数理解析研究所講究録
第437巻 1981年 76-82

$S^2\times\cdots\times S^2$ の対称度について

新潟大理　　渡部 剛

可微分多様体M上に可微分的かつ概効果的に作用するコンパクト連結半単純リー群の最大次元をMの半単純対称度という。

次の定理を証明する。

<u>定理A</u>　Mを単連結 $2m$ 次元閉可微分多様体で2次元球面 S^2 の直積 $S^2\times\cdots\times S^2$（$m$個）の中へ写像度1の連続写像をもつとする。このときMに可微分的かつ概効果的に作用し得るコンパクト連結単純リー群は $SU(2)$ 又は $SO(3)$ である。

<u>定理B</u>　Mを定理Aと同じ、M_0 を単連結可微分多様体で有理的ホモロジー球面でないとする。このとき連結和 $M\# M_0$ の半単純対称度は0である。

以上の結果は連続作用についてもなりたつ。以下コンパクトリー群の作用は連続作用ですべて概効果的とする。多様体は閉位相多様体を意味する。

1. Leray スペクトラル系列

G をコンパクト連結リー群，X をコンパクト連結位相空間で G が X に作用しているとする． $\pi : X \to X/G = X^*$ を軌道写像，$\{E_r^{p,q}, d_r\}$ を π の Leray スペクトラル系列とする。定義により $E_2^{p,q} = H^p(X^*; H^q(\pi))$ で，$H^q(\pi)$ は X^* 上の準層 $U^* \mapsto H^q(\pi^{-1}(U^*) : \mathbb{Q})$（$U^*$ は X^* の open 集合）で生成される層である。特に $E_2^{0,q}$ は $H^q(\pi)$ の section の $\mathbb{Q}$-加群。良く知られている様に $H^q(\pi)$ の $x^* = \pi(x)$ における stalk は $H^q(G(x) : \mathbb{Q})$ edge homomorphism $e : H^q(X : \mathbb{Q}) \to E_2^{0,q}$ は $e(a)(x^*) = i^*(a)$, $i : G(x) \to X$ で与えられる。詳細は [1] を参照．

次の命題が得られる．

命題 1 ([3])　(G, X) を上と同じとする．k を主軌道の次元とし，特異軌道の存在を仮定すれば edge homomorphism e : $H^k(X : \mathbb{Q}) \to E_2^{0,k}$ は自明である．特に $E_\infty^{0,k} = 0$.

証明．最初の部分は slice の存在と X の連結性よりでる．後半は $e : H^k(X : \mathbb{Q}) \xrightarrow[\text{surj}]{} E_\infty^{0,k} \xrightarrow[\text{inj.}]{} E_2^{0,k}$ と分解されることより明らかである．■

この命題より次の各命題が示される．

命題 2．M を 2m 次元多様体で

$$\exists w_1, \ldots, w_m \in H^2(M : \mathbb{Q}) \; ; \; w_1 \cup \cdots \cup w_m \neq 0$$

をみたすとする．SU(2) が M に主軌道 SU(2)/T（T はトーラス）をもつて作用すれば特異軌道は存在しない．

証明. そうでないと仮定する. 命題1より $E_\infty^{0,2}=0$. 任意の $x\in M$ に対して $H^1(SU(2)(x):\mathbb{Q})=0$ より $H^2(M^*:\mathbb{Q})=E_\infty^{2,0}=H^2(M:\mathbb{Q})$ 故に $\exists w_i'\in H^2(M^*:\mathbb{Q})$ $\pi^*(w_i')=w_i$ $(1\le i\le m)$ ∴ $\pi^*(w_1'\cup\cdots\cup w_m')=w_1\cup\cdots\cup w_m=0$. $\pi:M\to M^*=M/SU(2)$
■

命題3 M を 3m 次元多様体で

$$\exists w_1,\dots,w_m\in H^3(M:\mathbb{Q})\ ;\ w_1\cup\cdots\cup w_m\neq 0$$

をみたすとする. SU(2) が有限な主固定群をもって M に作用するとき特異軌道があれば $M(T)=\{x\in M : SU(2)x : \text{トーラス}\}\neq\phi$.

証明 命題1より容易に示される. ■

命題4 M は命題3の性質をもち単連結とする. SU(3)が有限主固定群をもって M に作用すれば必ず特異軌道が存在する.

証明 そうでないと仮定する. M は単連結であるから [2]. 系.1 より. 軌道写像の Leray sheaf $H^q(\pi)$ は自明である. 従って $H^0(M^*:H^3(\pi))=\mathbb{Q}$. 故に $E_\infty^{0,3}$ は高々1次元. 任意の $x\in M$ について $H^i(SU(3)(x):\mathbb{Q})=0$ $i=1,2$ であるから $0\to E_\infty^{3,0}\to H^3(M:\mathbb{Q})\to E_\infty^{0,3}\to 0$ は exact である. $\dim E_\infty^{0,3}\le 1$ より $\exists w_1',\dots,w_m'\in H^3(M:\mathbb{Q})$; $w_1'\cup\cdots\cup w_m'\neq 0$. $w_1',\dots,w_{m-1}'\in E_\infty^{3,0}=H^3(M^*:\mathbb{Q})$. $\dim M^*=\dim M-8$ よりこれは不合理 ■

2. principal S^1-bundles

M を 2m 次元多様体 $f:M\to S^2\times\cdots\times S^2$ (m個) を写像度 L の連続写像とする. $N_i=\underbrace{S^3\times\cdots\times S^3}_{i}\times\underbrace{S^2\times\cdots\times S^2}_{m-i}$ $(i=0,1,\dots,m)$ とし $N_{i+1}\to N_i$ を canonical S^1-bundle とする.

$M_1 = f^{-1}(N_1 \to N_0)$, $f_1 : M_1 \to N_1$ を f を cover する bundle map とする。帰納的に多様体の列 $M, M_1, \dots, M_m$ と写像の列 $f, f_1, \dots, f_m$ が $f_i : M_i \to N_i$ が写像度1、$M_i \xrightarrow{p_i} M_{i-1}$ が principal S^1-bundle で f_{i-1} による $N_i \to N_{i-1}$ の引きもどしとなる様に構成できる。$M_m = \widehat{M}$ とおけば M 上の T^m-bundle である。[4]の定理 4.1 によれば M 上の単連結コンパクト半単純リー群の作用は M_i にもちあげられる。

3. 定理Aの証明

M を単連結 $2m$ 次元多様体、$f : M \to S^2 \times \cdots \times S^2$ (m 個) を写像度1の連続写像とする。$SU(3)$, $Sp(2)$ が M 上に作用しないことを示せばよい。$SU(3)$, $Sp(2)$ についての議論は平行であるから $SU(3)$ のみ考える。

$\varphi : SU(3) \times M \to M$ を作用とする。ψ を $SU(3)$ の部分群 $SU(2)$ への制限 φ_i, ψ_i をそれぞれ §2 の M_i へのもち上げとする。H_φ, H_ψ などで φ, ψ の主固定群とする。次の各場合を別々に考える。

Case 1　$\dim H_{\hat\varphi} = 1$　($\hat\varphi$ は $\widehat{M}$ へのもち上げ)

Case 2　$\dim H_{\hat\varphi} = 0$

Subcase 1　$\hat\varphi$ が特異軌道をもつ

(i) $H^0_\psi = T$　(ii) $H^0_\psi = 1$　(H^0 は H の単位連結成分)

Subcase 2　$\hat\varphi$ が特異軌道をもたない。

Case 1：$\hat\varphi$ が特異軌道をもたなければ、$\hat\varphi$ は唯一つの軌道型 S^2 をもつ。$\pi_1(\widehat{M}) = 1$ より $\widehat{M} = S^2 \times \widehat{M}^*$ となり $H^*(\widehat{M}; \mathbb{Q}) = H^*(\widehat{M}^*; \mathbb{Q})$. これは不合理。$\hat\varphi$ が特異軌道をもてば それは不動点、従って

φも不動点をもつ．これは命題2に反する ■

Case2. Subcase 1 (i)；φが不動点をもてば命題2より不合理．Mは単連結であるから軌道型(A4)はない．従って$M \cong S^2 \times M^*$．必要ならばN_0の因子の順序を入れ換えて$p_1^{-1}(SU(2)(x)) \to SU(2)(x)$がnon-trivial S^1-bundleとしてもよい．$p_1^{-1}(SU(2)(x))$はtransitive $SU(2)$-多様体であるからφ_1は特異軌道をもたない．故に$\tilde{\varphi}$も特異軌道をもたず仮定に反する

■

Case2. Subcase 1 (ii)：φが特異軌道をもつとする．$M(T) = \phi$ならば$H^2(M^*;\mathbb{Q})$と$H^2(M;\mathbb{Q})$は軌道写像により同形となるから不合理．又$\tilde{\varphi}$が固定群Tをもたなければ命題3より不合理．従って$\varphi, \tilde{\varphi}$は主固定群が有限群で軌道型(T)をもつとしてよい．Mの任意のxに対し$i: SU(2)(x) \to M$がtrivial homomorphism $i^*: H^2(M;\mathbb{Q}) \to H^2(SU(2)(x);\mathbb{Q})$を引き起せば$E_\infty^{0,2}$となり不合理．従って$\exists x \in M$: $i^*: H^2(M;\mathbb{Q}) \to H^2(SU(2)(x);\mathbb{Q})$ non-trivial．もち上げφ_1について$p_1(x_1) = x$とすれば$i_1: SU(2)(x_1) \to M_1$に対して$i_1^*: H^2(M_1;\mathbb{Q}) \to H^2(SU(2)(x_1);\mathbb{Q})$がnon-trivial．これは命題1より不合理．次にφが特異軌道をもたないとする．このときは$H^2(M^*;\mathbb{Q}) \cong H^2(M;\mathbb{Q})$となり不合理 ■

Case2. Subcase2；$\tilde{\varphi}$を考える．$\tilde{\varphi}$が特異軌道をもてば$SU(3)$のある部分群$SU(2)$が存在してそれへの制限作用が上に調べた場合のどれかになる．$\tilde{\varphi}$が特異軌道をもたなければ命題4より不合理 ■

注意　以上の議論より次の命題が示された．

命題5　Mを定理Aと同じとする. SU(2)がMに作用すればその作用の$\widehat{M}$へのもち上げはalmost freeである. ■

4. 定理Bの証明

M_1を定理Aの性質をもつとし, $M=M_1 \# M_0$とおく. $G=SU(2)$がMに作用するとする. $\widehat{M}$上へのもち上げを考える. $\widehat{M}$は$(\widehat{M_1}-\mathrm{int}\,D^{2m}\times T^m)\cup_{S^{2m-1}\times T^m}((M_0-\mathrm{int}\,D^{2m})\times T^m)$と位相同型であり, 命題5より$\widehat{M}$上の$G$の作用はalmost freeとなる. 従って[2]のTh.1より$\pi:\widehat{M}\to\widehat{M}/G$のLerayスペクトル系列について$E_2^{p,q}=H^p(\widehat{M}/G:\mathbb{Q})\otimes H^q(S^3:\mathbb{Q})$がなりたつ. このスペクトル系列はcollapseする. 実際$e: H^3(M:\mathbb{Q})\to E_2^{0,3}$が全射でなければ$\dim E_2^{0,3}=1$より$E_\infty^{0,3}=0$. 故に$H^3(\widehat{M}/G:\mathbb{Q})\overset{\pi^*}{\cong}H^3(\widehat{M}:\mathbb{Q})$. これは不合理. $r=\min\{r': H^{r'}(M_0:\mathbb{Q})\neq 0\}$とおき$a', b'\in H^*(M_0:\mathbb{Q})$を$a'\in H^r(M_0:\mathbb{Q})$で$(a'\cup b')[M_0]\neq 0$となるようにとる. Mayer-Vietoris完全列

$$(*)\quad \to H^i(\widehat{M}:\mathbb{Q})\xrightarrow{\alpha} H^i(\widehat{M_1}-\mathrm{int}\,D^{2m}\times T^m:\mathbb{Q})\oplus H^i((M_0-\mathrm{int}\,D^{2m})\times T^m:\mathbb{Q})$$
$$\xrightarrow{\beta} H^i(S^{2m-1}\times T^m:\mathbb{Q})\to$$

を考える. $\alpha(a)=a'\times T^m\in H^{r+m}((M_0-\mathrm{int}\,D^m)\times T^m:\mathbb{Q})$, $\alpha(b)=b'$となる$a, b\in H^*(\widehat{M}:\mathbb{Q})$をとれる. $(a\cup b)[\widehat{M}]\neq 0$が容易に示される. 同型$H^*(\widehat{M}:\mathbb{Q})\cong H^*(\widehat{M}/G:\mathbb{Q})\otimes H^*(S^3:\mathbb{Q})$により$a, b$がそれぞれ$1\otimes a''+w\otimes a'''$, $1\otimes b''+w\otimes b'''$に対応するとする($w$は$H^3(S^3:\mathbb{Q})$の生成元).

$\alpha(w \otimes 1) = y + \sum_j b_j \times T^j$, $y \in H^3(\tilde{M}_1 - \mathrm{int}\, D^{2m} \times T^m : Ⓩ)$, $\sum b_j \times T^j \in H^3($$(M_0 - \mathrm{int}\, D^{2m}) \times T^m)$ とする. $\deg b_j \geqq r$ より $j \leqq 3 - r$. 一方 $\alpha(1 \otimes a'')$ $= x + \sum a_i \times T^i$ とおけば $i \leqq m-3$. T^m の degree を比較することより $a = 1 \otimes a''$. 同様に $b = 1 \otimes b''$ 故に $a \cup b = 1 \otimes (a'' \cup b'') = 0$ となり不合理

文献

[1] G. Bredon, Sheaf theory, McGraw-Hill, New York, 1967

[2] P.E. Conner, Orbits of uniform dimension, Michigan Math. J. 6 (1958) 25-32

[3] D. Burghelea and R. Schultz, On the semi-simple degree of symmetry, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975) 431-440

[4] T.E. Stewart, Lifting group actions in fibre bundles, Ann. of Math. 74 (1961) 192-198