数理解析研究所講究録
第437巻 1981年 11-28

Aspherical manifolds for niladmissible classes and related topics concerning topological euclidean space form problems.

北海道大学理 神島芳宣

序．C.T.C. Wall, F.C. Farrell-W.C. Hsiang, P.E. Conner-F. Raymond 等により，本格的に提唱されてきた，topological euclidean space form problem に関する報告である．背景は，変換群論シンポジウム（於金沢大学）1981, Jan. における [9], [12], を参照されたし．Aspherical manifolds とは，closed $K(\pi,1)$-manifolds のことである．topological euclidean space form problem とは，次の問題である．

〈問題〉 Contractible manifolds 上に compact 商空間をもつ properly discontinuous actions を許す群を決定せよ．

free actions の場合，すべての aspherical manifolds はそれらの基本群が同型ならば，その時に限り同相か．

この報告における目的は，前半は nilpotent subgroups をもつような群を基本群とする aspherical manifolds の構成と分類，後半は，Gromov により定義された almost flat riemannian manifolds に関する Farrell-Hsiang の最近の仕事の紹介である．これらの問題の出発点は Bieberbach の euclidean group に関する結果(1911)である．

1. 基本群が normal nilpotent subgroups をもつ, aspherical manifolds の構成と分類

(＊) $1 \to \Delta \to \pi \to H \to 1$

を群の完全列，ここで Δ は有限生成 (f.g.) torsion free nilpotent group．H は f.g. group．

我々の結果を述べる前に，次の二つの関連する結果を述べる

(a) Auslander's work (1960) [1]：Infranilmanifold の存在と分類，これは，(＊) において，π は torsion free，Δ は π の maximal nilpotent subgroup，$H = F$，有限群．の場合における π を基本群にもつ aspherical manifold の存在と分類である．そこでは，compact generalized nilmanifold と定義されている．

(Mal'cev's result [10]) Δ が f.g. torsion free, nilpotent group $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ Δ を discrete uniform (cocompact) subgroup として含む unique, connected, simply connected, nilpotent Lie group N が存在．

今の場合，$F \to N/\Delta \to N/\pi$ なる covering が存在して，coset space N/Δ は nilmanifold である．

(b) Conner-Raymond's work (1969–1976) [3]：(＊) において，π が torsion free，Δ は free abelian，H は discrete group で次の条件を満たす．

(H.1) Contractible manifold W が存在して，(H, W) は properly discontinuous action で，商空間 W/H は compact．

この場合における aspherical manifolds の構成．

(注1) $H = F$ の時，$(H, W) = (F, pt)$ で，この場合の構成される aspherical manifolds は euclidean space forms (= flat riemannian manifolds) に diffeo である．

定義1. (＊) において，π が torsion free の時，(＊) の group extension としての同値類（あるいは，簡単に π のこと）を niladmissible class とよぶ．

ここで，group extension とは次のことである．(＊) において，一つ section $q: H \longrightarrow \pi$ をとる．この時，operation $\phi: H \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$ が，$\phi(\alpha)(n) = q(\alpha)\, n\, q(\alpha)^{-1}$ $(\alpha \in H, n \in \Delta)$ により定ぎされる．ϕ を，一つ固定する．この時，次のような群を考える $1 \to \Delta \to \pi' \to H \to 1$ に対し，section $q': H \longrightarrow \pi'$ が存在して，$\phi(\alpha)(n) = q'(\alpha)\, n\, q'(\alpha)^{-1}$ をみたす．このような群と ϕ に対し，π と π' が同値とは，

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Delta \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \pi \arrow[r] \arrow[d, "g"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta \arrow[r] & \pi' \arrow[r] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

が可換となる isomorphism $g: \pi \to \pi'$ が存在する時にいう。

群の完全列(*)と, operation ϕ が与えられた時, 上の同値類を ϕ-group extension とよぶ。以下断わらない限り, (*)を group extension という時は, 群の完全列(*)の他に, 一つ operation ϕ が与えられているもののことを意味する。

定理A. (Δ, N) と (H, W) を上の(a),(b)において, 与えられた条件をみたすものとする。この時, 各 niladmissible class (*) $1 \to \Delta \to \pi \to H \to 1$ に対し, π を基本群にもつ topological aspherical manifold $M(\pi)$ が存在して, 次を満たす。

(i) $\dim M(\pi) = \dim W + \dim N$.

(ii) $H \to N/\Delta \times W \xrightarrow{\nu'} M(\pi)$ は principal bundle

(iii) 可換な図式

$$\begin{tikzcd} N/\Delta \times W \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\nu'"] & W \arrow[d, "\nu"] \\ M(\pi) \arrow[r, "\mu"] & W/H \end{tikzcd}$$

において,

(1) 各 fiber $\mu^{-1}(\nu(w))$ $(w \in W)$ は infranilmanifold で,

それは pointwise に変化する.

(2) H が torsion free ならば, $M(\pi) \xrightarrow{\mu} W/H$ は nilmanifold N/Δ を fiber とする fiber bundle である.

(iv) (H, W) が smooth action の場合, もし商空間 W/H が <u>smooth structure</u> をもてば, $M(\pi)$ もそうである.

証明の概略 (step) を述べる. 詳細は [8] を参照.

1. 定ぎ 1 におけるように (＊) $1 \longrightarrow \Delta \rightarrow \pi \longrightarrow H \longrightarrow 1$ に対し, group extension の同値類の集合を $\mathrm{Opext}(H, \Delta, \phi)$ とする. $\mathrm{Opext}(H, \Delta, \phi)$ は次のような functions の同値類の集合と解釈できる: $f : H \times H \longrightarrow \Delta$ を次をみたす functions とする

(a) $\phi(\alpha)(\phi(\beta)(n)) = f(\alpha, \beta)\phi(\alpha\beta)(n)f(\alpha, \beta)^{-1}$

(b) $f(\alpha, 1) = f(1, \alpha) = 1$

(c) $\phi(\alpha)(f(\beta, \gamma))f(\alpha, \beta\gamma) = f(\alpha, \beta)f(\alpha\beta, \gamma)$.

(Def) 二つの functions f_i $(i=1, 2)$ が同値 $\Leftrightarrow$ function $\lambda : H \longrightarrow C(\Delta)$ (the center of Δ) が存在して,

$$f_1(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\lambda(\beta))\lambda(\alpha)\lambda(\alpha\beta)^{-1} f_2(\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \in H)$$ を

みたす.

(記号) $\delta'\lambda : H \times H \longrightarrow \Delta$ を, $\delta'\lambda(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\lambda(\beta))\lambda(\alpha)\lambda(\alpha\beta)^{-1}$ とかく時, 上は $f_1 = \delta'\lambda \cdot f_2$ とかける.

この定ぎが同値律をみたし，従ってこの同値類の集合を $\mathbf{I}$ であらわすと，明らかに次が成り立つ．

命題1　$\mathrm{Opext}(H, \Delta, \phi)$ は $\mathbf{I}$ と1対1対応である．

2.　$\mathrm{Opext}(H, \Delta, \phi)$ から，$N \times W$ 上の properly discontinuous actions を produce する．Operation $\phi : H \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ は，Mal'cev の結果より一意に operation $\Phi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ に拡張する．

(Def)　$\mathrm{Map}_{\Phi}(W, N)$ を W から N への連続写像全体の集合に，H の作用を，$(\alpha \circ t)(w) = \Phi(\alpha)(t(\alpha^{-1}w))$ により与えたものとする．

次のような functions $\chi : H \longrightarrow \mathrm{Map}_{\Phi}(W, N)$ を考える．各 $\alpha \in H$ に対し，$\chi(\alpha) : W \longrightarrow N$ は連続写像である．

(記号)　$\chi(\alpha)^{-1}(w) = (\chi(\alpha)(w))^{-1}$　$(w \in W)$ とおく

$\delta'\chi : H \times H \longrightarrow \mathrm{Map}_{\Phi}(W, N)$ を

$(\delta'\chi(\alpha, \beta))(w) = \Phi(\alpha)(\chi(\beta)(\alpha^{-1}w))\chi(\alpha)(w)\chi(\alpha\beta)^{-1}(w)$ とおく．

先の定ぎより，$\delta'\chi(\alpha, \beta) = (\alpha \circ \chi(\beta))\chi(\alpha)\chi(\alpha\beta)^{-1}$．

さらに χ は次をみたす．

(1)　$\alpha, \beta \in H$ を fix する時，$\delta'\chi(\alpha, \beta) : W \longrightarrow N$ は定値写像で Δ に値をもつ．

(2)　$\delta'\chi(\alpha, \beta)(w) = f(\alpha, \beta)$ とおく時，$f : H \times H \longrightarrow \Delta$ は先の (a), (b), (c) をみたす．

（注２） (2) から $\chi(1)=1$ （i.e. $\chi(1)(w)=1$ ）となる．

(Def) 二つの functions χ_i $(i=1,2)$ が同値とは，

(i) $\mu \in Map_{\overline{\Phi}}(W,N)$ が存在して，

$$\chi_1(\alpha)(w) = \overline{\Phi}(\alpha)(\mu^{-1}(\alpha^{-1}w))\chi_2(\alpha)(w)\mu(w)$$

or

(ii) function $\lambda : H \longrightarrow C(\Delta)$ が存在して，$\chi_1(\alpha)(w)=\lambda(\alpha)\chi_2(\alpha)(w)$

をみたす時にいう．

(記号) function $\lambda : H \to \Delta$ と $\chi : H \longrightarrow Map_{\overline{\Phi}}(W,N)$ とに対し，

積を $(\lambda\cdot\chi)(\alpha)(w)=\lambda(\alpha)\chi(\alpha)(w)$ と定ぎする．この時，(ii) は

もし $\lambda \in C(\Delta)$ ならば，積 $(\lambda\chi_2)$ は条件 (1)(2) をみたす

function で，χ_2 と同値である．

この定ぎが同値律をみたすことが check でき，この同値類

の集合を $Opext^1(H, Map_{\overline{\Phi}}(W,N),\phi)$ とおく．

$N\times W$ 上の actions を produce するための Key role は，次

の命題である

<u>命題２</u>． $Opext^1(H, Map_{\overline{\Phi}}(W,N),\phi)$ は $Opext(H,\Delta,\phi)$

と１対１対応である．

命題１と性質 (2) から，$\chi \in Opext^1(H, Map_{\overline{\Phi}}(W,N),\phi)$ に対し，

$\delta'\chi = f \in Opext(H,\Delta,\phi)$ が対応する．この時，operation

$\delta' : Opext^1(H, Map_{\overline{\Phi}}(W,N),\phi) \longrightarrow Opext(H,\Delta,\phi)$ が well-

defined bijection となる（see [8, Proposition 2.7]）．

この証明の本質的なことはある係数群の完全列から出来る cohomology groups の Bockstein homo. が isomorphism になるという事実に基づく.

3、(ホ) $1\longrightarrow\Delta\longrightarrow\pi\longrightarrow H\longrightarrow 1$ に対し，命題1より $f: H\times H\longrightarrow\Delta$ が対応するとすると，命題2と定義より，function $\chi: H\longrightarrow Map_{\Phi}(W,N)$ が存在して，$\delta'\chi=f$, i.e.,

$$f(\alpha,\beta)=\Phi(\alpha)(\chi(\beta)(\alpha^{-1}w))\cdot\chi(\alpha)(w)\chi(\alpha\beta)^{-1}(w)$$

for $\alpha,\beta\in H$ and any $w\in W$.

π を集合 $\Delta\times H$ で group law $(n,\alpha)(m,\beta)=$ $(n\phi(\alpha)(m)f(\alpha,\beta),\alpha\beta)$ とみることが出来る（注 $(n,\alpha)\longmapsto ng(\alpha)$ が同型を与える）. この時，π の $N\times W$ 上の action を，次で定義する

$$(n,\alpha)(x,w)=(n\Phi(\alpha)(x)\chi(\alpha)(\alpha w),\alpha w).$$

$(\pi, N\times W)$ が properly discontinuous action であることが check できる（[8 , §3]）.

$N/\Delta\times W$ 上の H の作用を，$\alpha(\Delta x,w)=(\Delta\Phi(\alpha)(x)\chi(\alpha)(\alpha w),\alpha w)$ で定義すると，$p: N\times W\longrightarrow N/\Delta\times W$ は，π−H− equivariant i.e., $p((n,\alpha)(x,w))=\alpha p(x,w)$ この時，さらに，isotropy subgroups $\pi_{(x,w)}$ と $H_{p(x,w)}$ は各 $(x,w)\in N\times W$ に対し同型となる. $(n,\alpha)\longrightarrow\alpha$ が同型を与える. π は nil admissible i.e., torsion free より，一方 π が proper だから isotropy $\pi_{(x,w)}$ は

finite 従い，$\pi_{(x,w)}=1$ 従って，orbit space $M(\pi)=N\times W/\pi$ は aspherical manifold. また上のことより，

$$\begin{array}{ccccc} & & N\times W & & \\ & & \downarrow p & \searrow & \\ H & \longrightarrow & N/\Delta\times W & \xrightarrow{\nu'} & M(\pi) \end{array}$$

は principal bundle で，H は $N/\Delta\times W$ 上に covering translations の群として作用する.

次に，可換な図式

$$\begin{array}{ccc} N/\Delta\times W & \xrightarrow{\mu'} & W \\ \downarrow \nu' & & \downarrow \nu \\ M(\pi) & \xrightarrow{\mu} & W/H \end{array}$$

において，$\mu'^{-1}(w)=N/\Delta$，$\mu^{-1}(\nu(w))=N/\Delta\backslash H_w$，ここで，$H_w\subset H$ は $w\in W$ における isotropy group. inclusion $H_w\subset H$ は，次の induced extension

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \Delta & \to & \pi & \to & H & \to & 1 \\ & & \| & & \cup & & \cup & & \\ 1 & \to & \Delta & \to & \pi(w) & \to & H_w & \to & 1 \end{array}$$

をもつ；この構成は，$\pi(w)$ が $N/\Delta\backslash H_w$ の fundamental group であることを示す. (H,W) は proper より，H_w は finite. さらに，この aspherical manifold が，infranil manifold に，diffeo になることが示される（[8, Th5.7(2)]）. ここまでで，定理 A の (i), (ii), (iii) の (1) までを証明，さらに (iii) の (2) は，H が torsion free だから，$H_w=1$，i.e.，

$\mu^{-1}(\nu(w))=N/\Delta$ は，fiber bundle $M(\pi)\to W/H$ の fiber である.

(iv) は，省略（[8, 定理3.6]）.

Remark. 逆に，$(\pi, N\times W)$-action で，次をみたすもの

を考える。(1) $\pi \times (N \times W) \longrightarrow N \times W$, $((n,\alpha),(x,w)) \longrightarrow (n,\alpha)(x,w)$

は topological properly discontinuous action.

(2) N は $N \times W$ 上に left multiplication $y(x,w) = (yx, w)$，として作用する。

この時，この N-action に対し，π は，

$$(n,\alpha)(y(x,w)) = n\phi(\alpha)(y)((1,\alpha)(x,w))$$ をみたす。

(このことは，$(\pi, N \times W)$-action が，pushout action $(\pi N, N \times W)$ に拡張することと同値)。

(3) projections $p_1 : \pi \to H$, $p : N \times W \to W$ に対し，$(p_1, p) : (\pi, N \times W) \to (H, W)$ は equivariant である。

(Def) (1),(2),(3) をみたす $(\pi, N \times W)$-actions に対し，二つの actions $(\pi_i, N \times W)$ $(i=1,2)$ が同値とは，

$$\begin{tikzcd}
(\pi_1, N \times W, N) \arrow[rr, "{(g,F,id)}"] \arrow[dr, "{(p_1,p)}"'] & & (\pi_2, N \times W, N) \arrow[dl, "{(p_1,p)}"] \\
& (H, W) &
\end{tikzcd}$$

が可換となる $\overbrace{(g,F,id)}^{\text{isomorphism の組}}$ が存在する時にいう。

この同値類の集合を $\mathrm{Iso}((H,\Delta,\phi), N \times W)$ とおくと，上で構成された π-action は，明らかに (1),(2),(3) をみたす。さらに，命題3 ([8, Proposition 3.2]) $\mathrm{Opext}(H,\Delta,\phi)$ は $\mathrm{Iso}((H,\Delta,\phi), N \times W)$ と 1対1 である。

2. Homotopy equivalences of aspherical manifolds $M(\pi)$.

構成された asphenical manifolds の homotopy equalences を調べる。

(定義2) $f: M(\pi_1) \to M(\pi_2)$ を homotopy equivalence とする。もし、基本群の homomorphism $f_*: \pi_1 \to \pi_2$ が対応する nilpotent subgroups の同型を引きおこす, i.e., $f_*|\Delta_1: \Delta_1 \to \Delta_2$ が iso の時, f を characteristic とよぶ。

(定義3) (rigidity) (H, W) を前のものとし, 任意の automorphism $\Phi: H \to H$ に対し, ある homeomorphism (resp. diffeomorphism) $h: W \to W$ で $h(\alpha w) = \Phi(\alpha) h(w)$ $(\alpha \in H, w \in W)$ をみたすものがある時, (H, W) は topologically (smoothly) rigid とよぶ。

定理B ([8, Theorem 4.3]). (H, W) が topologically rigid (smoothly rigid with smooth quotient) とする。もし $f: M(\pi_1) \to M(\pi_2)$ が characteristic homotopy equivalence ならば, f に homotopic な homeomorphism (diffeomorphism) $H: M(\pi_1) \to M(\pi_2)$ が存在する。

3. 応用. 応用として, Remark の命題3を使って, nilpotent subgroups をもつ infrahomogeneous space (infranil－, infrasolv－manifolds) また, homogeneous space (nil－, solv－manifolds) は, (H, W) を, 具体的に決めることにより, 定理A のように構成されることが出来る ([8, §5]).

例. Compact solvmanifolds (soluble Lie groups の homogeneous spaces)

は，$(H,W)=(Z^s,R^s)$ with quotient torus とおくことにより構成される．compact solv manifolds の基本群 Γ は $1\to\Delta\to\Gamma\to Z^s\to 1$ の形の完全列をもつ。この形の群を，M.W. group とよぶ。

4．分類に関する Farrell-Hsiang の recent works と Gromov の定理からの帰結（1981，5月現在）．

I．Infrahomogeneous spaces（[7]，[10]）．G を連結，単連結 Lie group．（以下 Lie groups はすべてこの条件をみたす）．Aut(G) を automorphism group．

（定義） G の Affine group $A(G)=G\rtimes Aut(G)$（semidirect product） with group law $(g,\alpha)(h,\beta)=(g\alpha(h),\alpha\beta)$ として定義される

（定義） $h: A(G)\longrightarrow Aut(G)$ を canonical projection とする $\Gamma\subset A(G)$ を closed subgroup とする時，$h(\Gamma)$ を Γ の holonomy group とよぶ．

$A(G)$ は G 上に $((g,\alpha),x)\longrightarrow g\alpha(x)$ により effective かつ smooth に作用する．

（定義） M を smooth (compact) manifold とする．Γ を $A(G)$ の closed subgroup で G 上に free かつ properly discontinuously に作用するとする．この時，M が orbit space G/Γ に diffeomorphic の時，M を infrahomogeneous space とよぶ．

Γ は次の完全列をもつ

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \longrightarrow & \Gamma\cap G & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & h(\Gamma) & \longrightarrow 1 \\ & \cap & & \cap & & \cap & \\ 1 \longrightarrow & G & \longrightarrow & A(G) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) & \longrightarrow 1 \end{array}$$

これは、covering $h(\Gamma) \to G/\Gamma\cap G \longrightarrow G/\Gamma$ の基本群の完全列に対応する．ここで，$G/\Gamma\cap G$ は coset space．

（定義） K を Aut(G) の maximal compact subgroup とする．G の euclidean group $E(G) = G \rtimes K$ が定義される．

（注） (Γ, G) が properly discontinuous action より，$\Gamma \subset A(G)$ は discrete subgroup 従って，$h(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(G)$ は discrete．特に $\Gamma \subset E(G)$ ならば $h(\Gamma)$ は <u>finite group</u>．

（注） 定義より，Γ は G 上 free，properly discontinuous with compact quotient（Infrahomogeneous の定ギ）であるが，このことは，$\Gamma \subset E(G)$ において，torsion free，discrete uniform subgroup であることを意味する（同値）

$\Gamma \subset E(G)$，G/Γ を compact とする．特別な G に対し，次のように特徴づけられる．

G	$E(G)$	Γ	G/Γ	$\Gamma\cap G$	$G/\Gamma\cap G$
R^n (real vector group)	$E(n) = R^n \rtimes O(n)$ euclidean group	torsion free crystallographic gr. (Bieberbach gr.)	euclidean space form	free abelian maximal abelian subgr in Γ.	T^n (torus)

2

nilpotent Lie group N	$E(N)$ only definition	torsion free virtually nilpotent gr.	infranil manifold	f.g. torsion free, nilpotent gr. maximal nilpotent subgr in Γ.	nilmanifold
solvable Lie group S	$E(S)$ only definition	torsion free virtually poly $\mathbb{Z}$ group (=poly-{finite or cyclic} group)	infrasolv manifold	M.W. group	solvmanifold

(注. virtually A-group とは, その finite index をもつ subgroup が A をもつ群. ie. ex. virtually nilpotent とは, $1\to\Delta\to\Gamma\to F\to 1$, Δ は nilpotent, F finite).

定理C（[8, Theorem 5.20]）.（存在） 次のことは同値

1. (i) Γ を基本群にもつ infranilmanifold が存在

   (ii) Γ が torsion free, virtually nilpotent group.

2. (i) Γ を基本群にもつ infrasolvmanifold が存在.

   (ii) Γ が torsion free, virtually poly $\mathbb{Z}$- group.

(注) 1 で, $1\to\Delta\to\Gamma\to F\to 1$ において, Δ が maximal nilpotent の場合, Auslander [1] の結果である. この場合,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E(N) & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

で $h(\Gamma)=F$ (ie., 基本群の完全列と holonomy description が一致する).

2. Mを compact riemannian manifold, Kをその sectional curvature, $d(M)$を直径とする.

(定義) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, Mに riemannian metric が存在してそれに関して, $|K| \leqq \varepsilon d(M)^{-2}$ をみたす時, Mを almost flat riemannian manifold とよぶ

(例). compact flat riemannian manifolds (i.e., $K=0$). nilmanifolds (gromov [6]), infranilmanifolds (D. Burns [5]).

Wolf による, infranilmanifolds に関する次の結果を挙げておく.

定理 [11]. Mを infranilmanifold とする. この時, Mの任意の riemannian metric に対し, 次は同値

(i) $K \leq 0$, (ii) $K \geqq 0$, (iii) $K=0$

さらに, この場合, Mは flat riemannian torus に isometric.

(補足) non-positive riemannian mfds は $\exp_x : T_xM \longrightarrow M$ が covering になることから, aspherical manifolds である. non-positive sectional curvature 以外の, curvature もつ riemannian mfds で aspherical の例として, infranilmfd がある (ただし, 基本群は, より free abelian ではないとする).

3. (smooth space form problem). almost flat riemannian manifolds で, infranilmanifolds 以外の例があるか (diffeo の範囲で).

以下は, このことについて, 最近の結果 (1981, 5月) を紹介する. 最初に立ち返って, 次の Conjecture を問題とする.

Conjecture (＊)　aspherical manifolds は，それらの基本群が同型の時，homeomorphic か．

M を aspherical manifold．$\pi_1(M) = \Gamma$ とおく．

(1)　M が flat riemannian mfd の時，Γ と同型な群を，Bieberbach group とよぶ（由来は，flat riemannian mfd は，よく知られているように（Clifford-Klein），euclidean space form で，$E(n)$ の crystallographic groups を Bieberbach が characterize したことによる）．

<u>定理</u>［Farrell-Hsiang，1978［4］，1981［5］］．Bieberbach groups が基本群の時，Conjecture (＊) は OK（次元 3,4 を除く）．

（注）**Bieberbach の定理に従って，次のような statement として か け る．**
$Top(R^n)$ を R^n のすべての homeomorphisms の group．：<u>Bieberbach groups</u> $\Gamma, \Gamma' \subset Top(R^n)$ が R^n 上 <u>properly discontinuous with compact quotient</u> に<u>作用するならば</u>，Γ と Γ' は，<u>$Top(R^n)$</u> において <u>conjugate</u> である．

(2)　M が almost flat riemannian manifold の時，

<u>定理</u>（Gromov［6］）．M のある finite regular covering は nilmanifold に diffeomorphic である．

従って，M は aspherical manifold で，基本群は (torsion free) virtually nilpotent group である．

さらに，

定理（Farrell-Hsiang［5］），基本群が torsion free，

virtually nilpotent groups ならば，Conjecture (＊) は OK
(次元3,4を除く).

定理Cの I とこの二つの定理より，次の topological space form が得られる.

系 almost flat riemannian manifolds は infranilmanifolds に homeomorphic である.

この系により 3の問題が正当化される.

最後に，Hirsch, Schub 等により，Anosov diffeomorphisms に関して，flat riemannian manifolds，infranilmanifolds 上で調べられているが (expanding maps の存在)，一方，almost flat riemannian manifolds 上で，このようなことを調べることは，3の問題に対して，貢献することになると思う.

Infrasolvmanifolds については，いくつか，おもしろい結果が得られているが (例えば，Whitehead group，projective class group の計算，どのような，riemannian あるいは，affine manifolds がその例となるか等) これは次の機会に残したい。

References

[1] L. Auslander, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, Ann. of Math. 71(1960) 579-590

[2] P. Buser and H. Karcher, Gromov's almost flat manifolds, to appear in Astérisque

[3] P. E. Conner and F. Raymond, Deforming homotopy equivalences to homeomorphisms in aspherical manifolds, Bull. of Amer. Math. Soc. 83 (1977) 36-85

[4] F.T. Farrell and W.C. Hsiang, The topological euclidean space form problem, Inventioness Math 45 (1978) 181-192

[5] ———, Topological characterization of flat and almost flat riemannian manifolds M^n $(n\neq 3,4)$, Preprint

[6] M. Gromov, Almost flat manifolds, J. Diff. Geom. 13(1978) 231-242

[7] M, Hirsch, Expanding maps and transformation groups, Proc. Symp. Pure Math 14, Global analysis 1971, 125-131

[8] Y. Kamishima, Aspherical manifolds for niladmissible classes, Preprint

[9] ———, Topological euclidean space について, 変換群 Symposium 1981

[10] A.I. Mal'cev, On a homogeneous spaces, Amer. Math. Transl. (1) 9, 1951 276-307

[11] J.A. Wolf, Growth of finitely generated solvable groups and curvatute of riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 2 (1968) 421-446

[12] T. Yoshida, Euclidean space form について, 変換群 Symposium 1981

(1981, 8月2日 提出)