

固有関数展開による断熱消去

東大理 金子邦彦

§ 1. 序

非平衡開放系の現象を確率過程を用いて議論する際に、速い変数を消去して遅い変数に対する方程式を求めることが必要になる場合が多い。^{1)~3)}最近、この問題はレーザーや光双安定性、液晶の電気対流等の非平衡相転移、また乗法的確率過程とその際にみられる一種の転移現象と関連して興味をもたれている。この研究会においても森先生・長谷川先生の講演があったが、ここでは固有関数展開の方法を用いた系統的断熱消去法について述べる。簡単のために、話を1変数の場合に限るが、方法は多変数の場合にも適用できる。§ 2, § 3 で一般論を述べ、簡単な応用としてラマン散乱の問題を § 4 で扱う。ここで述べた方法は Stratonovich による Ornstein - Uhlenbeck 過程からの運動量の消去に用いられたのが始りであるが、⁴⁾その他、非白色雑音の問題にも使うことができる。

これについて §5 で述べる。

§2. 固有関数展開による断熱消去法の定式化

次の Langevin 方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi_x(t) \\ \dot{y} = -\gamma a(x, y) + \sqrt{\gamma} \xi_y(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi_x(t) \xi_x(t') \rangle &= Q_x \delta(t-t'), \quad \langle \xi_x(t) \xi_y(t') \rangle = Q_{xy} \delta(t-t') \\ \langle \xi_y(t) \xi_y(t') \rangle &= Q_y \delta(t-t') \quad ; \quad \xi \text{ は ガウス雑音} \end{aligned}$$

ここで、 ξ_y の前の係数 $\sqrt{\gamma}$ は、 x をとめたときの y の定常分布が γ によらないという要請から置かれたものである。 ξ_x の前の係数 $1/\sqrt{\gamma}$ は応用上、あらわれる場合が多いので置いただけであり、必ずしも必要ではない。 γ が大きいとして、 y は x に比べ速く動くとする。以下では $1/\gamma$ を展開パラメタとして、速い変数 y を消去していく。まず、(2.1) に等価な Fokker-Planck 方程式

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) = \left\{ -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{Q_x}{2\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{Q_{xy}}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} a + \frac{Q_y}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} P(x, y, t) \quad (2.2)$$

を考え、 $P(x, y, t)$ を、 x をとめた時の y についての Fokker-Planck 方程式

$$\left\{ \frac{Q_y}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \right\} \pi_n(y; x) = -\lambda^n(x) \pi_n(y; x) \quad (2.3)$$

の固有関数系 $\{\pi_n(y; x)\}$ を用いて

$$P(x, y; t) = \sum_n P_n(x, t) \tilde{\pi}_n(y; x) \quad (2.4)$$

のように展開する。(2.3)のFokker-Planck方程式はエルミート化することによって

$$\left[-\frac{Q_y^2}{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{Q_y}{2} \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right] \varphi_n(y; x) = Q_y \lambda_n(x) \varphi_n(y; x); \quad (2.5)$$

$$\tilde{\pi}_n(y; x) = \varphi_n(y; x) \varphi_0(y; x)$$

のSchrödinger方程式に帰着される。 $\{\varphi_n\}$ の正規直交性より

$$\int P(x, y, t) dy = \sum_n \int P_n \tilde{\pi}_n dy = P_0(x)$$

が示されるから, $P_0(x)$ を求めることにより, x 空間への射影は実行される。 $P_0(x)$ のみたす方程式は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle f \varphi_0^2 \rangle - \frac{Q_x}{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P_0(x, t) = - \sum_{k \neq 0} \frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi_k f \varphi_0 \rangle P_k(x, t) \quad (2.6)$$

$$\text{ここで } \langle \dots \rangle = \int \dots dy$$

で与えられる。 P_k から P_0 への寄与は $O(\gamma^{-1})$ で求めることにより, $P_0(x, t)$ についての閉じた方程式が得られる。結果は

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle f \varphi_0^2 \rangle - \frac{Q_x}{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P_0(x, t) \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{k \neq 0} \frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi_k f \varphi_0 \rangle \frac{1}{\lambda_k(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi_k f \varphi_0 \rangle + \langle f \varphi_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - 2Q_{xy} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi_k \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \rangle - \langle \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right) \right) \right\} \right] P_0(x, t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

上で見るように $O(\gamma^{-1})$ では, $P(x, t)$ のみたす方程式はFokker-Planck型である。高次まで求めると, 一般には $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$ 等の項があらわれる。式(2.7)が断熱消去の公式である。ドリフト項は $O(\gamma^0)$

から、拡散項は $O(\delta^{-1})$ から始まる。

特に $Q_x, Q_{xy}, Q_y \rightarrow 0$ の場合には、 $a(x, y) = 0$ の解を $y_0(x)$ とすると、 $Q_y^2(y; x) \rightarrow \delta(y - y_0(x))$ であるから、決定論的方程式での断熱消去による結果 $\dot{x} = f(x, y_0(x))$ を再現できる。また、 Q_y が小さい場合には、 $y_0(x)$ のまわりのゆらぎは小さいから、 $a(x, y)$ を

$$a(x, y) = \frac{\partial a}{\partial y} \Big|_{y=y_0(x)} (y - y_0) + \dots \approx c(x)(y - y_0(x))$$

と展開して、 $a(x, y)$ が y について線型な場合を考えればよい。これについて次の § で扱う。

§3. y について線型の場合への応用

まず、方程式 (2.1) が y について 1 次の項までで書ける時、

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)y + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi_x(t) \\ \dot{y} = -\gamma c(x)(y - d(x)) + \sqrt{\gamma} \xi_y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

を考える。固有関数 φ_n はエルミート関数を用いて、

$$\varphi_n(y; x) = \left(\frac{c(x)}{\pi Q_y} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{c(x)}{2Q_y} (y - d(x))^2} H_n \left(\sqrt{\frac{c(x)}{Q_y}} (y - d(x)) \right) \quad (3.2)$$

で与えられ、(2.7) にあらわれる $\langle \dots \rangle$ を容易に計算できる。

結果は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{Q_x}{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) P(x, t) &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g f d' + g^2 d d'}{c} \right) P(x, t) \\ &+ \frac{Q_x}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{c} \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{c} P(x, t) + \frac{Q_{xy}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{c} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

で与えられ, Morita, Mori, Mashiyama の結果²⁾を再現する。

一般に, \dot{x} のみたす式が

$$\dot{x} = F(x, y) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \zeta_x(t) = \sum_{k \geq 0} g_k(x) y^k + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \zeta_x(t) \quad (3.4)$$

(y の式はそのまま)

の場合にも同じ固有関数により, (2.7) を計算できる。ドリフト, 拡散項の最低次はそれぞれ,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \sum g_n(x) \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l: \text{even}}}^n \binom{n}{l} \left(\frac{Q_y}{2C}\right)^{\frac{l}{2}} \alpha^{n-l} l!! P(x, t),$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{Q_x}{2} + \sum_n g_n \sum_{\substack{l \geq k \\ k \neq 0 \\ (l-k): \text{even}}}^n \binom{n}{l} \left(\frac{Q_y}{2C}\right)^l \frac{(l-k)!!}{\sqrt{k \cdot k! C(\alpha)^k}} \right]^2$$

$$+ Q_{xy} \sum_n g_n \sum_{\substack{l \geq 1 \\ l: \text{odd}}}^n \binom{n}{l} \left(\frac{Q_y}{2C}\right)^{\frac{l-1}{2}} \alpha^{n-l} \frac{l \cdot l!!}{2C} \Big] P(x, t) \quad (3.5)$$

で与えられる。特に, Q_y の最低次まで考えると, (3.5) は

$$\dot{x} = \sum g_n(x) \alpha^n + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \zeta_x(t) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\sum_n n g_n(x) \alpha^{n-1}}{C(\alpha)} \zeta_y(t) \quad (3.6)$$

の Langevin 方程式と等価になる。この結果は便宜的に使われている方法 ($\dot{y}=0$ を解いて, y を x であらわす) の拡張としても理解される。つまり, $\dot{y}=0$ を解き, $y(x, \zeta_y)$ とあらわして, それを $F(x, y)$ に代入した結果を ζ_y について展開して ζ_y^0 と ζ_y^1 の項までとることにより, (3.6) が得られる。但し, これは, あくまでも便宜的手法であって, 雑音 ζ_y を含む式で $=0$ と置くことに正当性はない。

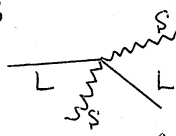
y について線型の場合の他の例として

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)y + \xi_x(t) \\ \dot{y} = -\gamma c(x)y + a(x) + \sqrt{\gamma} \xi_y(t) \end{cases} ; Q_{xy} = 0 \quad (3.7)$$

の場合は, $P(x) \in P(x) = \sum \sqrt{c(x)} Y_n(\sqrt{c(x)}y) P_n(x,t)$ のように展開することにより, $P(x,t)$ のみたす式を求めることができる。

この時は Q_y^2/γ^2 の項を無視すると, $O(1/\gamma^2)$ まで Fokker-Planck 型になっている。これを用いて, 簡単な化学反応系のモデルを議論することもできる。⁹⁾ また, (3.7) で $f=0$, $g=c=1$, $\xi_x \equiv 0$ とすると, 問題は Ornstein-Uhlenbeck 過程からの運動量の消去に帰着される。この場合は, $O(1/\gamma^2)$ の補正は 0 で, $O(1/\gamma^3)$ まで Fokker-Planck 型である。

§4. 光学系への応用 — ラマニ散乱 —

ここでは §3 の簡単な応用として ラマニ散乱を考える。外からレーザー光を入射し, 4-wave mixing による ラマニ散乱が起るとする。¹⁾ レーザー光, スト

 ークス・シフトを受けた光の複素振幅をそれぞれ, A_L , \tilde{A}_S とすると, そのみたす Langevin 方程式は現象論的に

$$\begin{cases} \dot{\tilde{A}}_S^+ = -\gamma_S \tilde{A}_S^+ + \kappa |A_L|^2 \tilde{A}_S^+ + \xi_S^+ \\ \dot{A}_L^+ = -\gamma_L A_L^+ - \kappa |\tilde{A}_S|^2 A_L^+ + \tilde{P}^+ + \sqrt{\gamma_L} \xi_L^+ \end{cases} \quad (4.1)$$

とかける。¹⁾ ここで、 \tilde{P} はレーザー光のポンピングを表わし、 γ_L, γ_S は減衰係数である。 ξ_S, ξ_L はガウス白色雑音で、その相関を Q_S, Q_{SL}, Q_L であらわす。今、 γ_L が大きいとして、 A_L を ξ_S に従って消去する。この際、 \dot{A}_L に対する決定論的方程式の解が γ_L によらないように、 $A_S \equiv \tilde{A}_S/\sqrt{\gamma_L}$, $P \equiv \tilde{P}/\gamma_L$ のスケール変換をおこなう。更に位相の効果を見捨て、 A_S, A_L を実数として扱ると、次の方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{A}_S = -\gamma_S A_S + \kappa A_L^2 A_S + \frac{1}{\sqrt{\gamma_L}} \xi_S \\ \dot{A}_L = -\gamma_L \left\{ (1 + \kappa A_S^2) A_L - P \right\} + \sqrt{\gamma_L} \xi_L \end{cases} \quad (4.2)$$

この式から、公式(3.5)に従って、 A_S のみに対する Fokker-Planck 方程式を求め、定常分布 $P_{st}(A_S)$ は

$$P_{st}(A_S) \propto \exp \left[\gamma_L \int_0^{A_S} dx \frac{x \left\{ -\gamma_S + \kappa \left(\frac{P}{(1+x^2\kappa)^2} + \frac{Q_L}{2(1+\kappa x^2)} \right) \right\}}{\frac{Q_S}{2} + \frac{2P^2\kappa^2 Q_L x^2}{(1+\kappa x^2)^4} + \frac{\pm Q_L^2 \kappa^2 x^2 + 2Q_{SL} P \kappa x}{(1+\kappa x^2)}} \right] \quad (4.3)$$

で与えられる。定常分布の最頻値が $A_S = 0$ でなくなる時のポンピングの値が発振の閾値である。その値 P_{thr} は

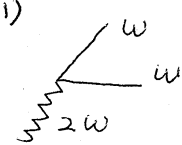
$$P_{thr} = \left(\frac{\gamma_S}{\kappa} - \frac{Q_L}{2} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

で与えられる。レーザー光のゆらぎにまじり、閾値が下がることが特徴である。外からポンピングをゆらかせて、 Q_L を大きくすれば、この効果は観測されると思われる。P が P_{thr} に近い時には、式(4.3)は

$$P_{st} \sim \exp \left\{ \frac{\delta_L \kappa}{Q_s} \left(P^2 + \frac{Q_L}{2} - \gamma_s \right) A_s^2 - \frac{\delta_L}{4Q_s} \left(2P^2 + \frac{Q_L}{2} \right) \kappa^3 A_s^4 \right\} \quad (4.5)$$

のように近似され、よく知られた double well potential での定常分布に帰着される。

この他、同様な応用は 3-wave mixing process ¹⁾ 等についても可能である。



§5. 非白色雑音の問題への応用

白色雑音は雑音の記憶時間を 0 にした理想化であり、現実の雑音は有限の記憶時間をもっている。非白色雑音については、最近 ^{6), 7)} と研究され、2 準位雑音については厳密な結果が北原氏らによって出されている。⁸⁾ ガウス雑音の場合は今のところ、何らかの展開を用いた議論しかできない。ここでは、次の非白色雑音の問題を

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \eta(t) \\ \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{Q\gamma}{2} e^{-\gamma|t-t'|} \end{cases} ; \text{ Gaussian} \quad (5.1)$$

等価な白色雑音の問題

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \eta(t), & \dot{\eta} = -\gamma \eta + \gamma \zeta(t) \\ \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \frac{Q}{2} \delta(t-t'); \text{ Gaussian} \end{cases} \quad (5.2)$$

に置き換え、速い変数 η の消去という問題に帰着させる。こうすると、§2 の方法を用いて、 $P(x, t)$ に対する方程式を求

めることができる。 γ^1 の展開の無限次までとった結果は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f\right)P = \gamma \frac{g_0}{\gamma_1 - g_1} \frac{1}{\gamma_2 - g_2} \frac{1}{\gamma_1} g_0 P(x,t) \quad (5.3)$$

$$\gamma_n = n + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f\right)$$

$$g_n = \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} g$$

で与えられる。

特に、 $O(\gamma^{-1})$ で連分数を切断すると

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\partial}{\partial x} f(x)P + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(g - \frac{1}{\gamma} (g'f - f'g)\right) P(x,t) \quad (5.4)$$

の形になる。これは、Sancho, San Miguelの結果⁶⁾の簡単な導出を与えている。

高次までの計算は一般に困難であるが、定常分布については

$$P_{st} = P^0 \left(1 + \frac{1}{\gamma} p_1 + \frac{1}{\gamma^2} p_2 + \dots\right) \quad (5.5)$$

の形に展開して、逐次 p_1, p_2, \dots を求めていくことができる。こうして、L-カーブモデル ($\dot{x} = \alpha x - \gamma x^3 + \eta(t)$) 等での閾値の変化を議論することも可能である。

§6. 終わりに

以上、簡単に説明したが、詳しくは参考文献9)を参照され

たい。最後に、この研究を進めよとの鈴木先生からの貴重な助言や激励、また、久保先生、森先生、長谷川先生からの重要なコメントに心から感謝致します。

参考文献

- 1) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev. 20A (1979) 1628
- 2) T. Morita, H. Mori, and K. T. Mashiyama, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 500 ; 森肇 講究録 405 (1980) 12
- 3) H. Hasegawa, M. Mabuchi, and T. Baba, Phys. Lett. 79A (1980) 273 ; 長谷川洋 講究録 405 (1980) 17 及び 今回の講演
- 4) R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise (Gordon and Breach, N.Y. 1963) Vol. 1
- 5) H. Haken Synergetics (Springer-Verlag, 1977)
- 6) J. M. Sancho and M. San Miguel, Z. Phys. B36 (1980) 357
- 7) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. Supplement (1981)
- 8) K. Kitahara, W. Horsthemke, and R. Lefever, Phys. Lett. 70A (1979) 337 ; 北原和夫, 稲葉豊 講究録 367 (1979) 153
- 9) K. Kaneko, submitted to Prog. Theor. Phys. and Master Thesis (1981) Chapt. 4 (University of Tokyo)