

拡散過程の縮約問題

京大理 長谷川 洋
水野 正彦

二種類の変数 $\{x_\mu, \mu=1, 2, \dots, n\}$ および $\{y_i, i=n+1, \dots, n+m\}$
に関する確率微分方程式 (Itô 方程式)

$$dx_\mu(t) = [\alpha_{\mu i}(x(t)) y_i(t) + v_\mu(x(t))] dt + dW_\mu^x(x(t), t) \quad [A]$$

$$dy_i(t) = [-\gamma_{ij}(x(t)) y_j(t) + b_i(x(t))] dt + dW_i^y(x(t), t) \quad [B]$$

(添字 μ, i etc に関するテンソル和法に従う)

の時間的粗視化による y 変数の消去 (t の粗いスケールで
等価な ∞ だけの方程式を求めること) の問題を扱う。前回
(確率過程論と開放系の統計力学 II (1980年3月) 講義録
405) における森氏および筆者の一人 (長谷川) の稿の続論
であるが、そこで問題となった '不一致点' を解明し、
両者を統一する一般的な解答を用意する。すでに述
べたように、この種の問題の数学的基礎は

Papanicolaou, Strook, Varadhan の Martingale Approach 極限
定理 [1] に求められるが、物理の問題に適用しようとする場合は
拘束因子 ε (統計物理で "smallness parameter" と呼ぶもの)

の入れ方を定めなければならず, [1]の理論はその方法までを指示するものではない。“不一致”が現れるのは“ ε の入れ方の不統一”によるものであることが §1の所論で明らかとなる。いずれの立場にもそれぞれ物理的な根拠のあることであり, §2において1次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程の事例でこのことを示そう。従って理論と満足の中核のものにするためには, 与えられた方程式 [A] [B] それ自体に収束因子 ε を入れる論理が備わっている筈でそれを発見する必要がある。それは方程式 [B] のドリフト関数 $f_i(x)$ の性質にかかっており, それを分解して [1]の方式にあてはまるよう ε を入れる方法が見出されることを §3 において論ずる。

§1. Papanicolaou et al の極限定理における収束因子の入れ方の多様性

文献 [1] で考察された SDE は [A] [B] よりもさらに一般的なものであり 次のように書かれる。

$$dx_\mu(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon} F_\mu^{(1)}(x(t), y(t)) + G_\mu^{(1)}(x(t), y(t)) \right] dt + \sigma_\mu^{(1)}(x(t), y(t)) dB^{(1)}(t)$$

$$dy_i(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} F_i^{(2)}(x(t), y(t)) + \frac{1}{\varepsilon} G_i^{(2)}(x(t), y(t)) + H_i^{(2)}(x(t), y(t)) \right] dt$$

$$+ \left[\frac{1}{\varepsilon} \sigma_i^{(2)}(x(t), y(t)) + \sigma_i^{(3)}(x(t), y(t)) \right] dB^{(2)}(t)$$

すなわち “driving 過程” $y(t)$ に対しても線形性を仮定せず極めて一般的な条件のもとに縮約 “driven 過程” $x(t)$ の存在

を示そうというものである。 y と x との違い — すなわち y は x を drive する — は 攪束因子 ε が y に対する方程式の右辺において drift 項に $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 、1 次項に $\frac{1}{\varepsilon}$ として入れられている点にある。 $\varepsilon \rightarrow 0+$ は y が x に較べ一般と速く運動することの表現である。その極限過程 $x(t)$ が安定に存在するための(十分)条件は次の通り:

(i) y -過程の (x の各点における) エルゴード性, すなわち x を固定して得られる y -方程式が $t \rightarrow \infty$ で初期値によらぬ解 $y(x)$ をもつこと

(ii) centering condition $\langle F_i^{(1)}(x, y(t)) \rangle_\infty$
 $= \int F_i^{(1)}(x, y) \mu(x; dy) = 0$
 x を固定したときの y -過程の不変測度

(iii) 係数 F, G, H, σ に関する x, y の関数としての正則性 (いずれも C^∞ から $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ で有界)

以上の前提のもとに $\varepsilon \rightarrow 0+$ の安定な極限過程 $x(t)$ の存在が与えて一定の Itô SDE に従う (詳細は文献 [1])。

以上の定理をわれわれのモデル SDE [A][B] に適用する場合に問題となるのが 攪束因子 ε の入れ方の問題であって, 森氏の結果と筆者の結果の不一致が次のように具体的に示されるのである。

I. (筆者の結果 — 講義録 405 記載)

$$dx_\mu(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\mu i}(x(t)) y_i(t) + v_\mu(x(t)) \right] dt + dW_\mu^x$$

$$dy_i(t) = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x(t)) y_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} b_i(x(t)) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} dW_i^y$$

II. (森氏の結果)

$$dx_\mu(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\mu i}(x(t)) (y_i(t) - (\gamma^{-1} b)(x(t)))_i \right. \\ \left. + (v + \alpha \gamma^{-1} b)_\mu(x(t)) \right] dt + dW_\mu^x$$

$$dy_i(t) = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x(t)) y_j(t) + \frac{1}{\varepsilon^2} b_i(x(t)) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} dW_i^y$$

二重アングラーインの部分に見られるように、II においては y によるドリフト項 b 項を damping 項 $-\gamma y$ と同等のウエイトに見ているわけで、その結果エルゴード条件 (i) に現れる y の $t \rightarrow \infty$ での値が 0 と異なる $\gamma^{-1} b(x(t))$ となっているわけである (それに対し I では明らかに 0)。以上、うっかりすると「不毛の論争」になりかねない相違点を克服する数学としての手段を見出す、というのがわれわれの研究の主題である。それは次のような考察にもとづく。上の ε の入れ方 I, II は二つの両極端であって一般には両方が複合したものであるに違いない、そしてそれは次のように表現されるであろう。

$$\text{ベクトル } b \text{ の分解: } b_i(x) = \gamma_{ij}(x) y_j^{\circ}(x) + \bar{b}_i(x) \quad (1)$$

$$\text{それに対する } \varepsilon \text{ の入れ方: } \frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x) y_j^{\circ}(x) + \frac{1}{\varepsilon} \bar{b}_i(x) \quad (2)$$

相対する SDE:

$$dx_{\mu}(t) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\mu i}(x(t)) (y_i(t) - y_i^{\circ}(x(t))) + (r + \alpha y^{\circ})_{\mu}(x(t)) \right] dt + dW_{\mu}^x \quad (3)$$

$$dy_i(t) = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x(t)) (y_j(t) - y_j^{\circ}(x(t))) + \frac{1}{\varepsilon} \bar{b}_i(x(t)) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} dW_i^y \quad (4)$$

このモデルに対し 前述の 3 条件 ^注 すなわち (i) y に関するエルゴード性 (ii) centering condition (iii) 係数の適当な正則性が満たされるならば $\varepsilon \rightarrow 0$ として得られる 縮約過程 $x(t)$ がわれわれの求める結果に他ならない。従って問題は、如何に合理的にベクトル $b(x)$ を (1) のように分解するか、ということに還元されるわけである。(それは §3 であらためて議論しよう)

注 前稿 (講義録 405) で述べたことを簡単に summarize する

$$(i) \langle dW_{\mu}^x(x(t), t) dW_{\nu}^x(x(t), t) | x(t)=x \rangle = 2 L_{\mu\nu}^{xx}(x) dt$$

$$\langle dW_{\mu}^x(x(t), t) dW_i^y(x(t), t) | x(t)=x \rangle = 2 L_{\mu i}^{xy}(x) dt$$

$$\langle dW_i^y(x(t), t) dW_j^y(x(t), t) | x(t)=x \rangle = 2 L_{ij}^{yy}(x) dt$$

L^{xy} が $m \times m$ 行列として正則で γ_{ij} が一対正値であれば $\gamma V + V \gamma' = 2 L^{xy}$ から定まる分散行列 V が正則で (ii) の不変測度の分布 (ガウス型) は

$$\mathcal{P}_0(y; x) = ((2\pi)^m \det V)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(y-y^{\circ}) V^{-1} (y-y^{\circ})\right] \text{ と定まる。}$$

(ii) (3) のようにドリフト αy° とくり出すことで centering condition が満たされる。

(iii) α, r, γ, b および L はすべて C^{∞} 有界関数とする。

出発点の方程式 [A] [B] を, モデル (3), (4) にもとづき $\varepsilon \rightarrow 0$

の極限定理に従って, 縮約した場合の縮約 SDE (Itô 型)

$$d\alpha_\mu(t) = \left[\begin{array}{l} v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j(x(t)) \\ - \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial y_i^0}{\partial x_\nu} \right) (v_\mu + \alpha_{\mu k} \gamma_k^0)(x(t)) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}) \right) (\alpha_{\nu k} V_{jk} + 2L_{\nu j}^{xy})(x(t)) \end{array} \right] dt \\ + dW_\mu^x(x(t), t) + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}(x(t)) dW^y(x(t), t) \quad (5)$$

これに対する Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) \equiv \bar{L} p = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (-I_\mu(x) p) \\ + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\nu} L_{\mu\nu}^{xx} + (\alpha \gamma^{-1})_{\mu j} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha V + 2L^{xy})_{\nu j} \right\} p \quad (6)$$

$$\text{ただし } I_\mu(x) = v_\mu(x) + (\alpha \gamma^{-1} b)_\mu(x) - (\alpha \gamma^{-1})_{\mu j} \left(\frac{\partial y_j^0}{\partial x_\nu} \right) (v_\mu + \alpha_{\mu i} \gamma_i^0)(x) \quad (7)$$

筆者の与えた結果 および 森氏の与えた結果は, それぞれ
モデル I および II にもとづくものであり, いずれも上の結果の
特別な場合, すなわち

$$\text{I. } y_i^0(x) = 0 \quad (\bar{b} = b)$$

$$\text{II. } y_i^0(x) = \gamma_{ij}^{-1}(x) b_j(x) \quad (\bar{b} = 0)$$

の場合に他ならない。

§2. 1次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程の速度縮約の例

連立二元ランジュバン方程式

$$\dot{x} = u \quad (2.1)$$

$$\dot{u} = -\gamma u - \phi'(x) + r(t) \quad \gamma > 0 \quad (2.2)$$

は、ポテンシャル $\phi(x)$ の中を運動する (単位質量) ブラウン粒子 (位置 x , 速度 u) の確率過程のモデルである。 ガウス・白色ノイズ $r(t)$ に対し 通常のことく

$$\langle r(t)r(0) \rangle = 2\gamma kT \delta(t) \quad (2.3)$$

を仮定すると, 二変数 (u, x) に関する分布 $p(t; u, x)$ は次の

Kramers 方程式 に従う。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \underbrace{\gamma \frac{\partial}{\partial u} \left(u + kT \frac{\partial}{\partial u} \right) p}_{L_0 p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (-u p) + \frac{\partial}{\partial u} (\phi'(x) p)}_{L_1 p} \quad (2.4)$$

粒子の力学的ハミルトニアンは $H(u, x) = \frac{u^2}{2} + \phi(x)$ と書かれ, そのボルツマン分布

$$p_e(u, x) \propto e^{-\frac{1}{kT} H(u, x)} = e^{-\frac{u^2}{2kT}} e^{-\frac{1}{kT} \phi(x)} \quad (2.5)$$

が形式的に (2.4) の定常解を与えることが確かめられる。また昔から知られている (2.1) (2.2) からの速度 u の縮約は

$$\dot{x} = -\frac{1}{\gamma} \phi'(x) + \frac{1}{\gamma} r(t) \quad (2.6)$$

およびこれに対する粗視化 (coarse-grained) された分布に対する

Smoluchowski 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\phi'(x) + kT \frac{\partial}{\partial x} \right) p \right] \quad (2.7)$$

に従うことがわかっている。その定常分布 $e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ は明らかに粗視化前の定常分布 (2.5) に対し compatible なものである。以上の事実をふまえて最近 (2.7) の縮約形の高次補正が求められた:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\phi''(x)}{\gamma^2} \right) \left(\phi'(x) + kT \frac{\partial}{\partial x} \right) p \right] \quad [2], [3] \quad (2.8)$$

(これは $1 + \frac{1}{\gamma^2}\phi''(x) > 0$ である限り有意義である)

この補正は、ドリフト $\frac{1}{\gamma}\phi'(x)$ とともに拡散係数 $\frac{kT}{\gamma}$ がともに $(1 + \frac{1}{\gamma^2}\phi''(x))$ 倍される, ということであって, $e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ の定常分布であることがこの補正によって不変に保たれている。

しかしながら以上の結果は, その大前提に 'ポテンシャル' $\phi(x)$ がブラウン粒子に対し束縛性のものであることが必要である (例えば調和振動子: $\phi(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2$)。束縛性でない 'ポテンシャル' のもとでも典型的な例として「一粒子重力場」或いは「一粒子電場」

$$\phi(x) = Fx \quad \text{すなわち} \quad \phi'(x) = F \quad (2.9)$$

があげられよう (その場合, $e^{-\frac{1}{kT}\phi(x)}$ は x の全範囲 $[-\infty, \infty]$ で規格化不能, ということが取り扱えない不適切の唯一の根拠となる)。 (2.9) の

ように $\phi'(x) = \text{定数}(=F)$ の場合の Kramers 方程式の定常分布は

$$p_{st}(u, x) \propto e^{-\frac{1}{2kT} \left(u + \frac{F}{\gamma} \right)^2} \quad (2.10)$$

で与えられることが簡単に確かめられる。以上を結論として

1次元 O-U 過程 (2.1) (2.2) の速度縮約に対する 4 次束因子

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad dx &= \frac{1}{\varepsilon} u dt \\ du &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma u - \frac{1}{\varepsilon} \phi'(x) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} (2\gamma kT)^{1/2} dB(t) \end{aligned}$$

これは $\phi(x)$ が束縛性ポテンシャルの場合適切である。 $\varepsilon \rightarrow 0+$ の

極限過程は

$$dx = -\frac{1}{\gamma} \phi'(x) dt + \left(\frac{2kT}{\gamma} \right)^{1/2} dB(t)$$

で与えられる。さらに $\varepsilon = 0+$ の極限に対する補正は ε のべき展開として書かれることが予想されるが、これは ($\varepsilon = 1$ とし) γ^{-1} のべき展開と一致し ε^n の項は $\gamma^{-(n+1)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の項と一致する。

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad dx &= \frac{1}{\varepsilon} u dt \\ du &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma u - \frac{1}{\varepsilon^2} \phi'(x) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} (2\gamma kT)^{1/2} dB(t) \end{aligned}$$

これは $\phi'(x) = \text{定数}$ の場合にのみ適切である。

§1. の (1) のように、一般には $\dot{u} = -\gamma u + b + r$, $b(x) = \gamma u_0 - \phi'(x)$

すなわち

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\varepsilon} u dt \\ du &= \left[-\frac{\gamma}{\varepsilon^2} (u - u_0) - \frac{1}{\varepsilon} \phi'(x) \right] dt + \frac{1}{\varepsilon} (2\gamma kT)^{1/2} dB(t) \end{aligned}$$

であることが予想される (分解の^{具体例}方程式については省略)。 $O(\varepsilon^2)$ までの縮

約結果

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(-u_0 - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} u_0 \phi'' + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^3} u_0^2 \phi''') p \right] \quad (2.11)$$

となる。

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} \phi'' \right) \left(\phi' + kT \frac{\partial}{\partial x} \right) p \right]$$

§3. ドリフト・ベクトルの分解問題

§1 で必要となった, ベクトル b を $\bar{\varepsilon}^2$ を入れる部分 $\gamma\gamma^0$ と $\bar{\varepsilon}^1$ を入れる部分 \bar{b} とに分解する問題を考察する。これは以下に述べる事実の応用問題である。

proposition Itô 方程式

$$dx_\mu(t) = b_\mu(x(t)) dt + \sigma_{\mu i}(x(t)) dB_i(t) \quad (3.1)$$

に従う n 次元拡散過程を考える。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の有界領域とし

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu i}(x) \sigma_{\nu i}(x) &\equiv 2a_{\mu\nu}(x) & b_\mu(x), a_{\mu\nu}(x) &\in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ a_{\mu\nu}(x) \xi_\mu \xi_\nu &\geq a \xi_\mu \xi_\mu & a > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

とすると Ω 上で拡散過程はエルゴード的, すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf = b_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad Lf=0 \Rightarrow f=1 \times \text{const.}$$

であるが generator L は次のように二部分に一意に分解される:

$$L = L_0 + \bar{L} \quad L_0 f = j_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \quad (3.3)$$

$$\bar{L} f = P^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(P a_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \right) \quad (3.4)$$

ただしベクトル j スカラー P (確率密度) は次の条件を満す

$$(i) \operatorname{div} j \left(= \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \right) = 0$$

$$(ii) P, \frac{\partial P}{\partial x_\mu} \in L^1(\Omega), \inf_{x \in K} P(x) > 0 \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega$$

$$P, \nabla P = 0 \quad x \in \partial\Omega.$$

分解の物理的意義 (3.3)(3.4) と特に $f(x) = x_\mu$ ならば

$$b_\mu(x) = j_\mu(x) + \bar{b}_\mu(x) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div} j (= \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu) = 0, \quad \bar{b}_\mu = \bar{\rho}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho a_{\mu\nu}) \quad (3.6)$$

となる。すなわち Itô 方程式のドリフト項は divergence が 0 となる「流れ」の部分と単一のスカラー関数 $\rho(x)$ の gradient の部分とに分解される。 $\rho(x)$ は (有界) 領域 Ω においてその境界 $\partial\Omega$ 上を除き到る所正值となる確率密度関数の性質をもち、 $j=0$ のときの系の不変測度分布^(定常)に相当する。 j_μ は運動の「純力学的」な部分、 \bar{b}_μ は「散逸的」な部分を表わし、上に指定した境界条件 ($\rho=0, \partial\Omega$) より

$$\langle b_\mu \rangle_\rho = \langle j_\mu \rangle_\rho \quad \text{すなわち} \quad \langle \bar{b}_\mu \rangle_\rho = \int \bar{b}_\mu(x) \rho(x) dx = 0 \quad (3.7)$$

である。(ガウスの公式より $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho a_{\mu\nu}) dx = \int_{\partial\Omega} \rho a_{\mu\nu} dA_\nu = 0$)

SDE [A][B] の縮約問題への適用 (1) 式 すなわち

$$b_i = \gamma_{ij} \dot{y}_j + \bar{b}_i \quad \text{において} \quad (3.6) \text{ に} \text{ 対} \text{し}$$

$$\operatorname{div} \alpha y^\circ (= \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\nu i} y_i^\circ)) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\bar{b}_i = \bar{\rho}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho (\alpha V + z L^{xy})_{\nu i}), \quad \rho=0 \text{ } \partial\Omega \quad (3.8b)$$

を要求して y°, ρ が一義的に定められるならば、それが合理的な分解の仕方である。なぜなら、このときにも (3.7) が成立し、 y° が driving process y の persistent な値を与えることになるから。

そして, (3.8b) を (6) に代入することにより、縮約過程の Fokker-Planck 方程式が

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x_\mu} (-\bar{I}_\mu(x) p) + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} (L_{\mu\nu}^{xx}(x) p) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\mu} [a_{\mu\nu}(x) (p \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\log p - \log P))] \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\bar{I}_\mu(x) = (\delta_{\mu\nu} - (\alpha \bar{y}^{-1})_{\mu j})_{\mu j} \frac{\partial y_j^0}{\partial x_\nu} (v_\nu + \alpha_{\nu i} y_i^0)(x) \quad (3.9a)$$

$$a_{\mu\nu} = \alpha_{\mu i} y_{ij}^{-1} (\alpha_{\nu k} v_{jk} + 2L_{ij}^{xy}) \quad (3.9b)$$

とあって, $\bar{I}_\mu = 0$ ($v + \alpha y^0 = 0$) $L_{\mu\nu}^{xx} = 0$ ($dW_\mu^x = 0$),

すなわち driven 過程固有の運動およびノイズが不在の場合の縮約過程の定常分布が P と一致することになるからである。

以下, 前出の proposition の証明を行う。これは次のように言い換えられる。

proposition' Itô 方程式 (3.1) に従う n 次元拡散過程において, ドリフト・ベクトル b は 条件 (i) (ii) に従うベクトル j およびスカラー p を用い

$$b_\mu = j_\mu + P^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (P a_{\mu\nu}) \quad (3.10)$$

のように一意に分解される。

[証明の方針] $\text{div } j = 0$ の条件は $\log P$ に対する楕円型二階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} (a_{\mu\nu} \frac{\partial \log P}{\partial x_\nu}) = \frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial x_\mu} \quad \tilde{b}_\mu = b_\mu - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad (3.11)$$

によって表わされる。領域 Ω における前提条件 (3.2) より,

その Dirichlet 型境界値問題は一般的には一意解を与えず苦であるが、今の場合 $\partial\Omega$ で $p=0$ は $\log p = -\infty$ と意味するので、この点を疑義なく確立する必要がある。以下の設論は最近の Dirichlet 形式と distorted Brownian motion の理論 (S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn and L. Streit [4], M. Fukushima [5][6]) と Dirichlet 形式の積分原理 (田辺庄城「発展方程式」岩波数学選書) とに基くものである。簡単のための拡散過程の generator が $\Delta + b(x)\nabla$ (ラプラスアン+ドリフト) の場合に限定する (拡散係数 $a_{\mu\nu}$ が一様正值の場合これと本質的に同じ)。

第一段 (Albeverio, Hoegh-Krohn, Streit [4]) $E(u, v) \in C_0^1(\Omega) \times C_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : E(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mu$ (μ : 正 Radon measure on Ω (\mathbb{R}^n の 有界領域 - 安全のため) Lebesgue mea. に由り絶対連続) を 双二次形式 とする (Markovian, local, regular symmetric form [6]).
これが $L^2(\Omega; d\mu)$ 上の closable form であるためには ∇ が $L^2(\Omega; d\mu)$ 上の closable operator であれば十分であり、そのためには $d\mu = p(x)dx$ として ($p(x)$ は μ の分布)

(ii) $\log p \in D(\nabla)$ ($L^2(\Omega; d\mu)$ 上 ∇ の定義域 $\supset C_0^\infty(\Omega)$ dense in $L^2(\Omega)$)
すなわち $\int_{\Omega} (\nabla \log p)^2 p dx < \infty$ 又は

(ii') $p, \nabla p \in L^1(\Omega)$, $\inf_{x \in K} p(x) > 0 \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega$ [5]

ここぞは更に p に因する (境界) 条件として $p|_{\partial\Omega} = 0$ の場合を扱う。これと $\log p \in D(\nabla)$ とを両立させるための

(ii) $\rho, \nabla \rho, (\nabla \rho)(\log \rho)^2|_{\partial \Omega} = 0$

を仮定する。このとき $\mathcal{E}(u, v)$ の smallest closed extension

$\bar{\mathcal{E}}(u, v) : u, v \in D(\bar{\nabla}) = W_2^1(\Omega; d\mu) = H_1(\Omega; d\mu) \left(= \left[\int_{\Omega} ((\nabla \cdot)^2 + (\cdot)^2) \rho dx \right]^{1/2} \right)$
↑ ↓ Hilbert空間

が得られる。よして

$-\mathcal{E}(u, v) = \int_{\Omega} u(Av) \rho dx, \quad Av = \Delta v + (\nabla \log \rho) \nabla v.$

変換 isometry $L^2(\Omega; d\mu) \iff L^2(\Omega; dx)$ [4]

(連続写像)
$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{T_{\rho}} & \psi = \sqrt{\rho} u \\ u = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \psi & \xleftarrow{T_{\rho}^{-1}} & \psi \end{array} \quad \int_{\Omega} u^2 \rho dx = \int_{\Omega} \psi^2 dx$$

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \rho dx = \int_{\Omega} (\nabla \psi \nabla \varphi + \lambda(x) \varphi \psi) dx$$

$$\lambda(x) \equiv \rho^{-1/2} (\Delta \rho^{1/2})(x) \in L^1(\Omega; d\mu)$$

境界の特異性による分類 ($C_0^1(\Omega), C^1(\Omega)$ の $\|\cdot\|_1$ 完備化 $\dot{H}_1, H_1 \subset L$)

$u \rightarrow T_{\rho} u \quad |u|_{\partial \Omega} < \infty \rightarrow |T_{\rho} u|_{\partial \Omega} = 0; T_{\rho} u \in \dot{H}_1(\Omega; dx)$

$\psi \rightarrow T_{\rho}^{-1} \psi \quad |\psi|_{\partial \Omega} > 0 \rightarrow |u| = |T_{\rho}^{-1} \psi|_{\partial \Omega} = \infty; \psi \in H_1(\Omega; dx)$

故に $T_{\rho}^{-1} \dot{H}_1(\Omega; dx) = \{ u \in H_1(\Omega; d\mu) \mid |u|_{\partial \Omega} \leq \infty, T_{\rho} u|_{\partial \Omega} = 0 \}$

$T_{\rho}^{-1} H_1(\Omega; dx) = \{ u \in H_1(\Omega; d\mu) \mid |u|_{\partial \Omega} = \infty, |T_{\rho} u|_{\partial \Omega} \geq 0 \}$

従って $\dot{H}_1(\Omega; d\mu) \equiv T_{\rho}^{-1} \dot{H}_1 \cap T_{\rho}^{-1} H_1 = \{ u \in H_1(\Omega; d\mu) \mid |u|_{\partial \Omega} = \infty, T_{\rho} u|_{\partial \Omega} = 0 \}$

は $H_1(\Omega; d\mu)$ の閉部分空間である。これより次の結論を得る。

変分原理 $\min_{u \in \dot{H}_1(\Omega; d\mu)} \left[\frac{1}{2} \mathcal{E}(u, v) - (b, \nabla u) \right] \quad b \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega}) \subset D(\nabla)$

は $\dot{H}_1(\Omega; d\mu)$ において、境界条件を含まない方程式の一意解

$$\nabla(\rho \nabla u) = \nabla(b \rho) \quad \begin{array}{l} u|_{\partial \Omega} = -\infty \\ \sqrt{\rho} u|_{\partial \Omega} = 0 \end{array}$$

と許容する。 $\inf_{x \in K} p > 0 \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega$ の条件より
 $\forall K \text{ compact } \subset \Omega$ において $u \in W_{\infty}^1$ ($|u|, |\nabla u|$ essentially bounded)
 となる。 $u \in W_2^1 \cap W_{\infty}^1$ 。 これより e^u が p と同じ
 性質の密度関数となり得る (詳細略)。

第三段 分解 (3.5) (3.6) — ただし $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ — となる

$$C^{\infty}(\bar{\Omega}) \ni \phi_{\mu}(x) = j_{\mu}(x) + \bar{\phi}_{\mu}(x)$$

$$\frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad \bar{\phi}_{\mu} = p^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial \log p}{\partial x_{\mu}} \quad \begin{array}{l} p(x) > 0 \quad x \in \Omega \\ = 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{array}$$

各 ϕ_{μ} に対しこの条件を満すベクトル $\bar{\phi}$ とスカラー p があれば

$$\Delta \log p = \nabla \bar{\phi} \quad |\log p| < \infty \text{ in } \Omega, \quad \log p = -\infty \text{ in } \partial\Omega.$$

逆にこれを満す $u = \log p$ があれば上の分解が成立する。従って
 問題は Poisson 型方程式

$$\Delta u = \nabla \bar{\phi} \quad x \in \Omega \quad u = -\infty \quad x \in \partial\Omega \quad (3.12)$$

の解の存在とその一意性の証明に帰着する。以下証明の方針

境界値問題 (3.12) は前段で述べた $\nabla(p \nabla u) = \nabla(\bar{\phi} p)$

$u|_{\partial\Omega} = -\infty$ に於いて形式的に $p = 1$ としたものである。そこで

p は $\inf_{x \in K} p(x) > 0 \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega, \quad p = 0 \text{ on } \partial\Omega$ を満すもので

あつた ($p, \nabla p \in L(\Omega, dx)$ のほか)。これを admissible class (P_{ad}) と示す。

$$\{p_n(x)\} \subset (P_{ad}), \quad \text{各 } p_n \text{ に対し } \nabla(p_n \nabla u) = \nabla(\bar{\phi} p_n) \quad u|_{\partial\Omega} = -\infty$$

の一意解を u_n とする。 $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = 1 \quad x \in \Omega \quad (W_1^1(\Omega, dx))$

ならば $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad (W_2^1(\Omega)) \in W_2^1 \cap W_{\infty}^1$ である。

この極限関数 $u(x)$ は $e^u \in (Pad)$ であり 次の意味で (3.12) の一意解とみる事が出来る:

$$\Delta u = \nabla \rho \quad x \in \forall K \text{ compact } \subset \Omega \quad |u| < \infty \quad \partial K \\ u|_{\partial\Omega} = -\infty.$$

アンダーライン部分の説明

(1) 方程式 $\nabla(\rho \nabla u) (\equiv L_\rho u) = \nabla(\rho p)$ の解の compact $K \subset \Omega$ での性質. $L_\rho u = 0$ は $H_1(K; d\mu)$ で $u=0$, $H_1(\Omega; d\mu)$ で $u = \text{const.}$ が一意解. 後者に対しては $\int_\Omega 1 \cdot \nabla(\rho p) dx = 0$ より, $u = L_\rho^{-1}(\nabla(\rho p))$ は const. を除いて一意に定まり $u|_{\partial\Omega} = -\infty$, $\sqrt{\rho}u|_{\partial\Omega} = 0$, 且 $|u|_{\partial K} (\forall K \subset \Omega) < \infty$. 以下ある compact K を考える. $u(x) = (L_\rho^{-1}(x), v_p)$ ($v_p \equiv \nabla(\rho p)$), すなわち $u = L_\rho^{-1} v_p$ の各点での値を Dirichlet 内積を与える L_ρ^{-1} の表現 $L_\rho^{-1}(x)$ が存在し, x の関数として $\in W_\infty^1(K)$.

(2) $P_n \in (Pad)$, $P_n \rightarrow 1$ (強, $W_1^1(\Omega)$ ノルムで) とするときは, $L_{P_n}^{-1}$ は K で一様有界 ($\|L_{P_n}^{-1}\| < M$). また $v_{P_n} \rightarrow \nabla \rho$ (強, $W_1^1(K)$ ノルムで). このことから $u_n = L_{P_n}^{-1} v_{P_n}$ の弱収束 ($W_2^1(K)$ の) が示される.
以上.

文献

- [1] G. C. Papanicolaou, D. Stroock and S. R. S. Varadhan, Duke Univ. Press L(1977).
- [2] U. M. Titulaev, Physica 91A(1978) 221; 100A(1980), 251.
- [3] M. San Miguel and J. M. Sancho, J. Stat. Phys. 22(1980), 605.
- [4] S. Alberverio, R. Hoegh-Krohn and L. Streit, J. M. Phys. 18(1977), 907.
- [5] M. Fukushima, 「量子ゲージ理論における解析的方法」(1981) 岩波
- [6] 福島正俊 「ディリクレ形式とマルコフ過程」 紀伊國屋 (1975)