

乱流における散逸構造

名大 工学部 桑原 真二

§ 1. まえおき

散逸とは一般に大きい運動の形式から小さい運動の形式へ、最終的には熱運動へエネルギーの移行する現象である。散逸関数(単位体積あたりの散逸)は $\frac{1}{2}(\text{応力} \times \text{変形速度})$ であり、したがって粘性率に比例する。そこで乱流においては渦粘性に比例すると考えられる。

乱流すり流(turbulent shear flow)の中で、みぞの間の Poiseuille 乱流(plane Poiseuille turbulence) = P.P.T.) は種々の乱流機構と包含する、しかも最も単純な流れである。P.P.T. では両壁附近の境界層でつくられた大きい渦が中央部の core flow に放出される。境界層においては強い速度勾配のため、大きい散逸をもたう。core flow においては、放出された渦はもっと小さい渦に遷移し、最後は粘性により消滅する。後者の core flow における散逸過程は乱流特有のものであり、層流にくらべて乱流で散逸が顕著になる原因である。

境界層では壁に接した粘性層から順次に緩和層(buffer layer), 対数層があり、その外に core flow が存在する。

対象層では渦粘性率が壁からの距離に比例し、途中遷移の領域をすぎると、core flow では渦粘性率一定とみなされる。

core flow ではゆるい平均流の変化はあるが、乱れは一樣、等方的とみなしうる。

粘性には速度の不揃一性を平等化する作用があり、たとえば不揃一な平行な速度場では、不揃一性の方向に垂直で、速度に平行な平面を通しての運動量のやりとりにより、平等化の機構が説明できる。分子粘性では分子毎々の運動量が、乱流ではもっと大きい規模の“小さい渦”の運動量がその役割をはたす。そこで小さい渦のふるまいが渦粘性の特性を決定すると考えることが出来る。

§2. 渦粘性の乱流スケール理論

前節にのべたように、core flow では渦粘性率はほぼ一定であり、それは小さい渦のふるまいでその特性が決定されると考えられる。core flow は空間的にも、時間的にもゆくり変動する平均流 (乱流マクロ, T-macro) と乱れ (乱流ミクロ, T-micro) が共存し、お互に相互作用をおこなっている。乱れは一樣、等方的とみなしてよく、したがって乱れの場を Fourier 変換によって表わすことが出来る。乱れのエネルギーは不揃一な平均流からも供給されるが、境界

層からの渦の放出による伝給が主であると考之うるので、境界層の厚さ δ に対応する波数 $k_0 (\approx \delta^{-1})$ の附近にエネルギー・スペクトル W の極大値があると考之うれる。波数空間に T -macro の対応 k_M を求めれば $k_M \ll k_0$ である。 k_M と k_0 の間に k_1 ($k_M \ll k_1 < k_0$) をとり、これを T -micro と T -macro の境界と考之う。これからは $k > k_1$ を小さい渦 $k < k_1$ を大きい渦と区別して用いる。

Fourier変換された Navier-Stokes (N.-S.) 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_\alpha(k, t) = -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int u_\beta(k', t) u_\gamma(k - k', t) d^3k' \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(k) &= \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \\ u_\alpha(k, t) &= \int v_\alpha(x, t) e^{-i k \cdot x} d^3x \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

である。ここで $v_\alpha(x, t)$ は乱れの流速、 $u_\alpha(k, t)$ はその Fourier 変換である。(2.1) の右辺を input, 左辺の $\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}$ を output と考之れば、右辺の“二重同時刻非線形相互作用”は

$$\left. \begin{array}{l} \text{input} \\ k', t \\ k - k', t \end{array} \right\} \longrightarrow k, t \quad (2.3)$$

の形をしている。

もし大きい渦 ($|k| \ll k_1$) のみで

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_T \nabla^2\right) u_\alpha(\mathbf{r}, t) = \text{非線形相互作用} \quad (2.4)$$

の形で表わされるならば、 ν_T は“渦動粘性率”と考へることが出来る。 (2.1) の右辺を非齊次項とみること形式的变化を許すと

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = -i \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^t u_\beta(\mathbf{r}', t') e^{-\nu_T |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 (t-t')} d^3\mathbf{r}' dt' \quad (2.5)$$

と存する。そこで (2.5) の右辺を非線形相互作用

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{r}', t' \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}', t' \end{matrix} \right\} \xrightarrow{t' = -\infty \sim t} \mathbf{r}, t \quad (2.6)$$

の形と存する。 (2.1) の $u_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ の所に (2.5) の表式を入れば

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{r}'', t' \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}'', t' \end{matrix} \right\} \xrightarrow{-\infty \sim t} \left. \begin{matrix} \mathbf{r}, t \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}', t \end{matrix} \right\} \longrightarrow \mathbf{r}, t$$

しなかつて

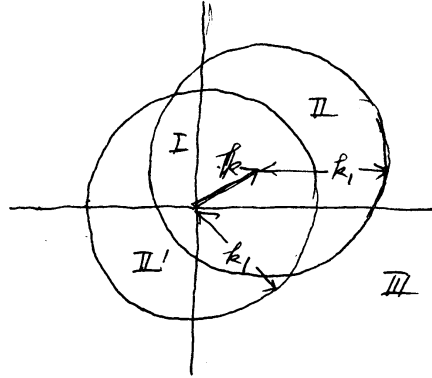
$$\left. \begin{matrix} \text{input} \\ \mathbf{r}', t \\ \mathbf{r}'', t' \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}'', t' \end{matrix} \right\} \xrightarrow{-\infty \sim t} \left. \begin{matrix} \text{output} \\ \mathbf{r}, t \end{matrix} \right\} \quad (2.7)$$

の形にまとめる。これを3変数時刻非線形相互作用と考へることが出来る。

(2.1) における k' の種命を空間 k における k' の種命と

k の中心と k' の半径 k_1 の 2 球

により k -空間を I, II, II', III に分割する (Fig. 1)。 k' は I, II' にありときは T-macro, II, III にありときは T-micro, $k-k'$ は I, II にありときは



T-macro, II', III にありときは Fig. 1. k -空間の分割

T-micro に属する $k-k'$ とはなる。この分割により

$$\left. \begin{aligned}
 k' \text{ in I} &\iff k-k' \text{ in I} \\
 k' \text{ in II} &\iff k-k' \text{ in II'} \\
 k' \text{ in II'} &\iff k-k' \text{ in II} \\
 k' \text{ in III} &\iff k-k' \text{ in III}
 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

の関係がある。 $k', k-k'$ が II または II' にありときは T-micro に属する方を、 III にありときはこの一方 k と k' の (2.5) の表式を代入すると

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\beta \left[\int_I u_\beta(k', t) \right. \\
 & u_\gamma(k-k', t) d^3 k' - i \int_{-\infty}^t \int_{II+III} \int \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu u_\lambda(k'', t') \\
 & u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \\
 & \left. - i \int_{-\infty}^t \int_{II'} \int \Delta_{\alpha\lambda}(k-k') (k_\mu - k'_\mu) u_\beta(k', t) u_\lambda(k'', t') \right. \\
 & \left. u_\mu(k-k'-k'', t') e^{-\nu(k-k')^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \right] (2.9)
 \end{aligned}$$

をうす。

以下の理論の展開のために次の基本的仮定を導入する:

- 1) T-macro と T-micro の分離は明確にして、対応する特性時間 t_{mac} , t_{mic} の間には

$$t_{mac} \gg t_{mic} \quad (2.10)$$

の階位がある。

- 2) T-macro は一様, T-micro は一様, 等方的である。

- 3) $t_{mac} \gg t_{mean} \gg t_{mic}$ (2.11)

を満足する時間 t_{mean} の間での平均として $\langle \rangle$ を定義する。

以上の仮定から導かれる 2, 3 の基本的結果をのべる。

それぞれ T-macro, T-micro に関連した量 Q, φ の種の平均を

$$\langle Q \varphi \rangle \cong Q(t) \langle \varphi \rangle \quad (2.12)$$

のように近似する。さらに 2) の T-micro の一様, 等方性から 相空間の 2 点 2 時刻速度相関に対して

$$\langle u_\alpha(\mathbf{r}, t) u_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle = \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t, t') \delta^3(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \quad (2.13)$$

が成り立つ。また $Q(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t)$ とおく(種分は 1) の仮定から次のように近似する:

$$\int_{-\infty}^t Q(\mathbf{r}, t') \varphi(\mathbf{r}', t') dt' \cong Q(\mathbf{r}, t) \int_{-\infty}^t \varphi(\mathbf{r}', t') dt' \quad (2.14)$$

さて $|k| \ll k_1$ を考慮し, (2.12) の近似をもちいすと

(2.9) は

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v k^2\right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{\text{I}} u_\beta(k', t) u_\gamma(k-k', t) \\
 & d^3k' - \int_{-\infty}^t \int_{\text{II}} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k') k_\gamma k'_\mu \langle u_\lambda(k', t') u_\mu(k' \\
 & - k'', t') \rangle u_\alpha(k-k', t) e^{-v k'^2(t-t')} d^3k'' d^3k' dt' \\
 & - \int_{-\infty}^t \int_{\text{II}'} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k-k') k_\gamma (k_\mu - k'_\mu) u_\beta(k', t) \\
 & \langle u_\lambda(k'', t') u_\mu(k-k'-k'', t') \rangle e^{-v(k-k')^2(t-t')} \\
 & d^3k'' d^3k' dt' - \int_{-\infty}^t \int_{\text{III}} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k') k_\gamma k'_\mu \\
 & \langle u_\lambda(k'', t') u_\mu(k'-k'', t') u_\alpha(k-k', t) \rangle e^{-v k'^2(t-t')} \\
 & d^3k'' d^3k' dt' \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

と存す。

(2.15) の k'' の積分にあたって, 前と同様に k -空間の分割を行うが, 2の球あひらは k' の II と III あるいは II' に属するからといって Fig. 2 のように分割は存す。更に近似 (2.12) 及び 同様, 等列性 (2.13) をもちいすと (2.15) は

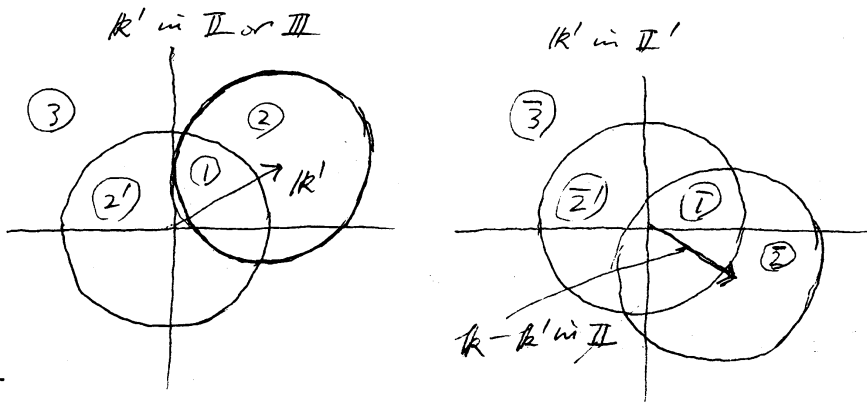


Fig. 2

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_T k^2\right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{\mathbb{I}} u_\beta(k', t) u_\gamma(k-k', t) \\
& + \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}} \int_{\textcircled{1}} \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \\
& - \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}'} \int_{\textcircled{7}} \Delta_{\gamma\lambda}(k') k'_\mu u_\beta(k', t) u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k-k'-k'', t') e^{-\nu(k-k')^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \\
& - \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}} \int_{\textcircled{3}} \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu \langle u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) \rangle e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt'
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\nu_T = \nu \left(1 + \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^4 \Phi(k', t, t') (t-t') e^{-\nu k'^2(t-t')} \right. \\
\left. dk' dt' + \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^2 \Phi(k', t, t') e^{-\nu k'^2(t-t')} dk' dt' \right. \\
\left. - \frac{2\pi}{15} k_1^3 \int_{-\infty}^t \Phi(k_1, t, t') e^{-\nu k_1^2(t-t')} dt' + O(k/k_1) \right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

とある。\$\nu_T\$ は渦動粘性率とよばれるべきもので、その主要項は第2項である。すなわち \$\nu \approx 0\$ なら \$\Phi(k_1, t, t') \approx 0\$ と考えれば

$$\nu_T = \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^2 \Phi(k', t, t') dk' dt' \tag{2.18}$$

とある。

§3. 外力のある Burgers 方程式の解析

§2での心なすに、core flow の乱れは境界層からの渦の放出とその渦が小形化して最終に熱運動による散逸過程

とみえることが出来ます。境界層の厚さの程度の渦が放出されると考えられるから、 k -空間において δ^+ 程度の波数領域にエネルギー・スペクトルの最大値があり、そのエネルギー - k のグラフの傾きがあると考えることが出来ます。偶然力のあり Fourier 変換された $N-S$ 方程式を数値的に解くことにより $\bar{u}(k, t, t')$ をおおよそ計算する事が可能であろう。しかし、偶然力の性質、Reynolds 数をいかに取るかという事は、境界層からの渦の放出機構、渦の放出と core flow における散逸との平衡機構等をしらなければ解決しない問題である。

そこでこのでは手始めとして、外力のあり Burgers 方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} u(k, t) = -\frac{1}{R} k^2 u(k, t) - ik \int_{-\infty}^{\infty} u(k', t) u(k-k', t) dk' + f(k, t) \quad (3.1)$$

の初期値問題を考えよう。 $k = \Delta k l$ ($l = -L, \dots, L$) のメッシュをとり

$$\frac{du_l}{dt} = -\frac{1}{R} (\Delta k)^2 l^2 u_l - i(\Delta k)^2 l \sum_{l'=-L}^{L} u_{l'} u_{l-l'} + f_l(t) \quad (3.2)$$

を基礎方程式とする。このでは $\Delta k = 0.2$ ととり、偶然力は $k = 0.6, 0.8, 1.0$ ($l = 3, 4, 5$) でのみ与えられ ($u_{-l} = f(-k) = f(k)^*$)

$$\left. \begin{aligned} \langle f_3^2 \rangle &= \langle f_4^2 \rangle = \langle f_5^2 \rangle = \frac{1}{3} \\ \langle f_3 f_4 \rangle &= \langle f_4 f_5 \rangle = \langle f_5 f_3 \rangle = 0 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

その確率分布は正規分布である

$$P[f_l] = \frac{3}{\pi} e^{-f_l^* f_l} \quad l = 3, 4, 5 \quad (3.4)$$

とあり。又偶熱力はその値を時間 0.6, 0.8, 1 にだけ保持するとし、その分布は

$$P(\tau=0.6) = P(\tau=0.8) = P(\tau=1) = \frac{1}{3} \quad (3.5)$$

とあり。この計算でもちろん偶熱力の時間ごとの変化は Fig. 4(a) に示してあり。

R (Reynolds 数) = 20, $\Delta k = 0.2$, Δt (時間区隔) = 0.02, L (この場合 Fourier 成分の数) = 20 の場合の Fourier 成分の消長が、実数値を横軸、虚数値を縦軸と取り相図として Fig. 3 に、実数値、虚数値そのものの時間的发展を Fig. 4(b) に示した。

エネルギー分布 $DE_l(t)$, 散逸分布 $DD_l(t)$, エネルギー伝達分布 $DETe_l(t)$ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} DE_l(t) &= \frac{1}{2} (u_l(t) u_l(t)^* + u_{-l}(t) u_{-l}(t)^*) \\ &= u_l(t) u_l(t)^* \\ DD_l(t) &= \frac{2}{R} (\Delta k)^2 l^2 EDE_l(t) \\ DETe_l(t) &= 2 (\Delta k)^2 l \sum_{l'=-L}^L \{ u_l^* u_{l'} u_{l-l'} - u_l u_{l'}^* u_{l-l'}^* \} \end{aligned} \right\} (3.6)$$

また、(時間)平均工率 ω 分布 $ME_L(t)$ 、平均散逸分布 $MD_L(t)$ 、平均工率 ω 分布位達分布 $MET_L(t)$ を

$$\left. \begin{aligned} ME_L(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t ED_L(t') dt' \\ MD_L(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t DD_L(t') dt' \\ MET_L(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t DET_L(t') dt' \end{aligned} \right\} (3.7)$$

とする。Fig. 5 に $t=10, t=50, t=100$ におけるこれらの分布が示してある。

工率 ω 分布供給率及び平均工率 ω 分布供給率を

$$\left. \begin{aligned} RES(t) &= f_3(t)u_3(t)^* + f_4(t)u_4(t)^* + f_5(t)u_5(t)^* \\ &\quad + c.c. \\ MRES(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t RES(t') dt' \end{aligned} \right\} (3.8)$$

と定義する。Fig. 4(c) に $RES(t)$ 、 $MRES(t)$ が示してある。これからすると $MRES(t)$ は $t=2$ 位で殆ど一定値になりよじを思われる。

§4. 考察

§2 において、乱流入り流の core flow における渦粘性率を波数空間における速度 (速度の Fourier 成分) の 2 重 2 時刻の相関によって表わすことを示した。この理論においては、大きい渦 (T -macro) の小さい渦に対する小さい渦 (T -micro) の効果を粘性効果と同様な形で取り扱うことがで

また。 ν_T の主要項 (2.18) は (2.15) の右辺の最後の項 (積分変数 k' は T -micro に属する) で k'' と $k'-k''$ の一方が T -micro, 一方が T -macro に属する時に生じ, その場合は, k'' , $k'-k''$, $k-k'$ の 3 重相関は ($k-k'$ は必ず T -micro に属するから) k'' と $k-k'$ よりは $k'-k''$ と $k-k'$ の 2 重相関と T -macro の速度との積に移行する。2 重相関は (2.13) に於て選択的効果をもっており, 結局 u ずれの u が u にとも

$$\left. \begin{array}{l} k', t \\ k, t' \\ -k', t' \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\infty \sim t \\ \rightsquigarrow \\ \end{array} k, t \quad (4.1)$$

のようなる長 2 時刻非線形作用の形となる。 (4.1) の左辺で k は T -macro に属し, (2.10) の仮定をもち u を $u(t) = u$ と考えれば時間積分の外に u を $u(k, t)$ の形をとり, 結局 (2.4) の形が与えられる。すなわち非線形項の中から渦粘性項をくりこむことが出来ることとなる。

この理論では, $\bar{u}(k, t, t')$ がわかれば渦粘性が求められる。そこで, $\bar{u}(k, t, t')$ を理論的に求める問題が与えられる。そのためには, 境界からの渦の放出の機構を知らねばそれを波数空間における偶然力の効果として近似して, 偶然力のある Fourier 変換された $N-S$ 方程式の解析を必要とする。

この論文ではその手はじめとして粘性力のあり Burgers 方程式の初期値問題を解析し、各 Fourier 成分のみならず、エネルギー分布、散逸分布、エネルギー伝達分布等を探る。

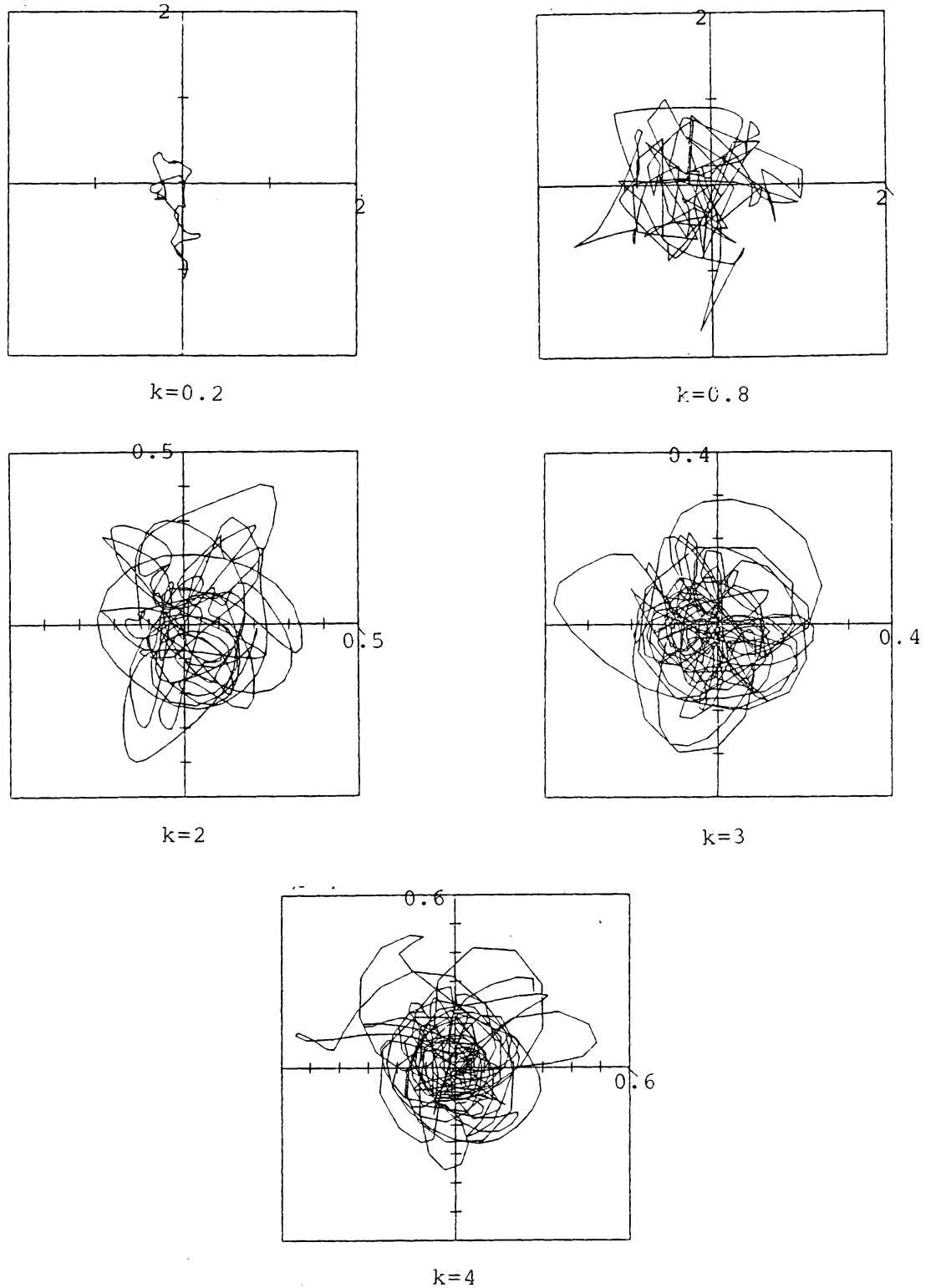


Fig.3. Time evolutions of the Fourier components of the velocity in the phase diagram $(\text{Re}u(k), \text{Im}u(k))$, for $R(:\text{Reynolds no.})=20$, $\Delta k(:\text{wave no. mesh length})=0.2$, $\Delta t(:\text{time increment})=0.02$ and $L(:\text{no. of retained Fourier components})=20$.

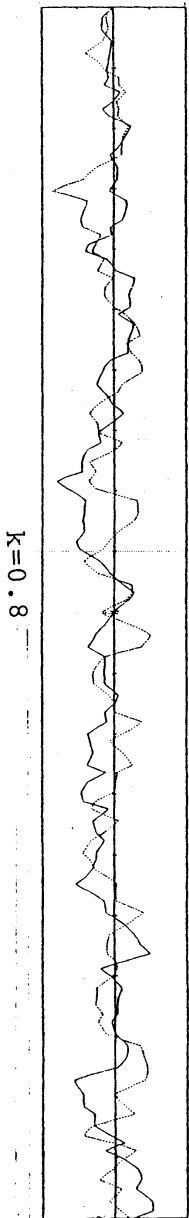
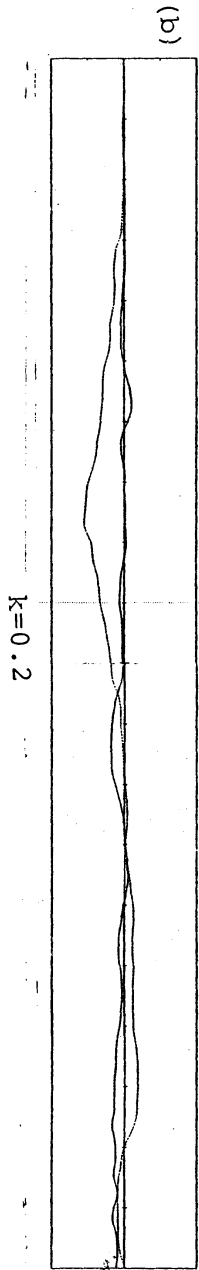
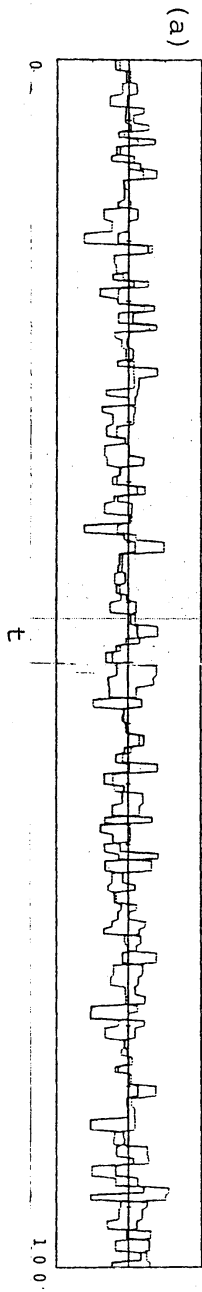
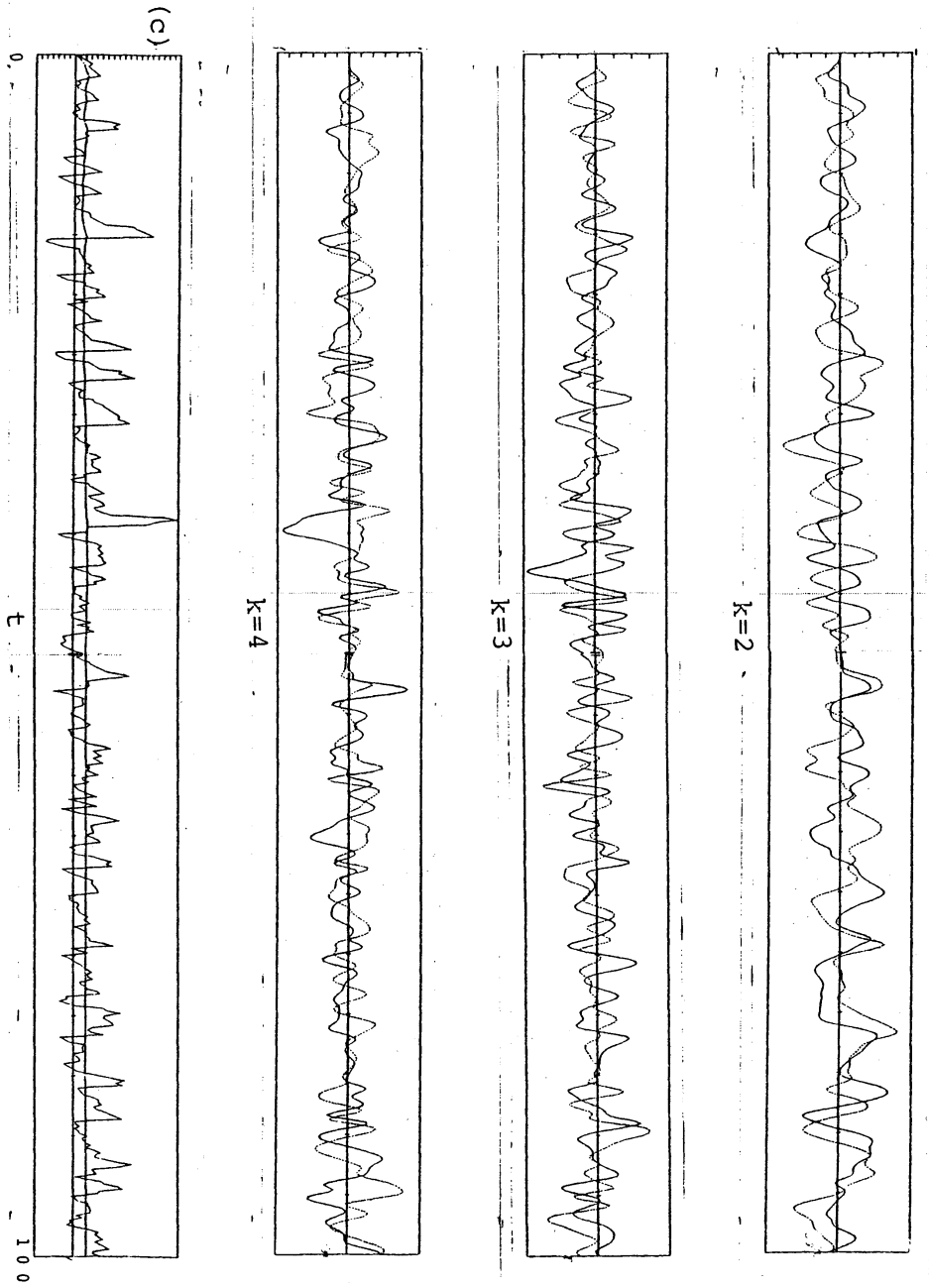


Fig. 4. Time evolutions of (a) random force $f(0.8, t)$, (b) the Fourier components of velocities $Reu(k)$, $Imu(k)$, and (c) the rate of energy supply $RES(t)$ (—) the mean rate of energy supply $MRES(t)$ (---).
 — : the real part and - - - - : the imaginary part for (a) and (b).



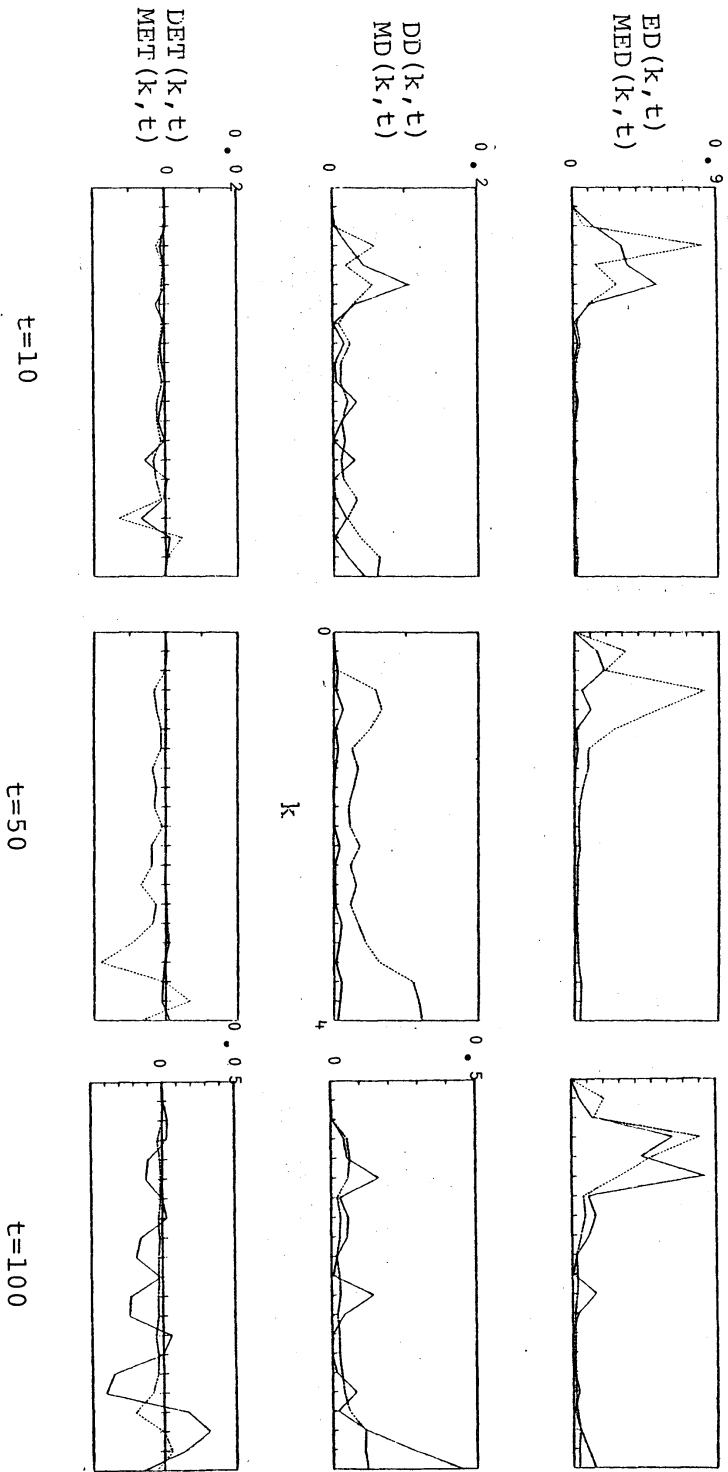


Fig. 5. Distributions of energy $ED(k,t)$, dissipation $DD(k,t)$, energy transfer $DET(k,t)$ and time mean distributions of energy $MED(k,t)$, dissipation $MD(k,t)$, energy transfer $MET(k,t)$: distributions and — : time mean distributions.