数理解析研究所講究録
第 431 巻 1981 年 236-247



# 境界に沿う特異性の伝播現象と実解析解の接続

東大 教養　金子 晃

話が次第に代わり映えしなくなって来たので，ここで弁解を插みながら最初から振り返って見たい．出発点は修士論文で出した次の結果であった．

<u>定理 1</u>　$K \subset U$ を $\mathbb{R}^n$ の凸コンパクト集合及びその凸近傍とする．定数係数線型偏微分方程式 $p(D)u=0$ の実解析解の接続に関して，次の二つは同値となる．

a)　$\mathcal{A}_p(U \setminus K)/\mathcal{A}_p(U)=0$（即ち，$U \setminus K$ 内の実解析解は必ず $U$ まで実解析解として延長できる．）

b)　$p(D)$ は楕円型の既約因子を持たない．

この結果は他人には評判が良かったが自分にとっては偶然に出て来たものであり，果して本当に正しいのか(?!)という不安もあって気持が悪かった．そこで状況を一般化しつつ更に調べてみようとしたのが次の結果であった．

<u>定理 2.</u>　$K \subset \{x_n<0\}$ を $\mathbb{R}^n$ の凸コンパクト集合と $\{x_n<0\}$

の共通部分とし，$U$をその近傍とする．$p(D)$の各既約成分$p_j(D)$について次のいずれかの条件が成り立っていれば$\mathcal{O}\!\mathcal{L}_p(U\setminus K)/\mathcal{O}\!\mathcal{L}_p(U)=0$となる．

1）$dx_n$方向に収束する方向の列$\vartheta_k$，$k=1,2,\cdots$があり，$p_j(D)$は$\vartheta_k$方向に弱双曲型．

2）変数$(x_1,\cdots,x_{n-1})$の空間に適当な座標系を取り直すとき$x_1=0$は$p_j(D)$につき非特性的で$K\subset\{x_1=0\}$かつ$p_j(\zeta_1,\zeta')=0$の$\zeta_1$に関する根$\zeta_1=\tau_k(\zeta')$はいずれも次の不等式を満たす．

(1) $|\mathrm{Im}\,\tau_k(\zeta')|\leqq\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta_n|+b|\mathrm{Im}\,\zeta_n|+C_{\zeta'',\varepsilon}$,

ここに$\zeta'=(\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，$\zeta''=(\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1})$．

これらの条件のうちで1）は双曲性から殆んど自明に得られる結論であり，2）が本質的である．1）を入れたために定理2全体の価値について誤解を与えた気味もある．これは博士論文として頂いたが，主観的には労多かったにも拘ず結果が不徹底ということで指導教官の評判は芳しくなかった．そこでここから弁明が始まるのである．

定理1の条件において，既約多項式$p(\zeta)$が楕円型でないとは，実無限遠点が少くとも一つ存在することを意味する．すなわち座標系を適当に選べば，不等式(1)を満たすような根が少くとも一つは存在する．定理1の状況では，実解析解の延長可能性を示す商空間$\mathcal{O}\!\mathcal{L}_p(U\setminus K)/\mathcal{O}\!\mathcal{L}_p(U)$がFourier変換

を用いたGrušin表現というものにより$N(p)=\{p(\zeta)=0\}$上の$\widehat{\beta[K]}$型の増大度と，更にある減少度条件とを満たす正則函数の空間で表現されるのであるが，斯様に実無限遠点があるとその近傍で局所座標をとって増大度条件にPhragmén-Lindelöf型の定理を適用することにより，この正則函数が局所的に0であることが結論される．既約代数多様体では0は伝播するので，これより$\mathfrak{A}_p(U \setminus K)/\mathfrak{A}_p(U)=0$がわかるのである．これに反し定理2の状況では同じ商空間は$L=\overline{K}$とすれば$\widehat{\beta[L]}$型の増大度と更にある種の減少度条件とを満たす$N(p)$上の正則函数の空間を，$\widehat{\beta[L \setminus K]}$型の増大度を持つものを法として考えたもので表現される．不等式(1)を仮定すると，この根の近傍では相対形のPhragmén-Lindelöf原理により$\widehat{\beta[L]}$型から$\widehat{\beta[L \setminus K]}$型への不等式の改良が成立するのである．しかし不等式というものは0と異なり既約多様体上を伝播しない（と思われる）ので，条件はすべての根につけなければならぬのである．

以上により定理1の条件b)は，(少くともKが孤立点の場合には)，解析的な本質は根に対する不等式(1)に，また代数的な本質は0の伝播ということに分析されたわけである．そこで次にはこれらの条件が通常の線型偏微分方程式論において如何なる意味を持っているかを明らかにしなければならな

い. Fourier 変換は理由もわからずに結果が出てしまうので、徹底的に局所理論の範囲で説明を与えるべきである. これは結果を変数係数の方程式に拡張する場合にも必要なことなのであるが, ここではその様な試みの中から見出された"境界値理論を用いる方法"により, 定数係数の場合に上の二つの問題が説明できたことを報告したい. (かくて小生の不安は解消された! 遺憾ながらあまりに年月をかけすぎた.) ただし本報告はその第一部として前半の解析的な部分を取扱う.

以下 $K \subset \{x_1=0,\ x_n<0\}$ は $\overline{K}=L$ が凸コンパクト集合となるような"薄い"集合とし, $U$ を $K$ の近傍の一つとする. また作用素 $p(D)$ に関し $x_1=0$ は非特性的とする. このとき $u \in \mathcal{O}\!\ell_p(U \setminus K)$ に対し, $u|_{\pm x_1>0}$ をそれぞれ半近傍 $U^{\pm}=U \cap \{\pm x_1>0\}$ における $p(D)u=0$ の超函数解と思うと, 境界値理論の教えるところにより, $[u]_{\pm} \in \mathcal{B}(U)$ という $\mathrm{supp}\,[u]_{\pm} \subset \{\pm x_1 \geqq 0\}$ を満たす延長で

(2) $$p(D)[u]_{\pm} = \pm \sum_{j=0}^{m-1} u_j^{\pm}(x')\,\delta^{(m-j-1)}$$

という式を成り立たせるようなものが存在する. ここに $m$ は $p(D)$ の階数であり, 係数 $u_j^{\pm}(x')$, $j=0,\cdots,m-1$ は境界値の全体である. 故に $[u]=[u]_+ + [u]_-$ とおけば

(3) $$p(D)[u] = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(x')\,\delta^{(m-j-1)}$$

となる. ここに $u_j(x')=u_j^{+}(x')-u_j^{-}(x')$ とおいた. 境界値理

論によれば，$u$ が境界 $x_1=0$ まで実解析的なところでは，この理論で定まる境界値は制限で定まる通常の境界値と一致する．また，$u$ が $U$ における超函数解として拡張できるのは，上の $[u]$ が $p(D)[u]=0$ を満たすとき，かつそのときに限る．故に，

(4) $$\operatorname{supp} u_j(x') \subset K$$

であり，かつ $u$ を超函数解として延長する仕事は，さらに $u_j(x')\equiv 0$ を示すことに外ならない．さて Phragmén-Lindelöf 原理の Fourier 逆像とも見なすことのできる柏原－河合の Holmgren 型定理によれば，(4) から $u_j(x')\equiv 0$ を導くには，S.S. $u_j(x')$ が $+idx_n\infty$ 又は $-idx_n\infty$ いずれかの方向を含まぬことを云えばよい．小生が変数係数の場合に昔行なった講演では，$\pm x_1>0$ における実解析解の境界値の S.S. から直ちにこれらの方向が抜ける場合を吟味したのであるが，実は境界値 $u_j^{\pm}(x')$ の特異台が $K$ 内に制限されているので，本当に必要なのは次の定理であった．

定理 3．$p(D)u=0$ の $\pm x_1>0$ における実解析解の境界値 $u_j^{\pm}(x')$ について次のような“境界に沿う特異性伝播現象”が成り立っていると仮定する．

(5) $$\text{S.S. } u_j^{\pm}(x') \cap \{x_n=\text{const}\}\times\{idx_n\infty\} \qquad j=0,\cdots,m-1$$

がすべてコンパクトならば実は空集合となる．

このとき $u\in\mathcal{O}\!\iota_p(U\smallsetminus K)$ は必ず $\mathcal{B}_p(U)$ の元として(一意に)延長できる.(もちろん $+idx_n\infty$ の代わりに $-idx_n\infty$ としても同じ結論が得られる.)定理2と比べて結論の $\mathcal{O}\!\iota_p(U)$ が $\mathcal{B}_p(U)$ になっているが,それは内部問題における解の実解析性伝播現象として後から補えばよい.この状況では必要な主張は河合により証明されているのであった.さて,以上により定理2を導くには次を証明すればよいこととなった:

<u>定理4.</u> $p(\zeta_1,\zeta')=0$ の根 $\zeta_1=\tau_k(\zeta')$, $k=1,\cdots,m$ は次の不等式を満たすとする.

(1′) $\pm\operatorname{Im}\tau_k(\zeta')\le a|\operatorname{Re}\zeta_n|+b|\operatorname{Im}\zeta_n|+C_{\zeta'',\varepsilon}$. $\operatorname{Re}\zeta_n\geq 0$ において

このとき $\pm x_1>0$ における $p(D)u=0$ の超函数解で $+idx_n\infty$ を通る径線の方向にミクロ解析的なもの $u$ の境界値 $u_j^{\pm}(x')$ について定理3中に述べた"境界に沿う特異性伝播現象"(5)が成り立つ(複号同順).

以下この定理の証明の筋道を述べよう.話を決めるため $\{0<x_1<\delta\}\times\{|x''|<A\}\times\{-r<x_n<r\}$ における実解析解 $u$ を考え,仮定として特異台は $|x''|<A-\delta$ に収まっているとする.この reduction は $\delta(x')$ の $+idx_n\infty$ 方向の Radon 分解成分との畳み込みで行なうことができる.実は分解成分の $\omega$ に関する導函数との畳み込みを用いた,更に精密な議論により境界値の特異スペクトルが $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ という一方向しか含ま

ぬとも仮定できるのであった．この仮定の下に境界値 $u_j(x')$ が実は実解析的になることを示せばよい．以下の方針を一口で云えば，境界値 $u_j(x')$ の適当なコンパクト台を持つ延長 $f_j(x')$ に対し

(6) $\quad E(x',\varepsilon)=\mathcal{F}_{x'}^{-1}\left(\exp\left(-2c\varepsilon\left(\sqrt{1+|\xi''|^2}\right)^{1/N}\left(\sqrt{1+|\xi'|^2}\right)^{1-1/N}\right)\right)$

なる超函数を考え，$f_j(x') \underset{x'}{*} E(x',\varepsilon)$ が $\varepsilon>0$ のとき $\{|x''|<A-\delta\}\times\{|x_n|<r-\delta\}$ において実解析的となることを示す．次いで極限操作 $\varepsilon\downarrow 0$ を

(7) $\quad \dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}+2c\left(\sqrt{1-\Delta_{x''}}\right)^{1/N}\left(\sqrt{1-\Delta_{x'}}\right)^{1-1/N}$

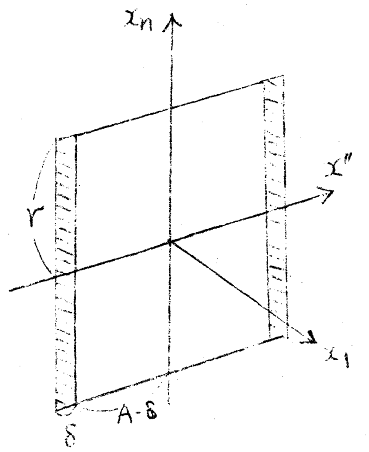
なる"擬微分作用素"に関する境界値操作とみなして，$f_j(x')$ の $+idx_n\infty$ 方向のミクロ解析性を示すのである．ここに $N$ は評価 (1') から簡単な代数的考察で得られる

(1'') $\quad \pm\operatorname{Im}\tau_k(\zeta')\leq b\,|\operatorname{Im}\zeta'|+c\,|\operatorname{Re}\zeta_n|^{1-1/N}|\operatorname{Re}\zeta''|^{1/N}+C \quad (\operatorname{Re}\zeta_n\geq 0 で)$

という評価に合わせて選ぶ．作用素 (7) は実解析解の境界値の S.S. 評価について先に講演者が用いた，部分 Laplace 作用素 $\dfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}+4c^2(\Delta_{x''}-1)$ と同様の性質を持つべきものであるが，微分作用素ではなく，しかも $\{x_n=\text{const.}\}\times\{\pm idx_n\infty\}$ に沿ってミクロ解析的ですらないので取扱いに少々注意が要る．故にここではそのことを表に出さず直接函数 $E(x',\varepsilon)$ の正則性を見ながら議論する方法をとろう．さて，この方針を実行するため，やや看板に偽りの感はあるが Fourier 変換を用いるこ

とにする．（${}^tp(D)$ に対する (6) の $\sqrt{-1}dx_n\infty$ 成分を境界値とする境界値問題の解を作り Green の公式を適用する方法でもできるが，どうせ今回は作用素 (7) の扱いの部分を局所理論で貫かないのだから，ひとまず Fourier 変換を使うことにする.）

そこで $\psi_1(x_1, x_n)$，$\psi_2(x'')$ をそれぞれ次のような Gevrey 級函数としよう．




(8)　$\psi_1(x_1, x_n)$ は $\{-r < x_n < r\}$ で定義され，
$\{0\}\times\{-r < x_n < r\}$ の $\varepsilon$-近傍に台を持ち，
その更に小さい近傍で 1 に等しい．

(9)　$\psi_2(x'')$ は $|x''| \leq A$ に台を持ち，
$|x''| \leq A-\delta$ で 1 に等しい．

$\chi = \psi_1 \cdot \psi_2$ を切り落し函数として採用し，$p(D)(1-\chi)u$ を考えると，これは台が $\{\chi(x) > 0\}$ の閉包に含まれ，この集合は境界 $x_1 = 0$ と $A-\delta \leq |x''| \leq A$，或は $|x_n| = r$ でしか交わらない．前者においては，解は実解析的なので Heaviside 函数を用いて切り落し，また後者においては超函数層の脆弱性を用いて適当に台を修正して，コンパクト台の超函数 $[[p(D)(1-\chi)u]]$ を作る．これを境界の定義式から同様の操作で得られる

$$[[p(D)[u]_+]] = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(x')\delta^{(m-j-1)}(x_1)$$

と比較してみよう．ここに $f_j(x')$ は $u_j(x')$ を同様の操作でコンパクト台に修正したものである．Fourier 変換して $N(p)$ に

制限すると，$p(D)\mathcal{B}_*(\mathbb{R}^n)$ の元は無視できるので，$F(\zeta)=\widetilde{[[p(D)[u]_+]]}$ と $[[p(D)(1-\chi)u]]$ とは $A-\delta\leq|x''|\leq A$ または $|x_n|=r$ に台が含まれる超函数 $w$ から来る差しかない．即ち

$$F(\zeta)=\widetilde{[[p(D)(1-\chi)u]]}+\tilde{w} \qquad (N(p)\text{の上で})$$

以上の操作を解 $u$ の代わりにその（無限階）導函数 $J(D')u$ に対して行なえば，$J(D')$ との交換子を同じ理由で無視することにより次が得られる：

補題 5. $N(p)$ の上で

$$J(\zeta')F(\zeta)=\widetilde{[[p(D)(1-\chi)J(D')u]]}+\tilde{w}$$

ここで $\mathrm{supp}\, w(x)\subset\{A-\delta\leq|x''|\leq A,\ |x_n|<r\}\cup\{|x''|\leq A,\ |x_n|=r\}$ かつ，第一因子たる集合上では

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & w(x)=\sum_{j=0}^{m-1}w_j(x')\,\delta^{(m-1-j)}(x_1),\\
& S.S.\ w_j(x')\subset\{dx_1=dx_n=0\},\quad j=0,\cdots,m-1.\ (-r<x_n<r)
\end{aligned}
$$

の形に書ける．（ここで $w(x)$, $w_j(x')$ の $J(D')$－依存性は明記を省略してある．）

さて，$p(D)(1-\chi)J(D')u$ なる函数には $u$ が実解析的なところだけが生き残っているので，その滑らかさを十分に活用することができる．$\varphi(x)$ を集合 $\{|x_n|=r,\ |x''|\leq A\}$ の $\varepsilon$－近傍に台を持ち，その更に小さい近傍で 1 に等しい Gevrey 級函数とすれば，

$$[[p(D)(1-\chi)J(D')u]]=v+w^++w^-$$

$$v=(1-\varphi)[[p(D)(1-\chi)J(D')u]]$$

と分解される．ここに $\operatorname{supp} w^{\pm}$ はそれぞれ $\{x_n=\pm r,\ |x''|\leq A\}$ の近傍に台が含まれる部分を表わす．$v$ は $x_1=0$ において $Y(x_1)$ 型の因子による特異性を持つ他は Gevrey 級である．故に $N(p)$ の上で

$$J(\zeta)F(\zeta)=\tilde{v}(\zeta)+\tilde{w}^{+}(\zeta)+\tilde{w}^{-}(\zeta)+\tilde{w}^{\ell}(\zeta)$$

という式が得られた．ただし $w^{\ell}$ は $w$ の $|x_n|=r$ の部分を $w^{\pm}$ に繰り込んだ残りである．従って $w^{\ell}$ は台が $A-\delta\leq|x''|\leq A$ に含まれ，かつ (10) を満たすとしてよい．$N(p)$ 上でこの式の右辺各項と同じ正則函数を与えるような $\zeta_1$ の多項式を補間法（即ち Fundamental Principle の最も易しい場合）で作り，その係数をそれぞれ $\tilde{g}_j(\zeta')$, $\tilde{h}_j^{\pm}(\zeta')$, $\tilde{h}_j^{\ell}(\zeta')$ とすれば

$$J(\zeta')\tilde{f}_j(\zeta')=\tilde{g}_j(\zeta')+\tilde{h}_j^{+}(\zeta')+\tilde{h}_j^{-}(\zeta')+\tilde{h}_j^{\ell}(\zeta').$$

ここで $\tilde{g}_j(\zeta')$ etc と書いたが $\tilde{h}_j^{\ell}(\zeta')$ が (10) 式の係数 $w_j(x')$ の Fourier 変換である他は必ずしも実軸に台を持つ通常の超函数の Fourier 変換となっているとは限らない．増大度を調べてみると，

$$|\tilde{v}(\zeta)|\leq C e^{-a|\mathrm{Re}\,\zeta'|^{g}+\varepsilon(\mathrm{Im}\,\zeta_1)_{+}+A|\mathrm{Im}\,\zeta''|+r|\mathrm{Im}\,\zeta_n|}$$

$$|\tilde{w}^{\pm}(\zeta)|\leq C_{\gamma} e^{\gamma|\zeta|+\varepsilon(\mathrm{Im}\,\zeta_1)_{+}+A|\mathrm{Im}\,\zeta''|\pm r\,\mathrm{Im}\,\zeta_n}.$$

ここに定数 $a>0$, $g<1$, は Gevrey 級函数 $\chi,\varphi$ の滑らかさから来ている．$\tilde{g}_j(\zeta')$, $\tilde{h}_j^{\pm}(\zeta')$ 等は補間公式でこれに $\zeta_1=\tau_k(\zeta')$ を

代入したものから得られるので，根の条件(1″)を用いると

(11) $\quad |\tilde{g}_j(\zeta')| \leqq C(1+|\zeta'|)^M \exp(-a|\mathrm{Re}\,\zeta'|^{\gamma} + A|\mathrm{Im}\,\zeta''| + r|\mathrm{Im}\,\zeta_n| + \varepsilon b|\mathrm{Im}\,\zeta'| + c\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta_n|^{1-1/N}|\mathrm{Re}\,\zeta''|^{1/N}) \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta_n \geqq 0)$

(12) $\quad |\tilde{w}^{\pm}(\zeta')| \leqq C_\gamma \exp(\gamma|\zeta| + A|\mathrm{Im}\,\zeta''| \pm r\,\mathrm{Im}\,\zeta_n + \varepsilon b|\mathrm{Im}\,\zeta'| + c\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta_n|^{1-1/N}|\mathrm{Re}\,\zeta''|^{1/N}) \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta_n \geqq 0)$

となる．$\mathrm{Re}\,\zeta_n \leqq 0$ では根の条件は無いが，必要なら $\delta(x')$ の急減少楕円型の Radon 分解成分との畳み込みをとることにより $|\tau_k(\zeta')| \leqq M|\zeta'|$ という単なる非特性条件から来る評価 $M\varepsilon|\zeta'|$ を打消せるような指数減少をしていると仮定できるから問題は無い．これらの評価で $|\mathrm{Re}\,\zeta'|$ が infra-linear には入っていないので，$\tilde{g}_j(\zeta')$，$\tilde{w}^{\pm}(\zeta')$ の逆像は台が実軸からはみ出た解析汎函数となってしまう．そのようなものの取扱いは大変なので，(6)に示した超函数の Fourier 変換 $\tilde{E}(\zeta', \varepsilon) = \exp(-2c\varepsilon(\sqrt{1+|\zeta''|^2})^{1/N} \times (\sqrt{1+|\zeta'|^2})^{1-1/N})$ を減衰乗数として用い，これを消す．すると $\tilde{g}(\zeta')\tilde{E}(\zeta', \varepsilon)$ は Gevrey 級函数の Fourier 像となり，$\tilde{h}_j^{\pm}(\zeta)E(\zeta', \varepsilon)$ は超平面 $x_n = \pm r$ の $\varepsilon b$-近傍を除いて実解析的な超函数の Fourier 像となる．一方 $w_j(x') \underset{x'}{*} E(x', \varepsilon)$ は S.S. の評価計算から直接 $|x''| < A-\delta$，$|x_n| < r$ で実解析的なことがわかる．以上を総合すると

(13) $\quad J(D')f_j(x') \underset{x'}{*} E(x', \varepsilon)$ は $|x''| < A-\delta$，$|x_n| < r - \varepsilon b$ で連続

なることがわかった．$J(D')$ は任意の導函数であるから，これから

(14) $\qquad f_j(x') \underset{x'}{*} E(x';\varepsilon)$ は $|x''| < A-\delta,\ |x_n| < r-\varepsilon b$ で実解析的

が結論される．(14)の超函数は先に予告した作用素(7)の解であり，その実解析解の境界値のS.S.評価によりS.S. $f_j(x')$が $|x''|<A-\delta,\ |x_n|<r-\delta$ で $+idx_n\infty$ 方向にミクロ解析的なことが結論されるはずである．最後のところは部分Laplace作用素に対する方法と同様の理論を準備すればよいのだが，より安直には直接 $E(x',\varepsilon)$ の正則域を評価して局所型Bochnerの定理を適用しても得られる．実際，上で示した $f_j(x) \underset{x'}{*} E(x',\varepsilon)$ の正則性は実の $\varepsilon>0$ のみならず $\mathrm{Re}\,\varepsilon>0$ なる複素数の $\varepsilon$ についても同様に成立するから，これと $f_j(x') * E(z',\varepsilon)$ が境界 $\varepsilon=0$ に沿って $\mathrm{Im}\, z_n>0$ に漸近する楔まで解析接続できることを合わせ，$\varepsilon$ の実部虚部を交換して局所型Bochnerの定理を二段階に適用すれば，$f_j(x') \underset{x'}{*} E(x',\varepsilon)$ が境界 $\varepsilon=0$，$|x''|<A-\delta,\ |x_n|<r-\delta$ まで解析接続できることがわかるのである．

以上の議論の詳細は次の論文に発表の予定である．

A. KANEKO: On the propagation of micro-analyticity along the boundary, (submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA.)