数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 129-149

退化双曲型作用素の特異性伝播の分岐現象について

城西大 理学部　天野一男
中村 玄

§1 序. ここで考える問題を説明する前に、特性根がなめらかな変係数双曲型方程式の正則性伝播或は特異性伝播に関してこれまでに得られている結果の大まかな解説をしておこう。特性根の多重度が一定の場合は、Chazarain [4], Kawai [7] 等の結果で十分分っている。特性根の多重度が不一定な場合の典型は次の二つであろう。簡単の為に作用素 $P=P_1P_2+R$, P_1, P_2; order 1 の擬微分作用素, R; order 0 の擬微分作用素を例にとって説明する。即ち involutive な場合; Poisson bracket $\{p_1, p_2\}=0$ on $\Sigma=\{p_1=p_2=0\}$ と non-involutive な場合; $\{p_1, p_2\}\neq 0$ on Σ (注; 他にも dp_1, dp_2 は Σ 上1次独立などの条件がつく。) の二つの場合である。$Pu=0$ の解 u の特異性が点 $\rho\in\Sigma$ にあるとき、そこからの解の特異性の広がり方は前者の場合と後者の場合とでは異なる。前者の場合は一般に2次元的であるのに対して、後者の場合は1次元的である。なお前者につい

て詳しくは，この講究録中の小林氏の論説を参照されたい。後者について，より正確には次の正則性伝播に関する Ivrii [6] の結果がある。即ち H_{p_1}, H_{p_2} を夫々 p_1, p_2 の Hamilton vector fields とするとき，点 ρ を通る H_{p_1}, H_{p_2} の積分曲線上で解 u が点 ρ に到る手前まで C^∞ であれば，点 ρ の近傍で u は C^∞ である。それでは点 ρ を通る H_{p_1} の積分曲線を点 ρ で二つに分けたとき，片方に解 u が特異性をもっているならば，解の特異性の広がり方は H_{p_1} の積分曲線上に止まるのであろうか，それとも点 ρ で H_{p_2} の積分曲線にも乗り移るであろうか。後者の様な状況が生じるとき，特異性伝播に分岐が起きた (branching of singularity) といい，そうでないと分岐が起きない (non-branching of singularity) という。

この特異性伝播の分岐現象を最初に論じたのは Alinhac [1] である。Alinhac [1] は，non-involutive な二変数の擬微分作用素：$D_t^2 - t^2 D_x^2 + \pi(t, D_x)$，$\pi(t, D_x)$；order 1 の擬微分作用素 について，$t=0$ で分岐，不分岐である為の条件を π に対する条件でのべた。ついで Taniguchi & Tozaki [15] は，より広い意味の involutive 性（即ち Morimoto [19] の意味の involutive 性）がくずれる様な二変数の微分作用素：$D_t^2 - t^{2\ell} D_x^2 + \sqrt{-1}\, a t^{\ell-1} D_x$，$a$；定数，$\mathbb{N} \ni \ell \geq 2$ について，分岐，不分岐である為の条件を a, ℓ に対する条件でのべた。なお Nakane [10] はこれの analytic category でのいいかえと support (或は zero) の伝播について論じている。これらの結果の一般次元，高階方程式への拡張については，Amano [2] の結果がある。Amano [2] は，ここでとり扱う微分作用素 P の係数が変数 t の単項式である様な場合について，P を空間変数について Fourier 変換して得られる parameter 付きの常微分作用素の Stokes 係数に関する条件で，分岐，不分岐である為の条件をのべた。

ここでは分岐が起る為の十分条件について，Amano [2] の結果がより一般な微分作用素について得られたので紹介したい。最近 Takasaki [14] は，ここでとり扱う微分作用素 P の主要部 P_m が変数 t にだけ依存し，P の係数が解析的である様な場合について，P の基本解の構成法を示された。それによると analytic category では下記の定理1における flat な amplitude $\tilde{a}_{i,j}$ etc. は現われない。従ってここでの方法を Takasaki [14] 流にかきかえることができれば，分岐，不分岐である為の必要十分条件が求め得るものと期待している。

私達のそもそもの目標は，なるべく一般な微分作用素に対して，分岐が起る為の十分条件（出来れば必要十分条件）をなるべく目に見える形で提示したいという事にある。周知の様に，Stokes 係数の計算方法については，大久保先生 [12] の方法がある。しかし3階以上の双曲型方程式が定める常微分

作用素については，この方法は適用できない。というのは，この常微分作用素について所謂ゆる pentagonal condition ([12] p.159定理4.5 条件(iii))がなりたたないからである。そこでさしあたり2階の方程式について分岐が起る為の条件を目に見える形で求める事が我々にとってのもう一つの課題である。

§2 結果.

考える微分作用素P

$$P = P_m + P_{m-1} + \cdots + P_0,\quad P_{m-j}(t,X,D_t,D_x) = \sum_{i=0}^{m-j} p_{i,j}(t,X,D_x)\, D_t^{m-j-i}$$

$p_{i,j}(t,x,\xi)$; ξについてi次斉次多項式

ここで簡単の為Pの係数は全て $[-T,T]\times R_x^n$ で B^∞ とする。

Pに対する仮定　Pは次の条件(イ),(ロ),(ハ)をみたすものとする。

(イ) $P_m(t,x,\tau,\xi)=\prod_{j=1}^{m}(\tau - t^{\ell}\lambda_j(t,x,\xi))$, $\ell\in N$, $\lambda_j(t,x,\xi)$; $[-T,T]\times R_x^n \times (R_\xi^n\setminus 0)$ で C^∞, real valued $(1\le j\le m)$

(ロ) $\exists C>0$; $|\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)| \ge C|\xi|$ $(j\ne k;\ (t,x,\xi)\in[-T,T]\times R_x^n\times R_\xi^n)$

(ハ) $p_{i,j}(t,x,\xi)=t^{i\ell-j}\tilde{p}_{i,j}(t,x,\xi)$ $(i\ell\ge j,\ m-j-i\ge 0)$　ここで $\tilde{p}_{i,j}(t,x,\xi)$ はξについてi次斉次多項式，係数は $[-T,T]\times R_x^n$ で B^∞

phase 及び double phase function

phase function $\phi_j(t,s,x,\xi)$ を $\partial_t\phi_j - t^l\lambda_j(t,x,\nabla_x\phi_j)=0$, $\phi_j|_{t=s}=x\cdot\xi$ の解として定める。又 double phase function $\phi_{j,k}(t,s,x,\xi)=\phi_j(t,0)\#\phi_k(0,s)(x$ を $\partial_t\phi_{j,k} - t^l\lambda_j(t,x,\nabla_x\phi_{j,k})=0$, $\phi_{j,k}|_{t=0}=\phi_k(0,s,x,\xi)$ の解として定める。なお $\phi_j(t,s,x,\xi)$, $\phi_{j,k}(t,s,x,\xi)$ が定める正準変換を $T_j(t,s)$, $T_{j,k}(t,s)$ により定めると $T_{j,k}(t,s)=T_j(t,0)\circ T_k(0,s)$ である。

<u>parametrix の amplitude の growth order を定める指数</u>

$\mu_i(x,\xi)=-H_i(x,\xi)/G_i(x,\xi)$; $G_i(x,\xi)=\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\lambda_i(0,x,\xi)^{m-j-1}\tilde{p}_{j,0}(0,x,\xi)$,

$H_i(x,\xi)=\frac{l}{2}\sum_{j=0}^{m-2}(m-j)(m-j-1)\lambda_i(0,x,\xi)^{m-j-1}\tilde{p}_{j,0}(0,x,\xi)+\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_i(0,x,\xi)^{m-j-1}$

$\cdot\tilde{p}_{j,1}(0,x,\xi)$ とおき、後で amplitude の growth order を定める際に用いる定数 $m_i^{\pm}$ を $m_i^{\pm}=\sup_{(x,\xi)}\{Re(\pm\mu_i(x,\xi))\}$ により定める。

<u>接続係数 $T_{\pm}^{(i,j)}(x,\xi)$</u>

$L_0=\sum_{j=0}^{m}\sum_{\substack{il\geq j\\ m-i-j\geq 0}}t^{il-j}\tilde{p}_{i,j}(0,x,\xi)D_t^{m-j-i}$ とおく。$e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}}{l+1}\lambda_i(0,x,\xi)}V_i^{\pm}(t,x,\xi)$ $(1\leq i\leq m)$ を $\pm t>0$ における L_0 の基本解で漸近展開: $V_i^{\pm}(t,x,\xi)\simeq$

$\simeq e_i^{*}(t,x,\xi)=t^{\mu_i(x,\xi)}\sum_{r=0}^{\infty}e_{i,r}(x,\xi)t^{-r}$ as $t\to\pm\infty$, $e_{i,0}(x,\xi)\equiv 1$ をみたすものとする。但しここでの漸近展開記号"$\simeq$"の意味は、parameter $x\in R^n$, ξ $(|\xi|=1)$ に関して一様であり、しかも変数 (t,x,ξ) に関する $V_i^{\pm}(t,x,\xi)$ の各階の導関数が t^{-1} の形式的級数 $e_i^{*}(t,x,\xi)$ を形式的に微分したものを漸近展開にもつという意味である。$V_i^{\pm}(t,x,\xi)$ を定義した序に $V_{j,i-1}^{-}(t,x,\xi)$, $\widetilde{V}_{j,i-1}^{-}(t,x,\xi)$ を次式で定めておく。

$V^-_{j,i-1}(t,x,\xi) = e^{-\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)} D_t^{i-1}\left(e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)} V_j^-(t,x,\xi)\right)$,

$\tilde{V}^-_{j,i-1}(t,x,\xi) =$ 行列 $\left(V^-_{j,i}(t,x,\xi)\,;\ \begin{matrix} i\downarrow 0,\cdots,m-1 \\ j\to 1,\cdots,m \end{matrix}\right)$ の (i,j)-cofactor

と定める。更に $U_i(t,x,\xi)$ を $L_0 U_i = 0$，$D_t^k U_i|_{t=0} = \delta_{k,i-1}$ $(0\le k\le m-1)$ の解として定める。ここに $\delta_{k,i}$ は Kronecker のデルタである。

このとき接続係数 $T_\pm^{(i,j)}(x,\xi)$ を $\pm t>0$ における二組の基本解 $U_i(t,x,\xi)$ $(1\le i\le m)$ と $e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}}{l+1}\lambda_i(0,x,\xi)}V_i^\pm(t,x,\xi)$ $(1\le i\le m)$ との1次関係式に現われる係数として定める。即ち $U_i(t,x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)} \cdot T_\pm^{(i,j)}(x,\xi)\, V_j^\pm(t,x,\xi)$ in $\pm t>0$ $(1\le i\le m)$。なお序に $\tilde{T}_-^{(i,j)}(x,\xi)$ を行列 $\left(T_-^{(i,j)}(x,\xi)\,;\ \begin{matrix} i\downarrow 1,\cdots,m \\ j\to 1,\cdots,m \end{matrix}\right)$ の (i,j)-cofactor として定めておく。

<u>symbol classes</u>　$\mu,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ とする。symbol classes $\tilde{S}_\pm^{\mu,\kappa}$，$\tilde{S}_\pm^{\mu,\kappa,\lambda}$，$\tilde{\tilde{S}}_-^{\mu,\kappa}$ を夫々次の様に定める。

$$\tilde{S}_\pm^{\mu,\kappa} \ni a(t,x,\xi) \iff \begin{cases} a(t,x,\xi)\,;\ C^\infty \text{ in } \{0\le \pm t\le T_0\}\times \mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_\xi\setminus 0), \\ \forall p\in\mathbb{Z}_+,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\ \exists C=C(p,\alpha,\beta)>0\,; \\ |D_t^p D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{\mu-|\beta|}\left(|\xi|^{-1}+|t|^{l+1}\right)^{\frac{\kappa-p}{l+1}} \quad (|\xi|\ge 1) \end{cases}$$

$$\tilde{S}_\pm^{\mu,\kappa,\lambda} \ni a(t,s,x,\xi) \iff \begin{cases} a(t,s,x,\xi)\,;\ C^\infty \text{ in } \{0\le\pm t\le T_0\}\times\{0\le\pm s\le T_0\}\times\mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_\xi\setminus 0), \\ \forall p,q\in\mathbb{Z}_+,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\ \exists C=C(p,q,\alpha,\beta)>0\,; \\ |D_t^p D_s^q D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t,s,x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{\mu-|\beta|}\left(|\xi|^{-1}+|t|^{l+1}\right)^{\frac{\kappa-p}{l+1}} \cdot \\ \qquad\cdot\left(|\xi|^{-1}+|s|^{l+1}\right)^{\frac{\lambda-q}{l+1}} \quad (|\xi|\ge 1) \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{S}}_-^{\mu,\kappa} \ni a(t,s,x,\xi) \iff \begin{cases} a(t,s,x,\xi)\,;\ C^\infty \text{ in } \{(t,s)\,;\ -T_0\le s\le t\le 0\}\times\mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_\xi\setminus 0), \\ \forall p,q\in\mathbb{Z}_+,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\ \exists C=C(p,q,\alpha,\beta)>0\,; \\ |D_t^p D_s^q D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t,s,x,\xi)| \le C|t|^\kappa(1+|\xi|)^{\mu-|\beta|} \quad (|\xi|\ge 1) \end{cases}$$

ここで $\mathbb{Z}_+ = \{p \in \mathbb{Z}\,;\, p \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_+^n = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n)\,;\, \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \ (1 \leq i \leq n)\}$ である。

更に symbol classes $\tilde{S}_+^{\mu,\infty}$, $\tilde{S}_-^{\mu,\kappa,\infty}$, $\tilde{\tilde{S}}^{\mu,\infty}$ を夫々 $\tilde{S}_+^{\mu,\infty} = \bigcap_{\kappa>0} \tilde{S}_+^{\mu,\kappa}$, $\tilde{S}_-^{\mu,\kappa,\infty} = \bigcap_{\lambda>0} \tilde{S}_-^{\mu,\kappa,\lambda}$, $\tilde{\tilde{S}}_-^{\mu,\infty} = \bigcap_{\kappa>0} \tilde{\tilde{S}}_-^{\mu,\kappa}$ と定める。

以上の準備の下で次の定理がなりたつ。

<u>定理 1</u> $\exists T_0 > 0$ (十分小), $\exists a_{i,j}^+(t,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_+^{\frac{1}{\ell+1}(m_j^+ - i + 1 + \varepsilon),\, m_j^+ + \varepsilon}$, $\exists \tilde{a}_{i,j}^+(t,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_+^{\frac{1}{\ell+1}(m_j^+ - i + 1 + \varepsilon),\,\infty}$; flat at $t=0$, $\exists a_{m,j}^-(t,s,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1} - (m-1),\, -m_j^- + \varepsilon,\, m_j^- - \ell(m-1) + \varepsilon}$, $\exists \tilde{a}_{m,j}^-(t,s,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1} - (m-1),\, -m_j^- + \varepsilon,\, \infty}$, flat at $s=0$, $\exists \tilde{\tilde{a}}_{m,j}^-(t,s,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{\tilde{S}}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1} - (m-1),\, \infty}$; parametrix $E_i^\pm(t,s)$ を $PE_i^\pm \equiv 0$ in $s<t$, $D_t^k E_i^\pm \big|_{t=s} \equiv \delta_{k,i-1} I \ (0 \leq k \leq m-1)$ (但し s,t の符号は $E_i^\pm(t,s)$ の $\pm$ に応じて共に $\pm$, 又記号 "$\equiv$" は modulo C^∞ 核積分作用素で等号成立という意味) により定めるとき, $E_i^+(t,0)$ $(1 \leq i \leq m)$, $E_m^-(t,s)$ は夫々次式で与えられる。

$$(E_i^+(t,0)\,\cdot\,)(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{n} O_s\text{-}\int e^{\sqrt{-1}\phi_j(t,0,x,\xi)} \chi(\xi) (a_{i,j}^+(t,x,\xi) + \tilde{a}_{i,j}^+(t,x,\xi)) \hat{\cdot}(\xi)\, d\xi$$

$$(0 \leq t \leq T_0,\ x \in R^n)$$

$$(E_m^-(t,s)\,\cdot\,)(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{n} O_s\text{-}\int e^{\sqrt{-1}\phi_j(t,s,x,\xi)} \chi(\xi) (a_{m,j}^-(t,s,x,\xi) + \tilde{a}_{m,j}^-(t,s,x,\xi) + \tilde{\tilde{a}}_{m,j}^-(t,s,x,\xi)) \hat{\cdot}(\xi)\, d\xi$$

$$(0 \geq t \geq s \geq -T_0,\ x \in R^n)$$

ここで $\chi(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$; $\chi(\xi) = \begin{cases} 0 & (|\xi| \leq \frac{1}{2}) \\ 1 & (|\xi| \geq 1) \end{cases}$.

更に

$$a_{i,j}^+(t,x,\xi) - T_+^{(i,j)}(x,\xi)\, v_j^+(t,x,\xi) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{S}_+^{\frac{1}{\ell+1}(m_j^+ - i + 1 + \varepsilon),\, m_j^+ + 1 + \varepsilon},$$

$$a_{m,j}^{-}(t,s,x,\xi)-a_{m,j,0}^{-}(t,s,x,\xi)\in\bigcap_{\varepsilon>0}\tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{l+1}-(m-1),-m_j^{-}+1+\varepsilon,m_j^{-}-l(m-1)+\varepsilon}+$$
$$+\bigcap_{\varepsilon>0}\tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{l+1}-(m-1),-m_j^{-}+\varepsilon,m_j^{-}-l(m-1)+1+\varepsilon},$$

$$a_{m,j,0}^{-}(t,s,x,\xi)=\det(T_{-}^{(i,j)}(x,\xi))_{1\le i,j\le m}V_j^{-}(t,x,\xi)\tilde{V}_{j,m-1}^{-}(s,x,\xi)$$

（注； $U_m^{-}(t,s,x,\xi)=\sum_{j=1}^{m}e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}a_{m,j,0}^{-}(t,s,x,\xi)$ とおくと，$L_0U_m^{-}=0$，$D_t^kU_m^{-}\big|_{t=s}=\delta_{k,m-1}$ $(0\le k\le m-1)$ をみたす。又

$$U_m^{-}(t,s,x,\xi)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}e^{-\sqrt{-1}\frac{s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}U_j(t,x,\xi)\tilde{T}_{-}^{(j,\mu)}(x,\xi)\tilde{V}_{\mu,m-1}(s,x,\xi)$$

ともかける。）

さて $s<0$ とする。$-T_0\le s\le t\le T_0$ における parametrix $E_m(t,s)$：$PE_m\equiv0$，$D_t^kE_m\big|_{t=s}\equiv\delta_{k,m-1}I$ $(0\le k\le m-1)$ は $E_m(t,s)\equiv E_m^{-}(t,s)$ if $t\le0$，$\equiv\sum_{k=1}^{m}E_k^{+}(t,0)\circ(D_{t'}^{k-1}E_m^{-}(t',s))\big|_{t'=0}$ if $t>0$ で与えられるから，Fourier 積分作用素の合成公式と上記定理1より次の定理を得る。

<u>定理2</u>

(1) $(E_m(t,s)\cdot)(x)=(2\pi)^{-n}\sum_{\nu,\mu=1}^{m}O_s\text{-}\int e^{\sqrt{-1}\phi_{\nu,\mu}(t,s,x,\eta)}a_{m,\nu,\mu}(t,s,x,\eta)\hat{\cdot}(\eta)d\eta$

for $t>0$。ここで $a_{m,\nu,\mu}(t,s,x,\eta)$ の main part $=\sum_{j=1}^{m}T_{+}^{(j,\nu)}(x,\nabla_x\phi_{\nu,\mu}(t,s,x,\eta))\cdot$
$\cdot\tilde{T}_{-}^{(j,\mu)}(\nabla_\eta\phi_{\nu,\mu}(t,s,x,\eta),\eta)V_\nu^{+}(t,x,\nabla_x\phi_{\nu,\mu}(t,s,x,\eta))\tilde{V}_{\mu,m-1}^{-}(s,\nabla_\eta\phi_{\nu,\mu}(t,s,x,\eta),\eta)\cdot$
$\cdot$(nonzero) for $|\eta|\ge1$。

(2) $\bigcup_{0\le k\le m-2}WF(u_k)=\phi$，$WF(u_{m-1})=\{(y^0,\rho\eta^0);\rho>0\}$ とするとき，Cauchy 問題：$Pu=0$，$D_t^ku\big|_{t=s}=u_k$ $(0\le k\le m-1)$ の解 $u(t,s)=u(t,s,x)$ に関して条件(#)：

$$(\#)\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{m}T_{+}^{(j,\nu)}(T_{\nu,\mu}(t,s)(y,\eta))\tilde{T}_{-}^{(j,\mu)}(y,\eta)=0\ \text{ in a conic nbd. of } (y^0,\eta^0)\\ \qquad (1\le\nu,\mu\le m,\ \nu\ne\nu_0,\ \mu\ne\mu_0)\end{array}\right.$$

$\left| \sum_{j=1}^{m} T_{+}^{(y,\nu_0)}(T_{\nu_0,\mu_0}(t,s)(y,\eta))\, \widetilde{T}_{-}^{(y,\mu_0)}(y,\eta) \neq 0 \right.$ in a conic nbd. of (y^0,η^0)

の下で，$T_{\nu_0,\mu_0}(t,s)(y^0,\eta^0) \in WF(u(t,s))$ for $t>0$ がなりたつ。

注意；定理1，2の証明をみると分る様に(#)以外にも可算ケの条件が考えられる。

§3 定理の証明. parametrixを構成すれば他は難しくない。parametrices $E_i^+(t,0)$ $(1\leq i\leq m)$ の構成は，Nakamura–Uryu [9]で実行済みである。$E_m^-(t,s)$ の構成は，$E_m^-(t,s)$ がみたすべき s に関する方程式(4)；$QE_m^- \equiv 0$，$D_s^k E_m^-|_{s=t} \equiv \delta_{k,m-1}(-1)^{m-1} I$ $(0\leq k\leq m-1)$ where $Q=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-j}(-D_s)^{m-j-i}(\cdot\, p_{i,j}(s,x,D_x))$ を考えるとよい。（注；この事は新開謙三氏より指摘して頂いた。Pのまま例えばYoshikawa [18]の方法を適用しようとすると，大小関係 $|s|\geq|t|$ がたたってYoshikawa [18] proposition 3.4 に相当する部分がうまく行かず，つまずいてしまう。）$E_m^-(t,s)$ の構成の仕方としては次の二通りが考えられる。一つは(4)に対してYoshikawa [18]の方法を適用するやり方と(4)を一階のsystemにかきなおして，それを完全対角化することにより基本解を定理1の $E_m^-(t,s)$ の様なFourier積分作用素を成分とする行列で求めるもう1つのやり方とである。定理2の範囲内であればどちらでやろうとも結果は同じである。しかし将来analytic categoryで話をする場合や上記注意に述べた(#)以外の可算ケの条件をPの係数とL_0から決る条件として書き下そうとすると，L_0の役割を明確にし

ている Yoshikawa [ ] の方法がやりやすいと思われる。以下 $E_m^-(t,s)$ は Yoshikawa [18] の方法に従って構成する。念の為 $E_m^-(t,s)$ は(9)をみたす様に構成すればよいという事情について説明しておこう。$U={}^t[u, D_t u, \cdots\cdots, D_t^{m-1}u]$ とおき、$Pu=0$ を $D_t U-A(t)U=0$ と一階の system になおす。Shinkai [13] の方法を活用すれば、$s\leq t\leq 0$ における基本解 $K(s,t)$: $D_s K=A^*(s)K$, $K(t,t)=I$ に対する一意性と semigroup property : $K(s,\sigma)\circ K(\sigma,t)=K(s,t)$ $(s\leq\sigma\leq t\leq 0)$ が従う。今 $F(t,s)$ $(s\leq t\leq 0)$ を $(*)$ $D_sF=-FA(s)$, $F(t,t)=I$ により定めると、容易に分る様に $F^*(t,s)$ は $D_sF^*=A^*(s)F^*$, $F^*(t,t)=I$ をみたす。従って基本解 $K(s,t)$ の一意性より、$F^*(t,s)=K(s,t)$。これと $K(s,t)$ の semigroup property とを合わせれば、$F(t,s)$ が semi-group property : $F(t,\sigma)F(\sigma,s)=F(t,s)$ $(s\leq\sigma\leq t\leq 0)$ をみたすことが分る。そこでこの式の両辺を σ で微分して、$D_\sigma F(t,\sigma)\circ F(\sigma,s)+$ $+F(t,\sigma)D_\sigma F(\sigma,s)=0$ 。ここで $D_\sigma F(t,\sigma)=-F(t,\sigma)A(\sigma)$ に注意して $\sigma=t$ とおくと、$D_tF(t,s)-A(t)F(t,s)=0$ 。故にこの $F(t,s)$ の第 $(1,m)$ 成分が $s\leq t\leq 0$ における基本解 $\widetilde{E_m^-}(t,s)$: $P\widetilde{E_m^-}=0$, $D_t^k\widetilde{E_m^-}\big|_{t=s}=\delta_{k,m-1}I$ $(0\leq k\leq m-1)$ である。$(*)$ を $F(t,s)$ の第 $(1,m)$ 成分に対して書きなおした式が(9)である。(但し記号"$\equiv$"を等号でおきかえるものとする。)以上より $E_m^-(t,s)$ は(9)をみたす様に構成すればよいことが分った。

次に $E_m^-(t,s)$ の構成に移る。

$$(F_j(t,s)\cdot)(x)=(2\pi)^{-n}\,Os-\int e^{\sqrt{-1}\phi_j(t,s,x,\xi)}\chi(\xi)\,a(t,s,x,\xi)\,\hat{\cdot}(\xi)\,d\xi$$

$$((QF_j)(t,s)\cdot)(x)=(2\pi)^{-n}\,Os-\int e^{\sqrt{-1}\phi_j(t,s,x,\xi)}(T_j a)(t,s,x,\xi)\,\hat{\cdot}(\xi)\,d\xi$$

とおく。正しくは以下の議論を$|\xi|\leq 1$で少し修正する必要があるが，簡単の為に$\chi(\xi)$はないものとして議論する。

定義　作用素$r(t,s,x,\xi,D_t,D_s,D_x,D_\xi)$が semi-homogeneous degree σ とは，$r(\lambda^{-\frac{1}{\ell+1}}t,\lambda^{-\frac{1}{\ell+1}}s,x,\lambda\xi,\lambda^{\frac{1}{\ell+1}}D_t,\lambda^{\frac{1}{\ell+1}}D_s,D_x,\lambda^{-1}D_\xi)=$
$=\lambda^{\sigma}r(t,s,x,\xi,D_t,D_s,D_x,D_\xi)$　$(\lambda>0)$　がなりたつときをいう。

補題1．$T_j\sim\sum_{k=0}^{\infty}T_{j,k}$，$T_{j,k}=\sum_{q=0}^{k}t^q T_{j,k,q}$，$T_{j,k,q}$；semi-homogeneous degree $\frac{m-k+q}{\ell+1}$ かつtに無関係，この各項に含まれるsの巾は高々$\ell(m-1)+k-q-1+$(この項に含まれるD_sの巾)

ここで記号"$\sim$"の意味は，各$N\geq 0$に対して，$T_j=\sum_{k=0}^{N}\sum_{q=0}^{k}t^q T_{j,k,q}+$
$+\sum_{q=0}^{N+1}t^q\hat{T}_{j,N+1,q}$とするとき，$\hat{T}_{j,N+1,q}$を施す効果は悪くみつもっても高々$\tilde{S}_{-}^{m-1,0,\ell(m-1)+N-q}$の元をかける事に相当するという意味である。更に$\tilde{T}_{j,0}\equiv T_{j,0,0}=e^{\sqrt{-1}\frac{s^{\ell+1}}{\ell+1}\lambda_j(0,x,\xi)}M_0(e^{-\sqrt{-1}\frac{s^{\ell+1}}{\ell+1}\lambda_j(0,x,\xi)}\cdot)$，
$M_0=\sum_{i\ell\geq j,\,m-j-i\geq 0}(-D_s)^{m-j-i}(s^{i\ell-j}\tilde{p}_{i,j}(0,x,\xi)\cdot)$。

証明　Fourier 積分作用素と微分作用素との合成公式を用いて，T_jを漸近展開し，さらにそれを$t=s=0$のまわりでtとsに関してTaylor展開すればよい。

又 $S_{j,k}\cdot = e^{-\sqrt{-1}\phi_j(t,s,x,\xi)} D_s^k (e^{\sqrt{-1}\phi_j(t,s,x,\xi)}\cdot)\Big|_{s=t}$ とおくと，補題1と同様に次を得る。

補題2. $S_{j,k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} S_{j,k,k}$，$S_{j,k,k}$；semi-homogeneous degree $\frac{k-k}{l+1}$，この各項に含まれる t の巾は高々 $kl+k+1$(その項に含まれる $D_s\big|_{s=t}$ の巾)。

ここで記号"～"の意味は，各 $N\geq 0$ に対して $S_{j,k} = \sum_{k=0}^{N} S_{j,k,k} + \hat{S}_{j,k,N+1}$ とするとき，$\hat{S}_{j,k,N+1}$ を施す効果は悪くみつもっても高々 $\tilde{S}_-^{k,kl+N+1}$ をかける事に相当する。更に $S_{j,k,0} = e^{\sqrt{-1}\frac{s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}\cdot D_s^k (e^{-\sqrt{-1}\frac{s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}\cdot)\Big|_{s=t}$。

そこで $T_j = \sum_{k=0}^{\infty} T_{j,k}$，$S_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} S_{j,k,k}$，$a_{m,j}^- = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{m,j,\nu}^{-\mu}$，$a_{m,j,\nu}^{-\mu}$；semi-homogeneous degree $-\frac{\nu+\mu+m-1}{l+1}$ とみて，$T_j a_{m,j}^-$，$S_{j,k} a_{m,j}^-$ を形式的に展開して semi-homogeneity についてそろえれば，$T_j a_{m,j}^- = 0$，$\sum_{j=1}^{m} S_{j,k} a_{m,j}^- = \delta_{k,m-1}(-1)^{m-1}$ $(0\leq k\leq m-1)$ となる為の条件として次の漸化式(※)を得る。

$$(※)\begin{cases} \tilde{T}_{j,0}\, a_{m,j,\nu}^{-,\mu} = -\sum_{k=1}^{\nu} T_{j,k,0}\, a_{m,j,\nu-k}^{-,\mu} - \sum_{q=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu} t^q\, T_{j,k+q,q}\, a_{m,j,\nu-k}^{-,\mu-q} \quad (1\leq j\leq m), \\ \sum_{j=1}^{m} S_{j,k,0}\, a_{m,j,0}^{-,\mu} = -\sum_{j=1}^{m} S_{j,k,0} \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{m,j,\nu}^{-,\mu-\nu} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu-k} S_{j,k,k}\, a_{m,j,\mu-\nu-k}^{-,\nu} + \\ \qquad + \delta_{\mu,0}\,\delta_{k,m-1}(-1)^{m-1} \quad (0\leq k\leq m-1) \end{cases}$$

但し $\sum_{k=1}^{0}$，$\sum_{q=1}^{0}\sum_{k=0}^{\nu}$，$\sum_{\nu=1}^{0}$，$\sum_{k=1}^{0}\sum_{\nu=0}^{\mu-k}$ は omit する。

さて $a_{m,j,\nu}^{-,\mu}(t,s,x,\xi)$ の評価についてであるが，少し記号を

準備しておく。

定義　$f(t,x,\xi)$; $(-\infty,0)\times R_x^n\times(R_\xi^n\setminus 0)$ で C^∞, $f^*(t,x,\xi)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\log t)^j t^{\nu_{i,j}(x,\xi)}\sum_{r=0}^{\infty}f_{i,j,r}(x,\xi)t^{-r}$ (形式和), $\nu_{i,j}(x,\xi)$, $f_{i,j,r}(x,\xi)$; $R_x^n\times(R_\xi^n\setminus 0)$ 上の $\mathbb{C}$-valued functions とする。このとき $f(t,x,\xi)\sim f^*(t,x,\xi)$ $(t\to-\infty)$ とは、各 $p\in\mathbb{Z}_+$ に対し $\exists\{\varepsilon_{p,N}\}_{N=0}^{\infty}$; $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_{p,N}=-\infty$ such that $\forall N\in\mathbb{Z}_+$, $\forall K\subset R^n\setminus 0$; compact に対して、$\exists\, C=C(N,K)>0$, $|D_t^p f(t,x,\xi)-$ $-D_t^p(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\log t)^j t^{\nu_{i,j}(x,\xi)}\sum_{r=0}^{N}f_{i,j,r}(x,\xi)t^{-r})|\le C|t|^{\varepsilon_{p,N}}$ $(t\le -1, x\in R^n, \xi\in K)$ がなりたつときをいう。更に $\nu_{i_0,j_0}(x,\xi)-\nu_{i,j}(x,\xi)\ge 0$ $(1\le i\le I$, $1\le j\le J)$ をみたす $1\le i_0\le I$, $1\le j_0\le J$ があれば、これを簡単に $f(t,x,\xi)=O(t^{\nu_{i_0,j_0}(x,\xi)}(\log t)^J)$ とかくことにする。又 $h(t,s,x,\xi)=$ $=f(t,x,\xi)\,g(s,x,\xi)$, $f(t,x,\xi)=O(t^{\nu(x,\xi)}(\log t)^J)$, $g(s,x,\xi)=O(s^{\mu(x,\xi)}$ $\cdot(\log s)^K)$ であれば、単に $h(t,s,x,\xi)=O(t^{\nu(x,\xi)}(\log t)^J)O(s^{\mu(x,\xi)}$ $\cdot(\log s)^K)$ とかく。

次の補題が重要である。

補題 3.　$\tilde{T}_{j,0}=s^{(m-1)l-1}\sum_{k=0}^{m}s^{m-k}q_k(s,x,\xi)\partial_s^{m-k}$; $q_k(s,x,\xi)$ $(0\le k\le m)$; s^{-1} の多項式、係数は ξ について斉次かつ $R_x^n\times\{|\xi|=1\}$ で $\mathcal{B}^\infty$ と表わされ、$q_k(-\infty,x,\xi)=0$ $(k\le m-2)$, $q_{m-1}(-\infty,x,\xi)=\sqrt{-1}\,G_j(x,\xi)$, $q_m(-\infty,x,\xi)=-\sqrt{-1}\,H_j(x,\xi)+l(m-1)\sqrt{-1}\,G_j(x,\xi)$。従って Nakamura-Uryu [9] lemma 3.9 の証明より、$e^{-\sqrt{-1}\frac{s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}Y_j^-(s,x,\xi)$ $(1\le j\le m)$ を $-s>0$ における M_0 の基本解で、$Y_j^-(s,x,\xi)\simeq f_j^*(s,x,\xi)=$ $=s^{\sigma_j(x,\xi)}\sum_{r=0}^{\infty}f_{j,r}(x,\xi)s^{-r}$ as $s\to-\infty$, $f_{j,0}(x,\xi)\equiv 1$ をみたすも

のとすれば，$\sigma_j(x,\xi)=-\mu_j(x,\xi)-l(m-1)$。又 $\tilde{T}_{j,0}\,v=f(s,x,\xi)$，$f(s,x,\xi)=O(s^{\nu_{i_0,j_0}(x,\xi)}(\log s)^J)$ は，$v(s,x,\xi)=O(s^{\nu_{i_0,j_0}(x,\xi)-l(m-1)+1}\cdot(\log s)^K)$ for some $K\in\mathbb{Z}_+$ なる特殊解をもつ。

注意：(i) $\sigma_j(x,\xi)$ は $\tilde{V}^-_{j,m-1}(s,x,\xi)$ の s^{-1} を形式的巾級数とする級数の初項の指数と一致する。(ii) analytic category での話では，この補題の $Y_j^-(s,x,\xi)$ や $v(s,x,\xi)$ の評価を（変数 s に関する）$\mathbb{C}$－平面の原点を頂点とする開き角 $\frac{\pi}{l+1}$ の各部分角領域で出す必要がある。それには Coddington－Levinson [5] p155 (4.23) 式における積分路を Nishimoto [11] p316 における積分路でおきかえて，同様に論じればよい。

補題3より次が従う。

補題4　(1) $\partial^\alpha_{x,\xi}\,a^{-,\mu}_{m,j,\nu}(t,s,x,\xi)=O(t^{\mu_j(x,\xi)+\mu}(\log t)^{\Phi(\nu,\mu,\alpha)})\cdot O(s^{-\mu_j(x,\xi)-l(m-1)+\nu}(\log s)^{\Psi(\nu,\mu,\alpha)})$，$\Phi(\nu,\mu,\alpha),\Psi(\nu,\mu,\alpha)\in\mathbb{Z}_+$ $(\nu,\mu\in\mathbb{Z}_+,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^{2n})$ がなりたつ。

証明　ν,μ に関する double induction で示す。$\mu=\nu=0$ のとき (※) は，$\tilde{T}_{j,0}\,a^{-,0}_{m,j,0}=0$ $(1\le j\le m)$，$\sum_{j=1}^m S_{j,k,0}\,a^{-,0}_{m,j,0}=\delta_{k,m-1}(-1)^{m-1}$ $(0\le k\le m-1)$ となる。ここで $\tilde{a}^{-,0}_{m,0}=\sum_{j=1}^m e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}a^{-,0}_{m,j,0}$ とおくと，$\tilde{a}^{-,0}_{m,0}$ は $M_0\tilde{a}^{-,0}_{m,0}=0$，$D_s^k\tilde{a}^{-,0}_{m,0}\big|_{s=t}=\delta_{k,m-1}(-1)^{m-1}$ $(0\le k\le m-1)$ をみたす。P に対して Q を考えた事情を想い起せば，$\tilde{a}^{-,0}_{m,0}$ は $L_0\tilde{a}^{-,0}_{m,0}=0$，$D_t^k\tilde{a}^{-,0}_{m,0}\big|_{t=s}=\delta_{k,m-1}$ $(0\le k\le m-1)$ をみたす。従って定理1の注に述べた様に $\tilde{a}^{-,0}_{m,0}=U_m^-=\sum_{j=1}^m e^{\sqrt{-1}\frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1}\lambda_j(0,x,\xi)}\cdot$

, $\det(T_-^{(i,j)}(x,\xi))_{1\le i,j\le m}\ V_j^-(t,x,\xi)\widetilde{V}_{j,m-1}^-(s,x,\xi)$ と表わされ，

$a_{m,j,0}^{-,0}$ は $a_{m,j,0}^{-,0}(t,s,x,\xi)=\det(T_-^{(i,j)}(x,\xi))_{1\le i,j\le m}V_j^-(t,x,\xi)\widetilde{V}_{j,m-1}^-(s,x,\xi)$

で与えられる。一般に帰納法で $a_{m,j,\nu}^{-,\mu}(t,s,x,\xi)$ は，(2) $a_{m,j,\nu}^{-,\mu}(t,s,x,\xi)$

$=\sum_{\gamma=1}^{\sigma(\mu,\nu)} g_{\gamma,m,j,\nu}^{\mu}(t,x,\xi)f_{\gamma,m,j,\nu}^{\mu}(s,x,\xi)$ なる形で求められる事が

示せる。従って $\nu=\mu=0$ のときは，V_j^- 及び $\widetilde{V}_{j,m-1}^-$ の挙動から，一般の ν,μ に対しては (2) 式における $g_{\gamma,m,j,\nu}^{\mu}$，$f_{\gamma,m,j,\nu}^{\mu}$ が漸化式(※)よりいかに決るかを眺めながら，補題3を適用すれば結論を得る。

この結果を $a_{m,j,\nu}^{-,\mu}$ の semi-homogeneity に注意して，symbol class の言葉でいいかえると次を得る。

<u>補題5.</u> $a_{m,j,\nu}^{-,\mu}\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1}-(m-1),\,-m_j^-+\mu+\varepsilon,\,m_j^--l(m-1)+\nu+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$。

Boutet de Monvel class $\widetilde{S}_-^{\mu,\kappa,\lambda}$ に対する asymptotic existence

thm. (c.f. Yoshikawa [17] prop. 1.8, prop 1.9) より，$\exists a_{m,j}^{-,\mu}\in$

$\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1}-(m-1),\,-m_j^-+\mu+\varepsilon,\,m_j^--l(m-1)+\varepsilon}$; $a_{m,j}^{-,\mu}-\sum_{\nu<N}a_{m,j,\nu}^{-,\mu}\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1}-(m-1),\,-m_j^-+\mu+\varepsilon,\,m_j^--l(m-1)+N+\varepsilon}$

$(N=1,2,\cdots\cdots)$

$\exists a_{m,j}^-\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1}-(m-1),\,-m_j^-+\varepsilon,\,m_j^--l(m-1)+\varepsilon}$; $a_{m,j}^--\sum_{\mu<N}a_{m,j}^{-,\mu}\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1}-(m-1),\,-m_j^-+N,\,m_j^--l(m-1)+\varepsilon}$

$(N=1,2,\cdots\cdots)$。

この $a_{m,j}^-$ に対して，補題1,2に注意しつつ Yoshikawa [18] prop. 2.4, prop. 2.5 と同様に論じれば次を得る。

<u>補題6.</u> $r_{m,j}=T_j\,a_{m,j}^-\in\widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\lambda+1},\,-m_j^-+\varepsilon,\,m_j^--l(m-1)+\varepsilon}$ $(1\le j\le m)$,

$\sum_{j=1}^{m} s_{j,k}\, a_{m,j}^{-} - \delta_{k,m-1}(-1)^{m-1} \in \tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$ $(0\leq k\leq m-1)$ for $\forall \varepsilon>0$。

更に $\forall N\in\mathbb{N}$，$\exists r_{m,j,N}\in \tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1},\,-m_j^{-}+\varepsilon,\,\infty}$; $r_{m,j}-r_{m,j,N}\in \tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1},\,-m_j^{-}+N+1+\varepsilon,\; m_j^{-}-\ell(m-1)-m+\varepsilon}$

for $\forall\varepsilon>0$。

更に Yoshikawa [18] cor 2.6 の様に論じれば次を得る。

<u>補題 7</u>. $\exists r_{m,j}^{0}\in\bigcap_{\varepsilon>0}\tilde{S}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1},\,-m_j^{-}+\varepsilon,\,\infty}$; flat at $s=0$，$\exists r_{m,j}^{1}\in$ $\bigcap_{\varepsilon>0}\tilde{\tilde{S}}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1},\,\infty}$，$\exists r_{m,j}^{2}\in\tilde{S}_{-}^{-\infty}$; $r_{m,j}=r_{m,j}^{0}+r_{m,j}^{1}+r_{m,j}^{2}$ 但し $\tilde{S}_{-}^{-\infty}$ は $[-T_0,0]\times R_x^n\times(R_\xi^n\setminus 0)$ における Hörmander class $S_{1,0}^{-\infty}$。

次に補正項 $\tilde{\hat{a}}_{m,j}^{-}$，$\tilde{\tilde{\hat{a}}}_{m,j}^{-}$ を構成しよう。まず次の定義を用意する。

<u>定義</u> 作用素 $r(t,s,x,\xi,D_t,D_s,D_x,D_\xi)$ が homogeneous degree σ であるとは，$r(t,s,x,\lambda\xi,D_t,D_s,D_x,\lambda^{-1}D_\xi)=\lambda^{\sigma}r(t,s,x,\xi,$ $D_t,D_s,D_x,D_\xi)$ $(\lambda>0)$ がなりたつときをいう。

T_j の homogeneous part への分解に関しては次がなりたつ。

<u>補題 8</u>. $T_j\sim\sum_{k=0}^{\infty}H_{j,k}$，$H_{j,k}$; homogeneous degree $m-k-1$

ここで記号 "$\sim$" の意味は，各 $N\geq 0$ に対して，$T_j=\sum_{k=0}^{N}H_{j,k}+\hat{H}_{j,N+1}$ とするとき，$\hat{H}_{j,N+1}$ を施す効果は悪くみつもっても $\tilde{S}_{-}^{m-N-2}$ をかける事に相当するという意味である。(但し $\tilde{S}_{-}^{\mu}$ は $[-T_0,0]\times$ $[-T_0,0]\times R_x^n\times(R_\xi^n\setminus 0)$ における Hörmander class $S_{1,0}^{\mu}$) 更に $H_{j,0}=$ $=s^{(m-1)\ell-1}A_{j,0}(t,s,x,\xi)\{s(D_s+\sum_{\nu=1}^{n}A_{j,0}^{-1}(t,s,x,\xi)A_{j,\nu}(t,s,x,\xi))+A_{j,0}^{-1}(t,s,x,\xi)\cdot$ $\cdot B_j(t,s,x,\xi)\}$，$A_{j,\nu}$ $(1\leq\nu\leq n)$ と $A_{j,0}$，B_j は夫々 ξ について m 次，$m-1$ 次斉次，$[-T_0,0]\times[-T_0,0]\times R_x^n\times\{|\xi|=1\}$ で B^{∞} と表

わされ，$A_{j,0}$ は $|A_{j,0}(t,s,x,\xi)| \geq {}^{\exists}c|\xi|^{m-1}$ $(-T_0 \leq t, s \leq 0,\ x, \xi \in R^n)$ をみたす。

さて $\frac{d}{ds}\Xi_\nu = A_{j,\nu}(t,s,x,\Xi)A_{j,0}^{-1}(t,s,x,\Xi)$，$\Xi_\nu(0) = \xi_\nu$ $(1 \leq \nu \leq n)$ の解 $\Xi(t,s,x,\xi) = (\Xi_1(t,s,x,\xi), \cdots\cdots, \Xi_n(t,s,x,\xi))$ を使って，$(t,s,x,\xi) \longmapsto (t,s,x,\Xi(t,s,x,\xi))$ と変数変換すると，$H_{j,0} = S^{(m-1)\ell-1} \cdot \widetilde{A}_{j,0}(t,s,x,\Xi)\{sD_s + \widetilde{B}_j(t,s,x,\Xi)\}$ where $\widehat{A}_{j,0}(t,s,x,\Xi)$，$\widehat{B}_j(t,s,x,\Xi)$; $A_{j,0}(t,s,x,\xi)$，$B_j(t,s,x,\xi)$ を (t,s,x,Ξ) 空間で読みかえたもの となる。容易に分る様に $\widetilde{S}_-^{\mu,\kappa,\lambda}$ は上記変換に関して invariant 故，Nakamura-Uryu [9] §5 の議論にならえば次がなりたつ。

補題 9. ${}^{\exists}\widetilde{a}_{m,j}^{-} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1),\,-m_j^-+\varepsilon,\,\infty}$; $s=0$ で flat，$T_j\widetilde{a}_{m,j}^- + r_{m,j}^0 \in \widetilde{S}_-^{-\infty}$。

$\widetilde{\widetilde{a}}_{m,j}^{-}$ の構成にあたり $b_m^k(t,x,\xi)$，$\widetilde{b}_m^k(t,x,\xi)$，$\widehat{\widetilde{b}}_m^k(t,x,\xi)$ を次の様に定める。補題 6 より，$\sum_{j=1}^{m} s_{j,k}a_{m,j}^- - \delta_{k,m-1}(-1)^{m-1} \in \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$。従って $\widetilde{S}_-^{\mu,\infty}$ の性質 (c.f. Yoshikawa [17] remark 1.13) より，${}^{\exists}b_m^k \in \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$; flat at $t=0$，$-(\sum_{j=1}^{m} s_{j,k}a_{m,j}^- - \delta_{k,m-1}(-1)^{m-1}) + b_m^k \in \widetilde{S}_-^{-\infty}$。又補題 9 より，$\widetilde{a}_{m,j}^- \in \bigcap_{\varepsilon>0} \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1),\,-m_j^-+\varepsilon,\,\infty}$。故に $s_{j,k}\widetilde{a}_{m,j}^- \in \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$。従って前と同じ理由により，${}^{\exists}\widetilde{b}_m^k \in \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$; flat at $t=0$，$-\sum_{j=1}^{m} s_{j,k}\widetilde{a}_{m,j}^- + \widetilde{b}_m^k \in \widetilde{S}_-^{-\infty}$。そこで $\widehat{\widetilde{b}}_m^k \in \widetilde{S}_-^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)+k,\,\infty}$; flat at $t=0$，$\widehat{\widetilde{b}}_m^k = b_m^k + \widetilde{b}_m^k$ と定める。(但し以上で $\varepsilon>0$ は任意)

次の補題に注意。

補題 10. $s_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} H_{j,k,k}$，$H_{j,k,k}$; homogeneous degree $k-k$，$H_{j,k,0} = (-t^\ell\lambda_j(t,x,\xi))^k$。

さて $\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu}(t,s,x,\xi)$ $(\nu\geq 0)$ を次式 (B) をみたす様に定める。

$$
(\mathrm{B})\begin{cases}
H_{j,0}\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu} = -\sum_{k=1}^{\nu} H_{j,k}\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu-k} - \delta_{0,\nu} r'_{m,j}, \\
\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu}\Big|_{s=t} = \begin{vmatrix} 1, & \cdots, & C^{0}_{m,\nu}(t,x,\xi), & \cdots, & 1 \\ -t^{\ell}\lambda_1(t,x,\xi), & \cdots, & C^{1}_{m,\nu}(t,x,\xi), & \cdots, & -t^{\ell}\lambda_m(t,x,\xi) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ (-t^{\ell}\lambda_1(t,x,\xi))^{m-1}, & \cdots, & C^{m-1}_{m,\nu}(t,x,\xi), & \cdots, & (-t^{\ell}\lambda_m(t,x,\xi))^{m-1} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1, & \cdots, & 1 \\ -t^{\ell}\lambda_1(t,x,\xi), & \cdots, & -t^{\ell}\lambda_m(t,x,\xi) \\ \cdots & & \cdots \\ (-t^{\ell}\lambda_1(t,x,\xi))^{m-1}, & \cdots, & (-t^{\ell}\lambda_m(t,x,\xi))^{m-1} \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

where $C^{k}_{m,\nu}(t,x,\xi) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\min(k,\nu)} H_{j,k,k}\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu-k}\Big|_{s=t} - \delta_{0,\nu}\widetilde{\widetilde{b}}^{k}_{m}$

次の補題によれば、(B)をみたす様に $\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu}\in\bigcap_{\varepsilon>0}\widetilde{\widetilde{S}}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)-\nu,\infty}$ を求める事が出来る。

<u>補題 11</u>. (Yoshikawa [17] prop. 4.2) $S^{-}_{\infty} = \{f(t,s)\in C^{\infty}(\Delta_-)\,;\,{}^{\forall}k,p,N\in Z_+,\ {}^{\exists}C=C(k,p,N)>0\,;\,|D_t^k D_s^p f(t,s)|\leq C|t|^N\ ((t,s)\in\Delta_-)\}$ where $\Delta_-=\{(t,s)\,;\,-T_0\leq s\leq t\leq 0\}$ と定める。このとき $a(s), g(t)\in C^{\infty}([-T_0,0])$, $g(t)$; flat at $t=0$, $f(t,s)\in S^{-}_{\infty}$ ならば、$(s\frac{d}{ds}+a(s))u(t,s)=f(t,s)$, $u(t,t)=g(t)$ の解 $u(t,s)\in S^{-}_{\infty}$ がある。

$\widetilde{\widetilde{S}}_{-}^{\mu,\infty}$ に対する asymptotic existence thm. (c.f. Yoshikawa [17] prop. 1.18, remark 1.19) より、${}^{\exists}\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j}(t,s,x,\xi)\in\bigcap_{\varepsilon>0}\widetilde{\widetilde{S}}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1),\infty}$; $\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j} - \sum_{\nu<N}\widetilde{\widetilde{a}}^{-}_{m,j,\nu}\in\bigcap_{\varepsilon>0}\widetilde{\widetilde{S}}_{-}^{\frac{2\varepsilon}{\ell+1}-(m-1)-N,\infty}$ $(N=1,2,\cdots\cdots)$。後は routine argument より，$T_j \widehat{\widetilde{a}}_{m,j}^{-} + r_{m,j}^{1} \in \widetilde{S}_{-}^{-\infty}$ $(1 \le j \le m)$，$\sum_{j=1}^{m} s_{j,k} \widehat{\widetilde{a}}_{m,j}^{-} + \widehat{\widetilde{b}}_{m}^{k} \in \widetilde{S}_{-}^{-\infty}$ $(0 \le k \le m-1)$ が示される。以上より parametrix $E_m^{-}(t,s)$ が構成できた。定理2の証明については，Kumanogo-Taniguchi [8] thm. 2.3 と例えば $\chi \in C^{\infty}(R^1)$；$\chi(\theta) = 0$ $(|\theta| \le \frac{1}{2})$，$= 1$ $(|\theta| \ge 1)$，$a(t,s,x,\xi) \in \widetilde{S}_{-}^{\mu,\kappa,\lambda}$ ならば，$|\chi(|\xi|^{\frac{1}{\lambda+1}} t) a(t,s,x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{\mu}(|\xi|^{-1}+|s|^{(\lambda+1)})^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \cdot |t|^{\kappa}$ $(0 \le -s, -t \le T_0, x \in R^n, |\xi| \ge 1)$ etc. といった symbol class に対する簡単な性質を使えばよい。

参考文献

[1]. S. Alinhac ; Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978) 1027-1037

[2]. K. Amano ; Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators and Stokes phenomena, Proc. Japan Acad., 56 (1980) 206-209

[3]. L. Boutet de Monvel ; Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operator, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974) 585-639

[4]. J. Chazarain ; Opérateurs hyperbolique à caractéristique de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, 24 (1974) 173-202.

[5] E. A. Coddington and N. Levinson ; Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York (1955)

[6] V. Ya. Ivrii ; Wave fronts of solutions to some microlocally hyperbolic pseudo-differential equations, Soviet Math. Dokl.

17 (1976) 233-236

[7] T. Kawai ; Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 7 (1971/72) 363-397

[8] H. Kumanogo and K. Taniguchi ; Fourier integral operators of multi-phase and the fundamental solution for a hyperbolic system, Funkcialaj Ekvacioj, 22 (1979) 161-196

[9] G. Nakamura and H. Uryu ; Parametrix of certain weakly hyperbolic operators, Comm. P.D.E., 5 (1980) 837-896

[10] S. Nakane ; Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points (preprint).

[11] T. Nishimoto ; On a matching method for a linear ordinary differential equations containing a parameter I, Kodai Math. Sem. Rep., 17 (1965) 198-221

[12] 大久保 一 河野 ; 漸近展開, 教育出版 1976

[13] K. Shinkai ; Fundamental solution of a degenerate hyperbolic system (to appear in Osaka Math. J.)

[14] 高崎金久 ; ある種の多重特性的双曲型作用素に対する特異Cauchy問題の解の構成, 東京大学修士論文

[15] K. Taniguchi and Y. Tozaki ; A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25 (1980) 279-300

[16]
[17] A. Yoshikawa ; Construction of a parametrix for the Cauchy
[18] problem of some weakly hyperbolic equation I, II, III, Hokkaido Math. J., 6 (1977) 313-344 ; 7 (1978) 1-26, 127-141

追記

[19] Y. Morimoto ; Fundamental solution for a hyperbolic equation with involutive characteristics of variable multiplicity, Comm. P.D.E, 4 (1979) 609-643