

収束する Jeffery-Hamel 流の線形安定性について

厚研 藤村 薫

§ 1. はじめに

流路内の 2 次元定常準平行流に対する線形安定性理論の研究は基本的な流れ場に関する限りほとんどつくられたといえる。その中で、2 次元 Poiseuille 流よりも大なり壁面せん断応力  $\tau_w$  をもつ 2 次元せん断乱流の平均速度分布 (Reynolds & Tiederman,<sup>1</sup> 1967; Potter,<sup>2</sup> 1977) や 2 次元 inlet flow (Chen & Sparrow,<sup>4</sup> 1967) は 2 次元 Poiseuille 流よりも大なり臨界 Reynolds 数  $Re_c (> 5772)$  を有すること知られている。せん断乱流の場合、 $\tau_w \rightarrow \infty$  に伴って中立攪乱の臨界位相速度  $c_c$  に 0.19 の漸近値が存在し、また臨界波数  $\alpha_c$  は 1 を減少して極小値を有し、その後  $\tau_w \rightarrow \infty$  と共に増大する。

ここではこれらの傾向が  $\tau_w$  の大なり流れ場に共通の特徴か否かを調べるために収束する Jeffery-Hamel 流 (以下 J-H) の線形安定性計算を 2 次元 inlet flow の直試と共に行う。1.

§ 2. J-H流

Navier-Stokes 方程式の厳密解の1つである J-H 流の安定性は以下の人々によって研究されてきた:

Eagles<sup>3</sup> (1966) 準平行流理論 (以下 E1),

Nakaya & Hasegawa<sup>5</sup> (1970) 非平行流場での定常擾乱,

Eagles<sup>6</sup> (1973) E1 の繞りで超臨界状態での弱非線形理論,

Eagles & Weissman<sup>7</sup> (1975) slowly varying 近似 (多重尺交法) (E2),

Ikegawa & Aihara<sup>8</sup> (1976) slowly varying TF 係数の一部を局所展開したで零近似。

これらは、どれも発散流に対する研究である。発散流の場合わずかの発散角で主流の種々の mode が実現できるため、物理的にも数学的にも興味深く、逆に圧縮的TF非平行流にTFらTF... と mode の変わらTF収束流は研究対象から取り残されていった。ここではTFの大TF流れの典型的TF例として J-H 流の収束タイプの基本 mode J-H IV を E1 に沿って調べ、臨界位相速度の漸近値を検討する。

r:  $\theta$  で無次元化した

動径方向の座標

$$M = \frac{1}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} u b r d\theta$$

$Rv = M/v$  (添字  $v$  は平均流速で作,  $\tau$  諸量)

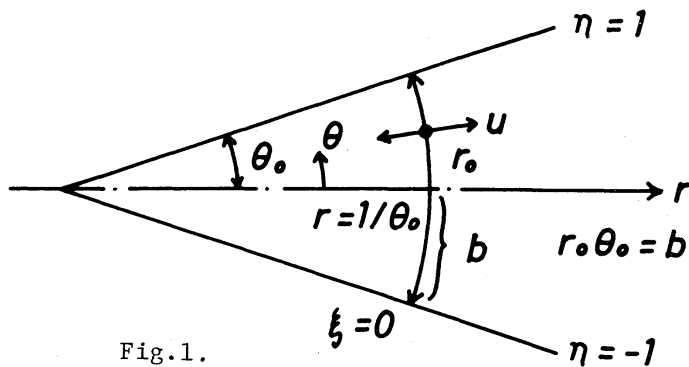


Fig.1.

Fraenkel<sup>9</sup> (1962) に従って

$$\xi = \theta_0^{-1} \log(\theta_0 r), \quad \eta = \theta/\theta_0, \quad (2.1)$$

を導入すると無次元化された渦交方程式は

$$\left. \begin{aligned} & [\Delta - Rv e^{2\theta_0 \xi} \frac{\partial}{\partial t} - Rv \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)] (e^{-2\theta_0 \xi} \Delta \psi) = 0, \\ & \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

境界条件は  $\psi = \pm 1, \partial \psi / \partial \eta = 0$ , at  $\eta = \pm 1$ . 主流速度分布は

$$\left. \begin{aligned} u &= r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = e^{-\theta_0 \xi} g(\eta), \\ g''' + 4\theta_0^2 g' + 2\theta_0 Rv g' g &= 0, \end{aligned} \right\} (2.3)$$

で表わされ、対応する解は Fraenkel (1962) に与えられている。

### 擾乱方程式

$$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}(\xi, \eta; t)$$

を渦交方程式に代入して線形化すると

$$\left\{ Rv^{-1} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\theta_0 \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] - e^{2\theta_0 \xi} \frac{\partial}{\partial t} - g(\eta) \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\theta_0 \right) \right\} \Delta \hat{\psi} + g''(\eta) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} + 2\theta_0 g'(\eta) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} = 0, \quad (2.4)$$

$$\hat{\psi} = \partial \hat{\psi} / \partial \eta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \pm 1 \quad (2.5)$$

を得る。(2.4) 式は変数分離できず、ために、これを種々の近似的取り扱いがなされてきた。

$\theta_0 \ll 1$  の時  $\hat{\psi}$  を  $\theta_0$  で展開する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi} &= \psi_0 + \theta_0 \psi_1 + \theta_0^2 \psi_2 + \dots, \\ L\psi_0 &= Rv^{-1} \Delta \psi_0 - \left( \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Delta \psi_0 + g'' \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = 0, \\ L\psi_1 &= \left[ (4Rv^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial}{\partial t} - 2g) \Delta - 2g' \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \psi_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (2.6)$$

才零近似  $L\psi_0 = 0$  の  $\psi_0$  を

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(\eta) e^{i n \alpha (\xi - c \tau)}, \quad (2.7)$$

の形に Fourier 分解し,  $n=1$  とし (添字を除くと Orr-Sommerfeld 方程式と同次境界条件

$$(\beta - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - \beta'' \phi = \frac{1}{i \alpha R v} (\phi^{iv} - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) \quad (2.8)$$

$$\phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) = 0 \quad (2.9)$$

が得られる。速度分布も同様に  $\theta_0$  の高次の項を無視すると

$$\left. \begin{aligned} U_v(\eta; \gamma_v) &= f(L\eta; Rv, \theta_0) + O(\theta_0^2), \quad \gamma_v = \theta_0 Rv, \\ U_v'' + 2\gamma_v U_v' U_v &= 0, \quad U_v(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 U_v d\eta = 2. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

以下  $\eta \rightarrow y$  と書き換之ると速度分布は以下のように与えられる:

J-H I, diverging,  $0.5 < m < 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} 3 \operatorname{sn}^2(am) \operatorname{dc}^2(am) &= 4m - 2, \\ \rho &= 2E*(am) - a - \operatorname{sn}(am) \operatorname{dc}(am) + a \operatorname{sn}^2(am) \operatorname{dc}^2(am), \\ \gamma_v &= 6a\rho, \\ U_v = u/\bar{u} &= \frac{a}{\rho} [\operatorname{sn}^2(am) \operatorname{dc}^2(am) - \operatorname{sn}^2(ay|m) \operatorname{dc}^2(ay|m)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

J-H III, converging,  $0.5 < m < 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} 1 + m &= 3m \operatorname{cd}^2 b, \\ \rho &= E*(b|m) - m \operatorname{sn}(b|m) \operatorname{cd}(b|m) - (1-m) b \operatorname{nd}^2(b|m), \\ \gamma_v &= 6b\rho, \\ U_v = u/\bar{u} &= \frac{mb}{\rho} [\operatorname{cd}^2(b|m) - \operatorname{cd}^2(by|m)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

J-H<sub>∞</sub> (J-H III, a  $Y_0 \rightarrow -\infty$  での漸近形),

$$\beta_0 = \tanh^{-1} \sqrt{2/3},$$

$$U_v = u/\bar{u} \sim 3 \tanh^2 \left( \left| \frac{Rv\theta_0}{2} \right|^{1/2} \eta + \beta_0 \right) - 2. \quad (2.13)$$

ここで  $m = k^2$  ( $k$  は Jacobi の第 1 種楕円関数の母数), さらに,  
 $E_*(z) = \int_0^z dn^2(\delta/m) d\delta.$

他の流れ場<sup>\*</sup>との比較のために代表速度として以下中心流速を用いると,  $U = U_v/U_{v0}$ ,  $R = Rv/U_{v0}$ ,  $Y = Y_0/U_{v0}$ , etc.

さらに J-H III は対称流れであるので偶関数擾乱に対してより不安定なことから擾乱方程式は

$$(U-c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = \frac{1}{i\alpha R} (\phi^{(4)} - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi), \quad (2.14)$$

$$\phi(-1) = \phi'(-1) = \phi'(0) = \phi'''(0) = 0 \quad (2.15)$$

### 固有値問題の解法

Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題の解法についても, 下

\*1)

2次元 inlet flow に対しては, Sparrow, Lin & Lundgren<sup>10</sup> (1964) に与えられた次の表式を用いた。Chen & Sparrow<sup>4</sup> もこの表式に基づいている。

$$U_v = u/\bar{u} = 1.5(1-\eta^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n^2} \left[ \frac{\cos \alpha_n \eta}{\cos \alpha_n} - 1 \right] e^{-\alpha_n^2 X^*},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X^* = \frac{x^*/h}{\bar{u}h/\nu}, \quad \eta = Y/h, \quad \tan \alpha_n = \alpha_n, \quad \bar{u}: \text{平均流速}, \\ h: \text{2平板間隔の半値}, \quad Y: \text{2平板中心線から垂直に測} \\ \quad \eta \text{の距離}, \quad x^*: \text{主流方向の引延の長(変数)}. \end{array} \right.$$

でほとんど基本的には確立されており、現在は数値的、数値的な精密化がなされている状態<sup>11,15</sup>で、詳細は省略する。

ここでは  $\alpha R \gg 1$  の 2 種類の漸近解を用いた解法と、初期値解法を用いて計算した。

### 漸近解法

粘性解として 1) local turning point 近似: 1 位の転移点問題に対する中央接続法; 2) Tollmien's improved viscous 近似: Orr-Sommerfeld 方程式の打ち切り方程式に対する標準方程式法,  $\alpha$  2 種類の近似解を用いた。非粘性解として Reid<sup>11</sup> (1965), Hughes & Reid<sup>12,13</sup> (1965) に従い,  $y = y_c (U=c)$  近傍の Frobenius 解を数値積分により外部領域に解析接続することにより求めた 1 種類を用いた。また, Tietjens 関数は Miles<sup>14</sup> の数表を用い, 因式解法により固有値を求めた。

### 初期値解法

巽-後藤<sup>15</sup> (1976) に従い, Gram-Schmit の正規直交化を RK4 法に併用して解き,  $R_c, C_c$  の値を求めた。iteration はいわゆる Muller の方法<sup>16</sup> に従い, 中立安定のための条件をここでは  $|c| < 10^{-8}$  とした。今回の計算は  $\alpha R$  がかなり大きいため, initial guess として漸近解法の結果を適当に数%変更した値を用いている。

§3 計算結果

Table I. Values of  $\gamma$ .

以下、得られた計算結果を示す。計算条件は J-H III<sub>1</sub> に関して Table I に与えた。

Figure 2 に主流速度分布を示す。Tw が同程度の大きくても J-H III<sub>1</sub> の方が inlet flow よりも境界層厚に相当する量 (例えば  $U(1-\delta) = 0.95 U(y=0)$  を与える  $\delta$ ) が大きく、J-H III<sub>1</sub> は inlet flow より中心の方まで主流速度分布に対する粘性の効果により深く及んでいることがわかる (J-H 流は元来流路全域が境界層に覆われている

	$\gamma$	case no.
J-H I	0.57	(1)
	0.215	(2)
	0.0036	(3)
(+)	0.0	(4)
J-H III <sub>1</sub>	-0.0036	(5)
	-0.22	(6)
	-0.6072	(7)
	-1.384	(8)
	-3.203	(9)
	-4.88	(10)
	-6.389	(11)
	-9.333	(12)
	-12.72	(13)
	-22.34	(14)
	-32.63	(15)
	-40.46	(16)
	-63.84	(17)
	-95.51	(18)
	-126.5	(19)
	J-H ∞	-400.
-700.		(21)
-900.		(22)

(+) : plane Poiseuille

る  $\alpha$  に対し、inlet flow ではいわゆる potential core を流路中央に残している)。

中立曲線の upper branch の漸近的性質は壁近傍の  $U'$  に大きく依存する  $\alpha$  で Gotoh (1970) に付いて  $-U''$  vs  $y$  を示したのが Fig. 3 である。J-H III<sub>1</sub> では  $y=1$  (壁) から  $y=0$  に向かって単調に減少し、 $y \rightarrow 0$  で

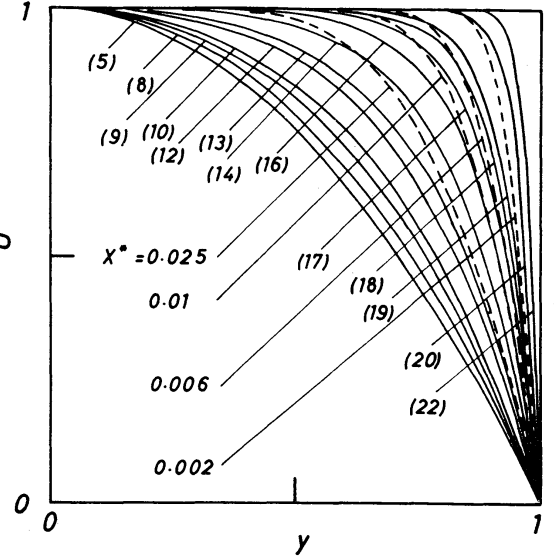


Fig.2. Mean velocity profiles: —, J-H III-1; ----, inlet flow.

- $U'' \rightarrow 2$  と  $Tf$  の  $\Gamma$  に  
 対し, inlet flow  
 ではオーバーシュートした後減少し  
 $X^* \rightarrow \infty$  で  $-U'' \rightarrow 2$  と  
 $Tf$  する。壁近傍での  
 $-U''$  のオーバー  
 シュートは Gotoh<sup>17</sup>  
 の Blasius flow の  
 場合にも現われて  
 おり, 境界層流の  
 一つの特徴と考えられる。

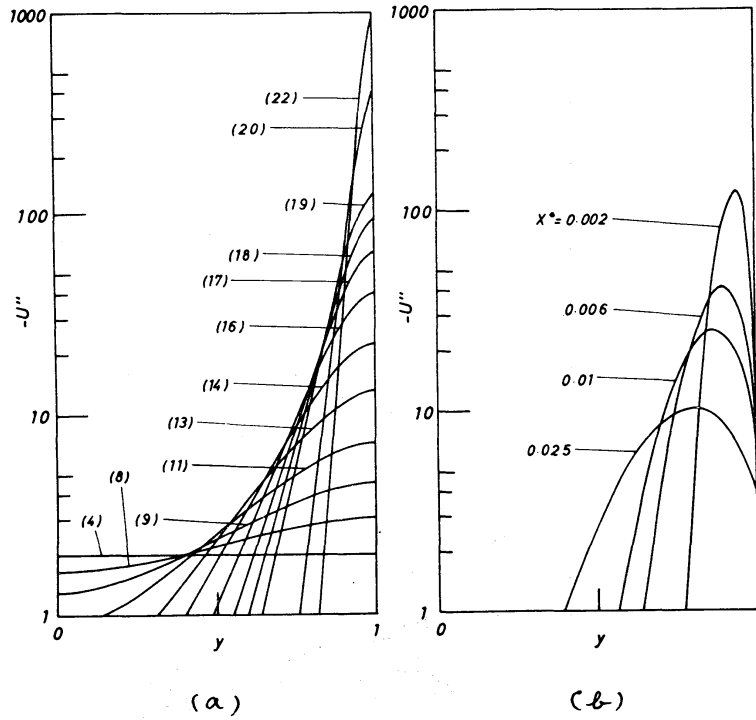


Fig.3. Second derivatives of velocity profiles:  
 (a), J-H III-1 ; (b), inlet flow.

Figure 4 に inlet flow, Fig. 5 に J-H III<sub>1</sub> の  $\alpha$ - $R$  曲線群を示す。(いずれも転移点近似による結果) これらから, 同じ  $\alpha_c$  に対しても  $R_c$  は J-H III<sub>1</sub> の方が1桁高いことがわかる。また, J-H III<sub>1</sub> では §1 に述べたせん断乱流の場合と同様に臨界波数は1を減少して極小値をと, 後に増加する<sup>2</sup>。 $\alpha_c$  の極小値を与える速度分布の中心流速は平均流速で規格化して 1.454 であり, せん断乱流の約 1.45 とおきわめて良く一致している。(Potter, 1967)

Figure 6 に Fig. 4 に対応する inlet flow の  $\alpha$ - $c$  曲線群を示す。中立擾乱の臨界位相速度  $c_c$  は 2次元 Poiseuille 流の値 0.267 から



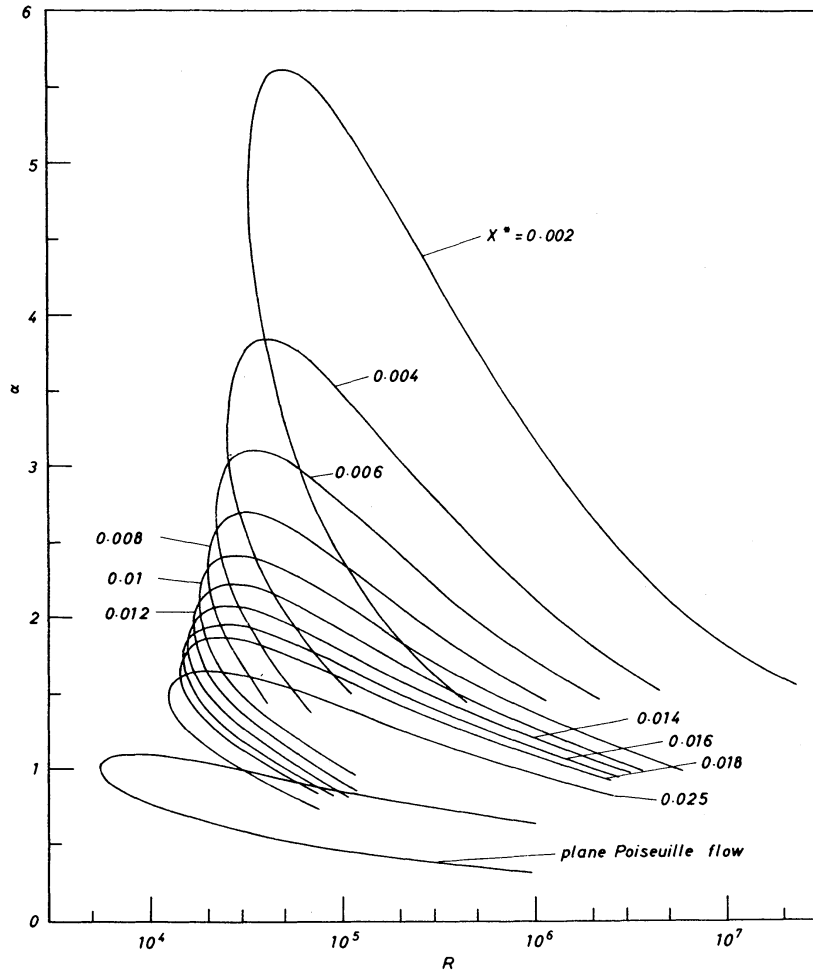


Fig.4.  $\alpha$ -R curves for inlet flow profiles.

単調に  $X^* \rightarrow 0$  と共に増加し, 0.32 程度  $\alpha$  に漸近値を有する<sup>\*)</sup>。

ところが Fig. 7 に示した Fig. 5 に対応する J-H III,  $\alpha$ - $c$  曲線群からは,  $c_c$  は 0.267 から減少して一応おすかにオーバーシュートした後  $c_c \sim 0.1847$  に漸近することがおわする。この  $c_c$  の値はせん断乱流の 0.19<sup>2)</sup> とほぼ一致している。

\*) 後藤先生の御指摘による。

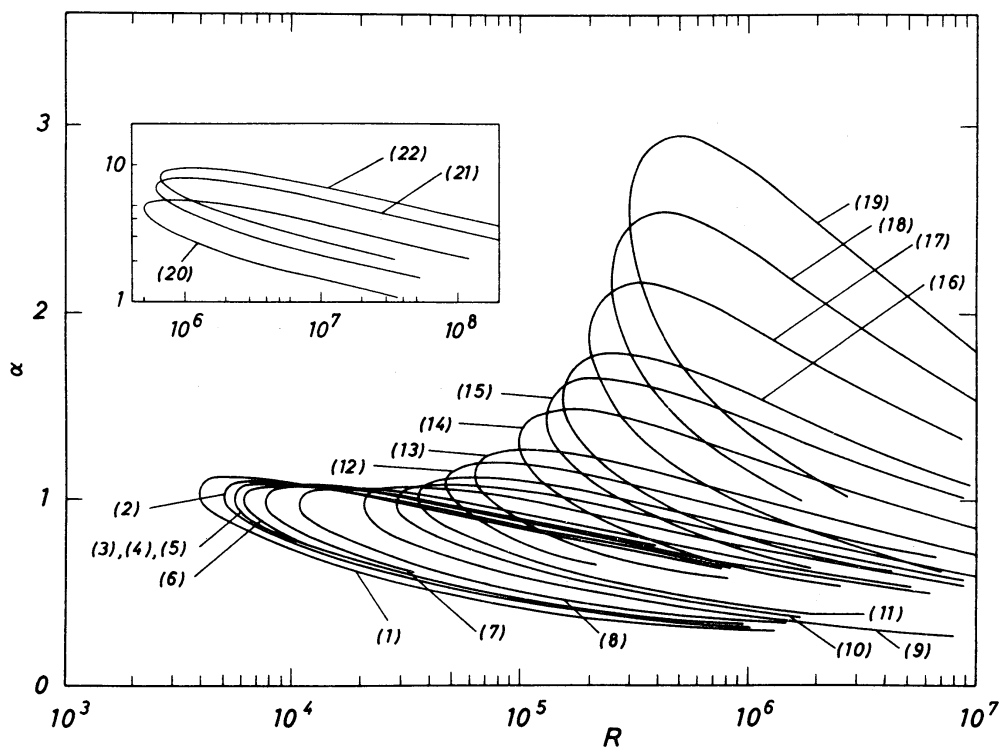


Fig.5.  $\alpha$ - $R$  curves for J-H III-1 profiles.

以下, J-H III<sub>1</sub> の中立曲線をもう少 (詳しく調べてみる。  
 Figure7 の原点付近に破線で示した  $\Gamma = \alpha$  且  $\gamma = -3.203$  ( $k=0.95$ ) の  
 中立曲線 (9) に対する漸近枝である。さらに upper branch 上の  
 点の拡大図も併記してある。このルー-7 は Fig.8 の Tietjens  
 関数の  $5.5 < \alpha < 7$  でのルー-7 に対応し, さらに Fig.9 に示し  
 た同じく  $\gamma = -3.203$  に対する  $\alpha$ - $R$  曲線の upper branch 上の  
 kink に対応している。

以上, 局所転移点近似による結果を示してきたが, 以下,  
 3通り の計算法の比較を行おう。

まず,  $\gamma = -3.203$  の臨界点付近の  $\alpha$ - $R$  曲線についての 3

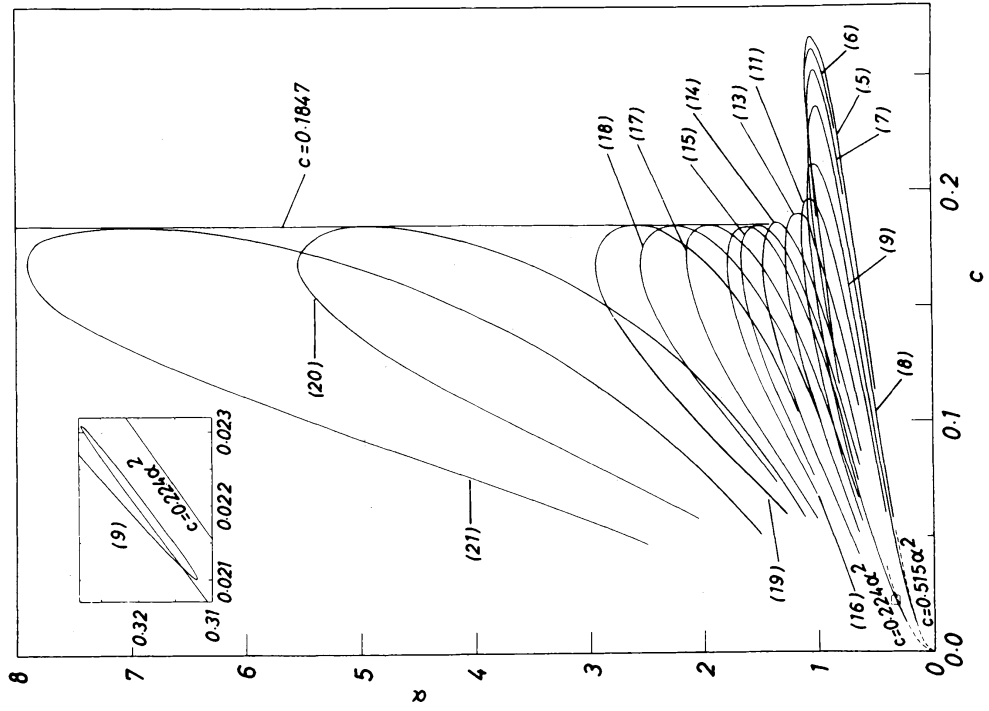


Fig.6.  $\alpha$ -c curves for inlet flow profiles.

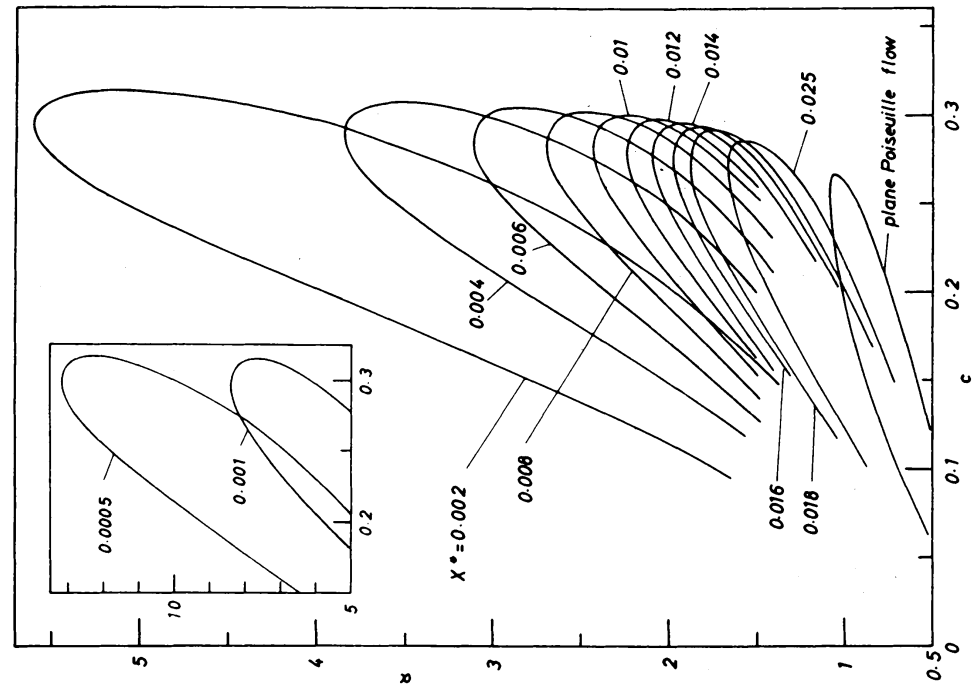


Fig.7.  $\alpha$ -c curves for J-H III-1 profiles.

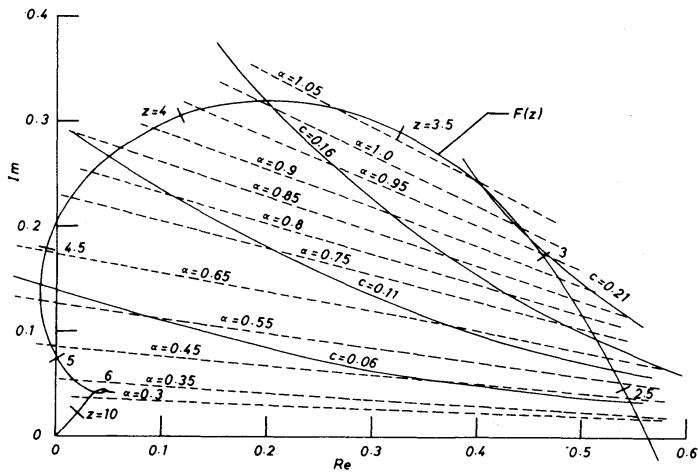


Fig.8. The graphical solution of the characteristic equation for the velocity profile :  $\gamma=-3.203$ .

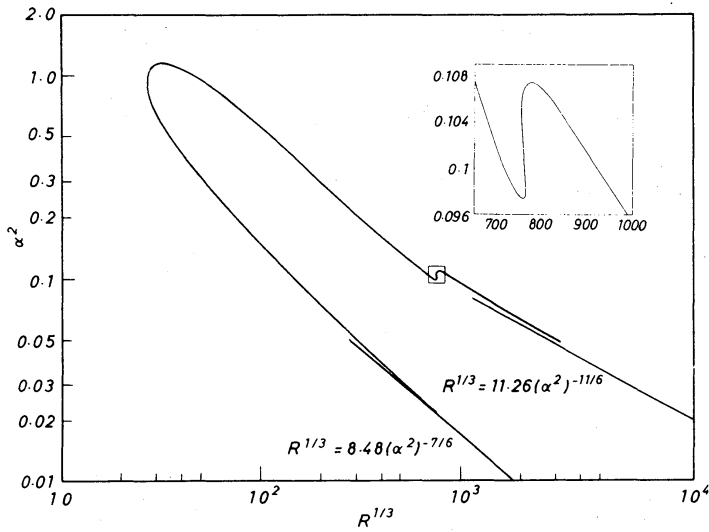


Fig.9.  $\alpha$ -R curve for J-H III-1,  $\gamma=-3.203$ .

者の関係を Fig. 10 に示す。これは  $\alpha$  の関係は 2次元 Poiseuille 流に於ける Lakin, Ng & Reid (1978) と consistent \*) である。

Figure 11 に 3 種の解法による  $\alpha$ -R 曲線群を示す。ただし、初期値解法の結果は臨界点のみ示してある。脚注の意味で  $\alpha$  Tollmien 近似が  $\alpha$  の場合、より初期値解法の結果に近く、良い近似に成る。ていふことがわかる。

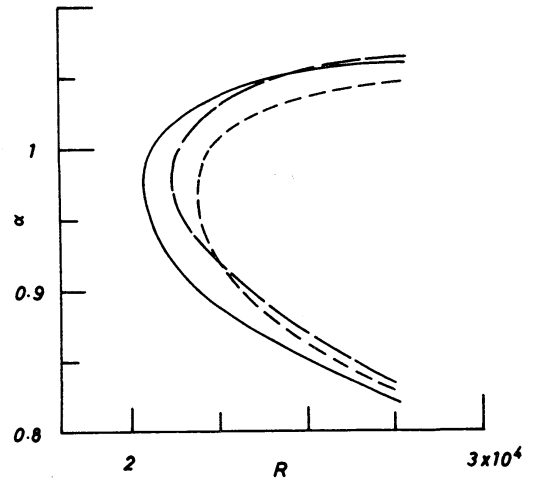


Fig.10.  $\alpha$ -R curves for J-H III-1,  $\gamma = -3.203$ : —, local turning point approximation; ----, Tollmien's improved viscous approximation; - · -, step-by-step integrating procedure.

Figure 12 に  $\alpha$ -c 曲線群を示す。局所転移点近似同様、Tollmien 近似も  $c_c \sim 0.18$  という漸近値を有する。初期値解法の結果として同図には臨界点および位相速度最大の点を示し、 $T = 1 \rightarrow \infty$  で  $|c_c - c_{max}| \rightarrow 0$  という傾向があることがわかる。初期値解法

\*)  
 = 二で Lakin, Ng & Reid (1978) に T.F. の Tollmien's improved viscous 近似:  

$$\phi_{3,4} = \left(\frac{\xi}{U-c}\right)^{5/4} \int_{\infty,1,2}^{\xi} d\xi \int_{\infty,1,2}^{\xi} A_1, P_2(\xi) d\xi, \quad \xi = (i\alpha R)^{2/3} \left[ \frac{3}{2} \int_{z_0}^{\xi} (U-c)^{1/2} dz \right]^{2/3},$$
 の slowly varying T.F. 係数  $\left(\frac{\xi}{U-c}\right)^{5/4}$  を一定として固有値問題を構成している。係数の変化を入れると Tollmien 近似は局所転移点近似よりも大きく低 Reynolds 数側に下れる。<sup>4</sup>

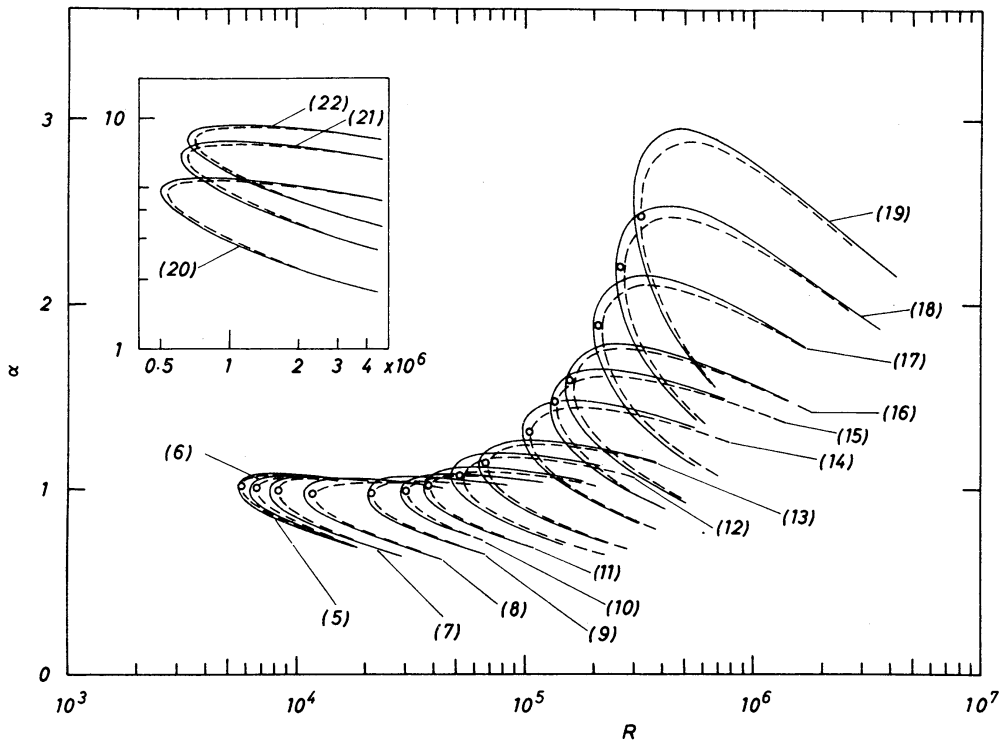


Fig.11.  $\alpha$ - $R$  curves for J-H III-1 profiles :  
 — , local turning point approximation ;  
 ---- , Tollmien's improved viscous approximation ;  
 ○ , step-by-step integrating procedure for the critical states.

による  $c_c$  の漸近値は 0.1844 であり、 $\alpha$ - $c$  曲線に対しては  $\alpha$ - $R$  曲線の場合とは逆に局所転移点近似が良.. 近似を与えているといえる。

こゝ手では、ある  $\gamma$  の値に対応する速度分布の安定性を調べてきた。しかし、以上の結果が何らかの意味をもつためには、1 本の中立曲線上をトレースする時、与えられた  $\gamma$  に対して  $\theta_0 = \gamma/R$  に従って  $\theta_0$  は常に変化しなくてはならない。

実際の流れ場として収束角一定の流路内の流れに対する

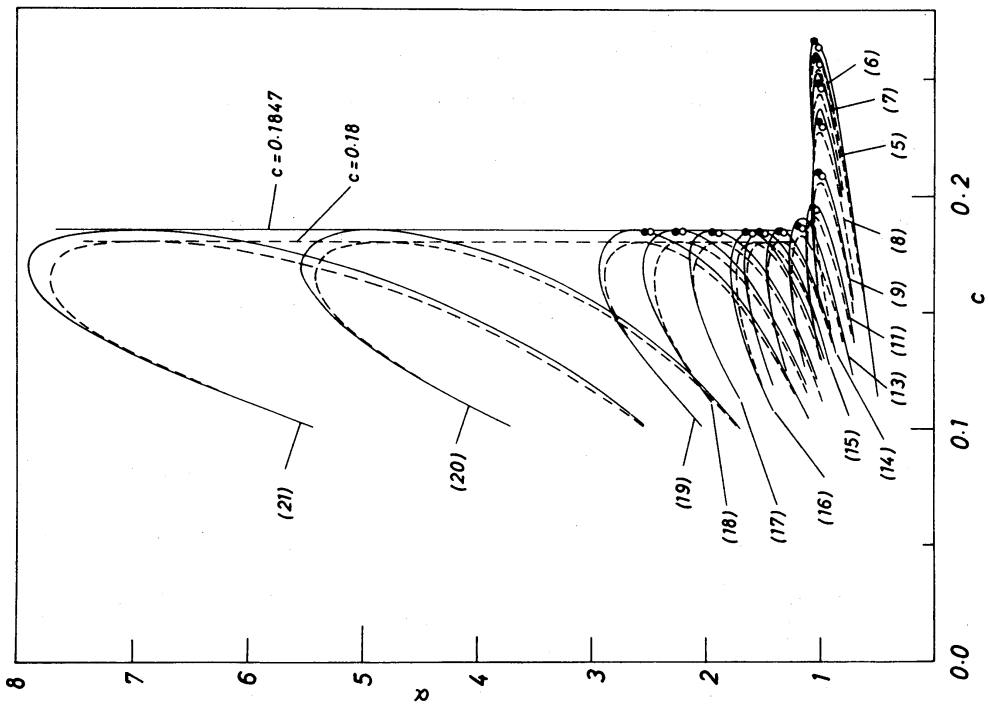


Fig.12.  $\alpha$ - $c$  curves for J-H III-1 profiles:  
 —, local turning point approximation;  
 - - -, Tollmien's improved viscous approximation;  
 ○, for the critical states; ●, for the maximum phase velocities.

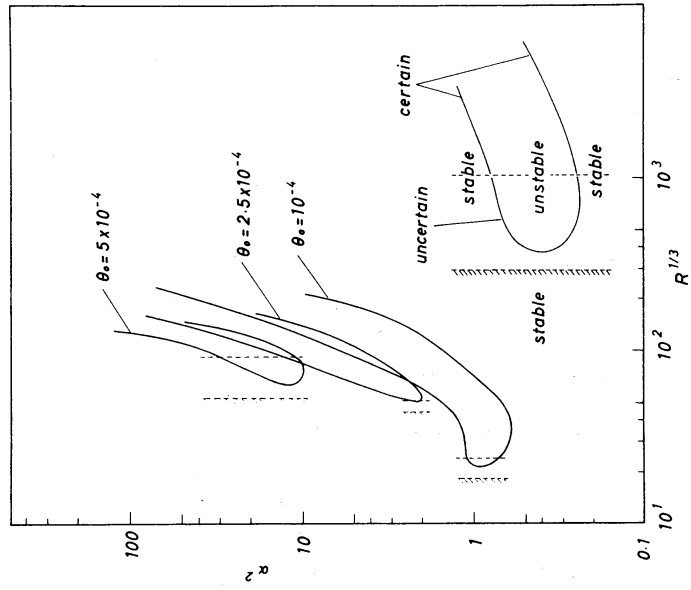


Fig.13.  $\alpha$ - $R$  curves for three values of  $\theta_0$ .

安定性は、 $R = \gamma/\theta_0$  に基づいて Fig. 5 から半零近似的に調べることが出来る。Figure 13 に  $\theta_0 = 10^{-4}$ ,  $2 \times 10^{-4}$ ,  $5 \times 10^{-4}$  (rad) の場合の中立曲線 ( $\alpha$ - $R$  曲線) 群の概観を与える。

J-H 流の場合、主流速度分布が  $y$  のみの関数として与えられることから、平行流近似は準平行流近似と等価であり、準平行流近似は  $O(\theta_0)$  の誤差を含み (E2') ことから以上のよう  $\theta_0 \ll 1$  の場合、平行流近似は十分信頼できるものと考えられる。しかし、§ 2 に述べたように、収束流の場合、本格的な非平行流場には  $\theta_0$  限り mode が変わらなから、J-H III<sub>1</sub> を完全に取り扱うためには強い非平行流に対する安定性理論の構成が必要であり、J-H III<sub>2</sub> 以上の mode では  $\theta_0$  どころである。現在しばしば行なわれている slowly varying 近似 (E2) は今の問題の場合  $\theta_0 \ll 1$  により slow variable  $X = \theta_0 y$  を導入するものであり、発散流の場合には適用し之が収束流の場合にはこれでは不十分である。

最後に、本研究会での講演をお勧め頂き、教々の御助言を賜わった後藤金英先生、川原琢治先生に深く感謝申し上げます。



## References

- 1) W.C.Reynolds and W.G.Tiederman : J.Fluid Mech. 27 (1967) 253
- 2) M.C.Potter : Phys.Fluids 14 (1971) 1323
- 3) P.M.Eagles : J.Fluid Mech. 24 (1966) 191
- 4) T.S.Chen and E.M.Sparrow : J.Fluid Mech. 30 (1967) 209
- 5) C.Nakaya and E.Hasegawa : Phys.Fluids 13 (1970) 2904
- 6) P.M.Eagles : J.Fluid Mech. 57 (1973) 149
- 7) P.M.Eagles and M.A.Weissman : J.Fluid Mech. 69 (1975) 241
- 8) M.Ikegawa and Y.Aihara : Trans.Japan Soc.Aero.Space Sci. 19 (1976) 113
- 9) L.E.Fraenkel : Proc.R.Soc.London A267 (1962) 119
- 10) E.M.Sparrow, S.H.Lin and T.S.Lundgren : Phys.Fluids 7 (1964) 338
- 11) W.H.Reid : Basic Developments in Fluid Dynamics, ed. M.Holt (Academic Press, New York, 1965) Vol.1
- 12) T.H.Hughes and W.H.Reid : J.Fluid Mech. 23 (1965) 715
- 13) T.H.Hughes and W.H.Reid : J.Fluid Mech. 23 (1965) 737
- 14) J.W.Miles : J.Fluid Mech. 8 (1960) 593
- 15) 巽友正 and 後藤金英 : 流れの安定性理論 (産業図書, 東京, 1976)
- 16) D.E.Muller : Math.Tables Other Aids to Comp. 10 (1956) 208
- 17) K.Gotoh : J.Phys.Soc.Jpn. 28 (1970) 780
- 18) S.Orszag : J.Fluid Mech. 50 (1971) 689
- 19) W.D.Lakin, B.S.Ng and W.H.Reid : Philos.Trans.R.Soc.London A289 (1978) 347