数理解析研究所講究録
第437巻 1981年 88-98

Transformation groups on Z_2-cohomology spheres with a codimension one orbit

東北大 教養　麻生 透

Mをn次元連結閉多様体，Gをコンパクト連結リイ群とし，GのMへの可微分作用 $G\times M\to M$ が与えられ次の条件を満たしていると仮定する。

(AI)　ある軌道 $G\cdot x\ (x\in M)$ が存在して，$\dim G\cdot x=n-1$.

この仮定(AI)をみたす作用(G,M)の分類問題については，Mが球面 S^n (n:偶数≠4 または n:奇数>31)，コホモロジー複素射影空間，コホモロジー四元数射影空間の場合に，それぞれ Wang [5]，内田 [4]，岩田 [3] によって行なわれている。本稿では，Mが Z_2 コホモロジー球面，すなわち

(AII)　Mは単連結かつ $H^*(M;Z_2)\cong H^*(S^n;Z_2)$

の場合について，(AI)をみたす作用(G,M)の分類を行なうのが目的である。

§1. G分解

作用(G, M)が(AI)をみたし，Mは単連結と仮定する。G/Kを主軌道とすると$\dim G/K = n-1$ $(n=\dim M)$で，かつ丁度2つの特異軌道G/K_1, G/K_2が存在して，$K \subset K_1 \cap K_2$と選ぶことができる。さらに可微分スライス定理を用いると，MをG多様体として次の様に分解できる。

$$(*) \quad M = M(\alpha) = X_1 \cup_\alpha X_2, \quad X_s = G \times_{K_s} D^{k_s},$$
$$k_s = n - \dim G/K_s \geqq 2 \quad (s=1,2).$$

ここで，K_sはk_s次元球体D^{k_s}上にスライス表現$\sigma_s : K_s \to O(k_s)$によって作用し，境界$\partial D^{k_s}$上に推移的に作用している。また，$\alpha \in N(K, G)$ (: KのGにおける正規化群) に対して，G同変微分同相写像$\alpha : \partial X_1 = G/K \to G/K = \partial X_2$ $(\partial X_s = G \times_{K_s} \partial D^{k_s} = G/K)$を$\alpha(gK) = g\alpha^{-1}K$ $(g \in G)$と与え，∂X_1と∂X_2を同一視している。

§2. 例

(AI)と(AII)をみたすG作用(G, M)として，$M = S^n$でGがある表現$\psi : G \to SO(n+1)$によって作用する線型作用(G, S^n, ψ)のうちで(AI)をみたすものが考えられる。(例えば，$n+1 = n_1 + n_2$に対して$(SO(n_1) \times SO(n_2), S^n, \rho_{n_1} \oplus \rho_{n_2})$等がある。)またW.C. HsiangとW.Y. Hsiang [2] により次の例が知られている。

例1. 奇数 $r \geq 1$ に対して，(2m-1)次元多様体

$$W^{2m-1}(r) = \{(z_0, z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \,;\, z_0^r + z_1^2 + \cdots + z_m^2 = 0,\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 2\}$$

を考えると，$\mathbb{Z}_2$コホモロジー球面である。$SO(m) \times S^1$ の部分群Gに対して，$W^{2m-1}(r)$上のG作用を

$$(X, x)\cdot(z_0, z_1, \cdots, z_m) = (x^2 z_0,\ (x^r z_1, \cdots, x^r z_m)\,{}^t X)$$

$$((X, x) \in G \subset SO(m) \times S^1,\ (z_0, z_1, \cdots, z_m) \in W^{2m-1}(r))$$

と定義する。このG作用$(G, W^{2m-1}(r))$は

$$G = SO(m) \times S^1,\quad Spin(7) \times S^1\ (m=8)\ \text{または}\ G_2 \times S^1\ (m=7)$$

のとき(AI)を満たす。特に$(G, W^{2m-1}(r))$が線型作用である為の必要十分条件は $r = 1$ である。

例2. $G = S^3 \times S^3\ (= Spin(4))$ の部分群

$$S^1(l, m) = \{(z^l, z^m) \in G = S^3 \times S^3 \,;\, z \in S^1 \subset \mathbb{C}\},$$

$$U(l, m) = S^1(l, m) \cup S^1(l, m)(j, j)\quad (l+m\ \text{は偶数}),$$

$$D^*(8) = \{(x, x) \in G \,;\, x = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

$(l, m$ は互いに素な整数$)$を考える。条件

$$l_s, m_s \equiv 1 \mod 4\ (s=1,2),\quad 0 < l_1 - m_1 \equiv 4 \mod 8,$$

$$l_2 - m_2 \equiv 0 \mod 8$$

をみたす互いに素な整数 $l_s, m_s\ (s=1,2)$ に対して

$$K_1 = U(l_1, m_1),\quad K_2 = U(l_2, m_2),\quad K = D^*(8),$$

とおくとスライス表現 $\sigma_s : K_s \to O(2)$ $(s=1,2)$ が唯一つ定まり，(*)を用いて7次元G多様体を次の様に構成できる。

$$M = M(\alpha_0) = G \times_{K_1} D^2 \cup_{\alpha_0} G \times_{K_2} D^2,$$

$$\alpha_0 = (\alpha_0', \alpha_0'), \quad \alpha_0' = (1+i+j+k)/2.$$

このとき，このG作用 (G, M) は (AI) と (AII) をみたし，効果的な作用 $(SO(4), M)$ を誘導する。とくに $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, -3, 1, 1)$ のとき，(G, M) は線型作用 $(S^3 \times S^3, S^7, S^3\mu_2^{(1)} \otimes \mu_2^{(2)})$ である。

§3. 主定理

我々は次の主定理を得た。

<u>主定理</u>. (G, M) が効果的なG作用で (AI) と (AII) を満たすとき，$k_s = n - \dim G/K_s \geq 2$ $(s=1,2)$ で次の5つの場合 (CI) - (CV) を得る：

(CI) $k_1 + k_2$ は奇数で，(e) $n = k_1 + k_2 - 1$ または (o) $n = 2k_1 + 2k_2 - 3$；

(CII) k_1 と k_2 は共に偶数で，(e) $n = k_1 = k_2$ または (o) $n = k_1 + k_2 - 1$；

(CIII) $k_s = 2$，k_{3-s} は偶数 ($s=1$ または 2) で，$n = 2k_1 + 2k_2 - 3$；

(CIV) $k_1 = k_2 = 2$ で，(e) $n = 4$ または (o) $n = 7$；

(CV) k_1 と k_2 は共に奇数で，$n = \chi(k_1 + k_2 - 2)/2 + 1$ $(\chi = \chi(G/K_1) = \chi(G/K_2) = 1, 2, 3, 4$ または $6)$.

さらに，(CI)(0)で $k_1=2$ または $k_2=2$ の場合と(CIII)の場合には，(G,M)は例1におけるG作用から誘導される効果的な作用と同型である。(CIV)(0)の場合には，$G=SO(4)$で例2における作用であり，その他の場合には(G,M)は線型作用である。

§4. 主定理の証明の概略

この節では，主定理の証明の方針と，とくに(CIV)(0)の場合の証明の概略を述べる。

リイ群Uの部分群HがUにおいて non-homologous to zero のとき $H\not\sim 0$ in U と表わす。U^0を単位元を含むUの連結成分とし，$P(X)=\sum_i \dim H^i(X;\mathbb{Q})t^i$ を空間Xの Poincaré多項式とする。

Mが$\mathbb{Z}_2$コホモロジー球面のとき，MのG分解$(*)$(§1)において(M,X_1,X_2)の Mayer-Vietoris 完全系列を用いると，次の命題を得る。

<u>命題1</u>. (CI) k_1が奇数でk_2が偶数ならば，G/K_2は単連結，G/K_1は orientable かつ $K_1^0\not\sim 0$ in G，さらに

(e) $n=k_1+k_2-1$， $P(G/K^0_{3-s})=1+t^{k_s-1}$ $(s=1,2)$，

(o) $n=2k+1$ $(k=k_1+k_2-2)$， $P(G/K^0_{3-s})=(1+t^{k_s-1})(1+t^k)$ $(s=1,2)$.

(CII) k_1とk_2が共に偶数でG/K_1とG/K_2が共に orientable なら

ば, K°, K_1°, $K_2^\circ \nsim 0$ in G, でかつ

(e) $k_1 = k_2 = n$, $K_1 = K_2 = G$,

(o) $n = k_1 + k_2 - 1$, $P(G/K_{3-s}^\circ) = 1 + t^{k_s - 1}$ $(s=1,2)$.

(CIII) k_1 と k_2 が共に偶数で G/K_1 は orientable, G/K_2 は non-orientable ならば, K°, $K_1^\circ \nsim 0$ in G, $k_1 = 2$, $n = 2k_2 + 1$ で

$$P(G/K_1^\circ) = 1 + t^{2k_1 - 1}, \quad P(G/K_2^\circ) = (1+t)(1+t^{k_2}),$$

$$P(G/K_2) = 1 + t, \quad P(G/K^\circ) = (1+t)(1+t^{2k_2 - 1}).$$

(CIV) k_1 と k_2 が共に偶数で G/K_1 と G/K_2 が共に non-orientable ならば, $K^\circ \nsim 0$ in G, $k_1 = k_2 = 2$ で

(e) $n=4$, $P(G/K_s^\circ) = 1 + t^2$, $P(G/K_s) = 1$ $(s=1,2)$, $P(G/K^\circ) = 1 + t^3$,

(o) $n=7$, $P(G/K_s^\circ) = (1+t^2)(1+t^3)$, $P(G/K_s) = 1 + t^3$ $(s=1,2)$,

$P(G/K^\circ) = (1+t^3)^2$.

(CV) k_1 と k_2 が共に奇数ならば, $\chi(G/K_1) = \chi(G/K_2)\ (=\chi)$, $n = \chi k/2 - 1$ $(k = k_1 + k_2 - 2)$ で

χ が奇数のとき, $k_1 = k_2$, $P(G/K_s) = (1 - t^{n-1})/(1 - t^{\frac{k}{2}})$ $(s=1,2)$,

χ が偶数のとき, $P(G/K_{3-s}) = (1 + t^{k_s - 1})(1 - t^{n-1})/(1 - t^{\frac{k}{2}})$ $(s=1,2)$.

主定理の証明の方針. まず, 命題1をみたす G とその等方部分群 K, K_1, K_2 およびスライス表現 σ_1, σ_2 の可能性をすべて調らであげる。これは 2, 3 の場合を除いて Wang [5] の方法をより精密化することにより行なわれる。次に, 得られた

Gと等方部分群とスライス表現を用いて，(*)によってG多様体$M(\alpha)$ ($\alpha \in N(K,G)$) を構成し，Mが(AII)をみたすか否かをその基本群と$\mathbb{Z}_2$コホモロジー群を計算して確かめる。一方，具体的に$\mathbb{Z}_2$コホモロジー球面上のG作用を与える。すなわち，例1と例2以外の線型作用(G, S^n, ψ)については，Gとその表現ψを具体的に列挙する。これらのG作用の等方部分群を計算することで，最初に得た必要条件がさらに十分条件でもあることがわかり，主定理が証明される。

以下，(CIV)(0)の場合に限って証明の概略を述べる。

準備：コンパクト連結リイ群Uとその連結部分群Hに対し

$$d(U,H) = \dim U - \dim H - 3(r(U) - r(H)) \quad (r: 階数)$$

とおくと，次の補題が成り立つ。

<u>補題1.</u> Uが単純リイ群で$r(U) \geq 2$のとき，$H \subsetneq U$ならば$d(U,H) > 0$。

<u>証明.</u> $2r(H) > r(U)$のときは$\dim U - \dim H - r(U) - r(H) \geq 0$ (cf. [1; IV, Cor.5.4]) より$d(U,H) > 0$を得る。単純リイ群の分類定理より単純リイ群Vに対して

$$r(V)^2 + 2r(V) \leqq \dim V < 4r(V)^2$$

が成り立ち，これを用いると$2r(H) \leqq r(U)$のとき$d(U,H) > 0$が証明できる。

q.e.d.

<u>補題2.</u> コンパクト連結リイ群Uの連結閉部分群Hに対し，$r(U)=r(H)+1$ かつHはUの，次元が正の正規部分群を含まないと仮定する。このとき $\dim U/H = 3-2(c(U)-c(H))$ (c: 中心の次元) ならば，UはいくつかのS^3とトーラス群の essentially direct product (すなわち直積群の離散正規部分群を法とする商群) である。

<u>証明</u>. $r(U)=r(H)+1$ よりUとHを次の様な essentially direct product に分解できる。

$$U = U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_l \circ U', \quad H = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_l \circ H',$$

ここで各U_iは $r(U_i) \geqq 2$ なる単純リイ群，$H_i \subset U_i$ ($1 \leqq i \leqq l$) かつU'とH'はいくつかのS^3とトーラス群の essentially direct product で $c(U')=c(U)$, $c(H')=c(H)$。さらに仮定より $H_i \subsetneqq U_i$ である。したがって

$$\sum_{i=1}^{l} d(U_i, H_i) = \dim U/H - 3 + 2(c(U)-c(H))$$

となり，右辺が0のとき補題1より $l=0$ で補題を得る。

q.e.d.

<u>(CIV)(0)の場合の主定理の証明</u>. まず，作用(G,M)の分類を行なうには次の2つを仮定してよい。

(1) M上のG作用はほとんど効果的である（すなわちKはGの，次元が正の正規部分群を含まない）。

(2) Gは単連結単純リイ群とトーラス群の直積である。

命題2. (CIV)(0)の場合，G/K^0上に推移的に作用するGの極小連結正規部分群$G' \cong S^3 \times S^3$が存在する。したがって，G'へ制限したM上の作用も(AI)を満たす。

証明. VをG/K_1上に自明に作用するGの最大連結正規部分群とすると，

$$G = U \times V, \quad K_1^0 = H \times V \quad (H \subset U)$$

となる。仮定(1)と$K_1/K^0 = S^1$ ($k_1=2$)より$V = 1$またはS^1。命題1 (CIV)(0)よりUとHは補題2の仮定をみたし，したがってUは(故にGも)いくつかのS^3とトーラス群の直積である(仮定(2))。さらに命題(CIV)(0)より$K^0 \sim 0$ in Gかつ$G \cong K^0 \times S^3 \times S^3$。これを用いると，$G/K^0$上に推移的に作用する$G$の$S^3 \times S^3$と同型な正規部分群$G'$を見つけることができる。　q.e.d.

命題1 (CIV)(0)と命題2より，まず

$$G = S^3 \times S^3, \quad K^0 = 1, \quad K_1^0 = S^1, \quad K_2^0 = S^1$$

と仮定して考察する。以下例2で定義した記号を用いる。明らかにK_s^0は$S^1(l_s, m_s)$と共役である($s=1,2$)。さらに，MがZ_2コホモロジー球面でG/K_sが non-orientable より，$l_s, m_s \equiv 1 \bmod 4$かつ$K_s$は$U(l_s, m_s)$と共役であることがわかる。次に，スライス表現$\sigma_s: K_s \to O(2)$を考えると唯一つ定まり，$K = D^*(8)$を得る。これらを用いて$G$多様体を

$$M(\alpha) = G \times_{K_1} D^2 \cup_\alpha G \times_{K_2} D^2 \quad (\alpha \in N(K,G))$$

と構成する。この $M(\alpha)$ は同変微分同相を除いて丁度2つ，$M(1)$ と $M(\alpha_0)$ が定まり，それぞれの基本群は Van-Kampen の定理より

$$\pi_1(M(1)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1(M(\alpha_0)) = 1$$

である。さらに $M(\alpha_0)$ が $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー球面である為の必要十分条件は $(\ell_1 + m_1 + \ell_2 + m_2)/4$ が奇数であることがわかる。

最後に，この $M(\alpha_0)$ 上の $G\ (= S^3 \times S^3)$ 作用は，コンパクト連結リイ群 $\tilde{G} \supsetneqq G$ へほとんど効果的な作用として拡張できないことが確かめられ，我々は (CIV)(b) の場合の主定理を得る。

参考文献

[1] G. E. Bredon : Introduction to Compact Transformation Groups, Pure and Applied Math. 46, Academic Press, 1972.

[2] W. C. Hsiang and W. Y. Hsiang : Differentiable actions of compact connected classical groups I, Amer. J. Math. 89 (1967), 765-786.

[3] K. Iwata : Classification of compact transformation groups on cohomology quaternion projective spaces with codimension one orbits, Osaka J. Math. 15 (1978), 475-508.

[4] F. Uchida: Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits, Japan. J. Math. 3 (1977), 141–189.

[5] H. C. Wang: Compact transformation groups on S^n with an $(n-1)$-dimensional orbit, Amer. J. Math. 82 (1960), 698–748.