambda$が一対一に対応

することが, Λ が Lagrangean であることと同値である. $\mathcal{E}(m)$ を高々 m 階の擬微分作用素が作る層, $\sigma_m : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m)$ を主シンボルとする. 次のものを導入する.

$$\mathcal{J}_\Lambda = \{ P \in \mathcal{E}(1) \,;\, \sigma_1(P)|_\Lambda = 0 \}$$

$\mathcal{E}_\Lambda$: $\mathcal{J}_\Lambda$ で生成される $\mathcal{E}$ の部分環

$$\mathcal{E}_{\Lambda,m} = \mathcal{E}(m) \cap \mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{J}_\Lambda^m \quad (m \geq 0)$$

$$\tilde{\sigma}_m : \mathcal{E}_{\Lambda,m} \to \mathcal{E}_{\Lambda,m} / (\mathcal{E}_{\Lambda,m-1} + \mathcal{E}_{\Lambda,m+1}\mathcal{E}(-1))$$

また, $J_\Lambda = \{ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \,;\, \varphi|_\Lambda = 0 \}$ とすれば,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\Lambda,m} \arrow[r, "\sigma_m"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\sigma}_m"'] & J_\Lambda^m \cap \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m) \arrow[r] & J_\Lambda^m / J_\Lambda^{m-1} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m) \end{tikzcd}$$

と分解される. 最後の項は $T_\Lambda \mathcal{X}$ の二つの $\mathbb{C}$-作用について m 次同次なものとなる.

<u>例</u> $X = \{ (x_1, \cdots, x_n) = (x', x'') \}$, $\quad x' = (x_1, \cdots, x_\ell)$

$$\mathcal{X} = \{ (x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'') \}$$

$$\Lambda = \{ (x, \xi) \,;\, x' = \xi'' = 0 \}$$

$$T_\Lambda \mathcal{X} = \{ (x, \xi) = (\underbrace{(0, x'', \xi', 0)}_{\text{基底点}} \,;\, \underbrace{(x', 0, 0, \xi'')}_{\text{法線ベクトル} \left(= x' \frac{\partial}{\partial x'} + \xi'' \frac{\partial}{\partial \xi''}\right)}) \}$$

を考える. このとき

$$\mathcal{E}_\Lambda = \{ P \in \mathcal{E} \,;\, P = \sum P_j(x, D),\ \text{各 } P_j\ (j \geq 1) \text{ は } \Lambda \text{ で } j \text{ 重に消える} \}$$

$$\tilde{\sigma}_m : \mathcal{E}_{\Lambda,m} \ni P \longmapsto \underset{m\text{次の項}}{P_m \text{ の } (x', \xi'') \text{ に関する Taylor 展開の}}$$

となる. $\tilde{\sigma}_m(P)$ は (ξ',ξ'') と (x',ξ'') についてそれぞれ m 次の $T_\Lambda\mathfrak{X}$ 上の函数である.

<u>定義</u> 連接 $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ に対して $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ を次のように定める: $\mathcal{M}=\mathcal{E}u$ のとき

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \{ q\in T_\Lambda\mathfrak{X} \,;\, Pu=0 \text{ を満たす } {}^\forall P\in\mathcal{E}_{\Lambda,m},\ {}^\forall m\geq 0 \text{ に対して } \tilde{\sigma}_m(P)(q)=0 \}$$

一般に $\mathcal{M}=\mathcal{E}u_1+\cdots+\mathcal{E}u_N$ のとき

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^{N} Ch(\mathcal{E}u_j)$$

この概念は filtration を用いても, 或はミクロ微分作用素を使っても定義可能である.

次に

$\mathfrak{X} = \mathring{T}^*X = T^*X - 0$ 切断

$X\supset Y$ 部分多様体

$\Lambda = T^*_YX\cap\mathfrak{X} \longrightarrow Y$

という状況を考える. 射影 ρ, p を

$$\begin{tikzcd} \mathring{T}^*X \supset Y\times_X \mathring{T}^*X-\Lambda \arrow[d, "\rho"] \\ \mathring{T}^*Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathring{T}_\Lambda\mathfrak{X} \simeq \mathring{T}^*\Lambda \supset \Lambda\times_Y T^*Y \arrow[d] \arrow[d, phantom] \\ \mathring{T}^*Y \end{tikzcd}, \quad \mathring{T}_\Lambda\mathfrak{X} \xrightarrow{p} \mathring{T}^*Y$$

により定める.

<u>定理1</u> $\mathcal{M}$ が連接 $\mathcal{D}_X$-加群のとき

$$\mathring{T}^*Y\cap Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \rho\,(Ch(\mathcal{M})\cap(Y\times_X T^*X-\Lambda)) \cup p\,(Ch_\Lambda(\mathcal{M}))$$

右辺の集合は閉じていることに注意．実際

$$
\begin{array}{c}
(Y \underset{X}{\times} T^*X - \Lambda) \cup T_\Lambda \mathfrak{X} \supset Ch(\mathfrak{m}) \cup Ch_\Lambda(\mathfrak{M}) \\
\downarrow \\
T^*Y
\end{array}
$$

において射影化を行えば，固有写像になる．

具体的な計算は（普通の characteristic variety のときより更に）大変であるが，簡単にわかる場合もあるので以下それを述べよう．一般に $X \supset Y$，smooth とし，部分集合 $Z \subset X$ に対して集合 $C_Y(Z) \subset T_Y X$ を次のように定める：適当に座標を入れて $X \subset \mathbb{R}^n \ (\subset \mathbb{C}^n)$ とするとき，

$$
C_Y(Z) = \bigcup_{x \in Y} \{ v \in T_x X / T_x Y \ ; \ v = \lim a_n (x_n - y_n),\ \text{ここに}\ a_n \in \mathbb{R},\ y_n \in Y,\ x_n \in Z \ \text{で}\ y_n \to y,\ x_n \to x \}
$$

例えば $Y = \{x' = 0\}$ なら

$$
C_Y(Z) = \{ (x', x'') \ ; \ {}^{\exists} x_\nu \in Z,\ a_\nu x_\nu' \to x' \}
$$

<u>定理２</u>　$\mathfrak{M}$ が確定特異点を持ったホロノミー系ならば

$$
Ch_\Lambda(\mathfrak{M}) = C_\Lambda(Ch(\mathfrak{M})) \subset T_\Lambda \mathfrak{X}
$$

となる．（$Ch(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{X}$ である．）

<u>応用例</u>　f を正則函数とし $\mathfrak{M} = \mathcal{D} f^\lambda$ とおくとき

$$
Ch(\mathfrak{M}) \subset \{ (x, \xi) \ ; \ {}^{\exists} x_\nu \to x,\ {}^{\exists} c_\nu \in \mathbb{C},\ c_\nu f(x_\nu) \to 0,\ c_\nu df(x_\nu) \to \xi \}
$$

（λ が generic ならここで等号が成り立つ）

<u>証明</u>　(t,x) 空間の加群として $\mathcal{N} = \mathcal{D}(t+f(x))^\lambda$ とおくと $\mathcal{N}|_{t=0} = \mathcal{D}f^\lambda$ である．そこで次の主張を用いる．

<u>系</u>　$Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \{(x'',\xi'') \in T^*Y\ ;\ {}^\exists(x_\nu,\xi_\nu) \in Ch(\mathcal{M}),$
$x'_\nu \to 0,\ x''_\nu \to x'',\ \xi''_\nu \to \xi'',\ |x'_\nu||\xi'_\nu| \to 0\}$

この系は定理1と定理2から出る．これを用いると上の例が出る．実際，

$$Ch(\mathcal{N}) = \{0\text{-切断}\} \cup \{(t,x,\tau,\xi)\ ;\ t+f(x)=0,\ \xi = \tau\, df(x)\}$$

$$Ch(\mathcal{N}_Y) = \{0\text{-切断}\} \cup \{(x,\xi)\ ;\ {}^\exists x_\nu \to x,\ \tau_\nu df(x_\nu) \to \xi,\ f(x_\nu) \to 0,\ |f(x_\nu)\tau_\nu| \longrightarrow 0\}$$

定理1の証明は時間が無いので止める．（論文は inventiones にまもなく出る．）

ここで holonomic でない例を少し見てみよう．

$X = \mathbb{C}^n,\ Y = \{x_1 = 0\},\ \mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X D_2$ のとき，$\{\xi_2 = 0\}$ である．$\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ とするとき $\mathcal{M}_Y = (\mathcal{D}/\mathcal{D}D_2)^{\mathbb{N}}$ と書け，$Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \{\xi_2 = 0\}$．

$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(D_2 + x_1 D_1)$ のときは，

$$0 = D_1^j(D_2 + x_1 D_1)u = (D_2 D_1^j + (x_1 D_1 + j)D_1^j)u$$
$$= (D_2 + x_1 D_1 + j)D_1^j u = 0$$

$$\therefore\ (D_2 + j)u_j = 0$$

よって $\mathcal{M}_Y = \bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(D_2 + j)$，となる．各 u_j は独立なので直和因子はすべて同型である．（感じとしては b-函数の

存在：$\mathcal{E}_{\Lambda,m} \ni \{b(x,D_1,x)+\mathcal{E}_{\Lambda,m+1}(-1)\}u=0$，のようなものが無いと連接的にはならぬようである.

定理2の証明は今のところ大変面倒である. これは次の予想からも出る：

予想 $\mathcal{M}$ が確定特異点型を持つホロノミー系のとき，任意の Λ に関して Levi 条件が成り立つ

ここで Levi 条件とは次のように定義されるものである：

一般に $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ に対して次は同値である.

1) $\mathcal{M}$ に含まれる任意の連接的な $\mathcal{E}_\Lambda$-部分加群 $\mathcal{N}$ と，任意の連接的な $\mathcal{E}(0)$-加群 $\mathcal{L}\subset\mathcal{M}$ に対して，$m\gg 0$ のとき

$$\mathcal{J}_\Lambda(\mathcal{N}\cap\mathcal{E}(m)\mathcal{L})=\mathcal{N}\cap\mathcal{E}(m+1)\mathcal{L}$$

2) 上が $\mathcal{M}$ を生成するようなある $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$ について成り立つ.

3) 上が $\mathcal{N}=\mathcal{E}_\Lambda\mathcal{L}$ のとき成り立つ.

定義 これらが成り立つとき $\mathcal{M}$ は Levi 条件を満たすという.

Levi 条件から定理2の結論が得られる. もう少し弱い予想として次のものがある.

予想 任意の連接 $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ について，

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M})\subset\{\omega=0\} \quad\Rightarrow\quad \text{Levi 条件}.$$

ただしこの仮定から制限が連接的とは云えない.