

ℓ進体の巡回ℓ拡大の分岐定数について

九大理 末吉 豊

$\mathbb{Q}_p$  を有理ℓ進数体、 $k/\mathbb{Q}_p$  を有限次拡大とし、 $\text{ord}_k$  で  $k$  の正規付値を表わす。 $K/k$  を有限次ガロア拡大、 $G$  をそのガロア群とし、 $G_i = \{\sigma \in G \mid \text{ord}_k(a^\sigma - a) \geq i+1 \text{ for } \forall a \in \mathcal{O}_k\}$  ( $i \geq -1$ ) を第  $i$  次分岐群とする。ここで、 $\mathcal{O}_k$  は  $K$  の整数環を表わす。 $G_i \neq G_{i+1}$  なる整数  $i$  は lower ramification number と呼ばれる。 $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq -1$  に対して、 $i-1 < x \leq i$  のとき、 $G_x = G_i$  と定義し、 $\varphi_{K/k}(x) = \int_0^x (G_0 : G_t)^{-1} dt$  とおく。 $G^{\varphi_{K/k}(x)} = G_x$  とおいて、 $G^t \neq G^{t+\varepsilon}$  for  $\forall \varepsilon > 0$  なる  $t$  を upper ramification number と呼ぶ。ここでは、upper ramification number のことを単に分岐定数ということにする。

$K/k$  が abel 拡大なら、Hasse-Arf の定理により、 $K/k$  の分岐定数はすべて整数、特に  $K/k$  が完全分岐な  $p^m$  次巡回拡大なら、その分岐定数  $t_1 < \dots < t_m$  がすべて自然数である。そこで、 $k$  におよび  $m$  個の自然数  $t_1 < \dots < t_m$  が与えられたとき、 $t_1, \dots, t_m$  がある完全分岐な  $p^m$  次巡回拡大  $K/k$  の分岐定数となるための必要十分条件を求める問題が考えられる。この問題に対して、

次のように Maus ( $k$  が 1 の原始  $p$  乗根  $\zeta_1$  を含まない) 場合、及び、 $k$  が 1 の原始  $p^s$  乗根  $\zeta_s$  を含み、 $\text{ord}_k(\zeta_s - 1) \neq 0 \pmod{p}$  が成り立つ場合) [1]、Miki (一般の場合) [2]、[3] により解答が与えられた。

$e = \text{ord}_k(p)$ ,  $\# \bar{k} = p^f$  (但し、 $\bar{k}$  は  $k$  の剰余体)、 $e' = e/(p-1)$  とおき、 $U = U^0 = \bar{k}$  の単数群、 $U^i = \{u \in U \mid \text{ord}_k(u-1) \geq i\}$ 、 $P(t) = \min(pt, t+e)$  for  $t \geq 0$ 、 $f_k = \{t \in \mathbb{Z} \mid 0 < t < pe', t \neq 0 \pmod{p}\}$  とする。 $\zeta_1 \in k$  のとき、 $\zeta_s \in k$ 、 $\zeta_{s+1} \notin k$  で  $s$  を定め、 $p^e \parallel \text{ord}_k(\zeta_s - 1)$  とすると、[3] の Lemma 17 により、

$$\zeta_s = \sum_{i=0}^{e-1} \zeta_1^{p^i} \cdots \zeta_e, \quad \zeta_e \neq 1, \quad \zeta_i \in U^1$$

なる分解で条件

a)  $\text{ord}_k(\zeta_e - 1) \in f_k \cup \{pe'\}$ .

b)  $\zeta_i \neq 1$  なる  $i$  ( $0 \leq i \leq e-1$ ) に対して、 $\text{ord}_k(\zeta_i - 1) \in f_k$ .

c)  $\zeta_i \neq 1, \zeta_j \neq 1$  なる  $i, j$  ( $0 \leq j < i \leq e$ ) に対して

$$\text{ord}_k(\zeta_i - 1) > p^{i-j} \text{ord}_k(\zeta_j - 1).$$

をみたすものがある。しかも、 $\lambda_i = \text{ord}_k(\zeta_i - 1)$  とおくとき、集合  $\{\lambda_i \mid \lambda_i \neq \infty\}$  は  $k$  のみで定まって、上の分解及び  $\zeta_s$  の選び方によらない。以上の準備の下で、Maus, Miki の結果は次のように述べられる。

定理 (Maus-Miki)  $k/\mathbb{Q}_p$  を有限次拡大、 $t_1 < \cdots < t_m$  を  $m$  個の自然数とする。 $t_1, \dots, t_m$  がある完全分岐な  $p^m$  次巡回拡大  $K/k$

の分岐定数となるための必要十分条件は、 $t_1, \dots, t_m$  が次の条件 i), ii), iii) をみたすことである。

$$i) \quad t_{i+1} \geq P(t_i) \quad \text{for } i=1, \dots, n-1,$$

$$ii) \quad t_i = P(t) \quad \text{for some } t \in \mathbb{N} \text{ ならば、}$$

$$\begin{cases} S_i \in k \text{ のとき、 } i \geq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}, \\ S_i \in k, t \neq e' \text{ のとき、 } i \geq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}. \end{cases}$$

$$iii) \quad t_i = 0 \quad \text{for } i \leq 0 \text{ とおく。}$$

$$iii-1) \quad f=1 \text{ のとき、}$$

ある  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) に対して、次の条件

$$C(j): \begin{cases} t_{j-i} \leq \lambda_{e-i} \quad (0 \leq i \leq l) \\ I = \{i \mid 0 \leq i \leq l, t_{j-i} = \lambda_{e-i}\} \text{ とおくと、} \\ \#I = \begin{cases} \text{odd} & (p=2) \\ 1 & (p \neq 2) \end{cases} \end{cases}$$

が成立すれば、 $m \leq j + s - 1$ 。

$$iii-2) \quad f > 1 \text{ のとき、}$$

ある  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) に対して

$$\begin{cases} t_j \neq P(t_{j-1}) \\ t_j = \lambda_e = pe' \\ t_{j-i} < \lambda_{e-i} \quad (1 \leq i \leq l) \end{cases}$$

が成立すれば、 $m \leq j + s - 1$ 。

Remark: 条件 i), ii) は次のようにもかける。

$$1) t_i \in f_k (S_i \notin k), t_i \in f_k \cup \{pe\} (S_i \in k).$$

$$2) t_i < e' \text{ なら、 } t_{i+1} = pt_i$$

$$\text{又は、 } t_{i+1} > pt_i \text{ かつ } \begin{cases} t_{i+1} \in f_k (S_i \notin k) \\ t_{i+1} \in f_k \cup \{pe\} (S_i \in k), \end{cases}$$

$$3) t_i \geq e' \text{ なら、 } t_{i+1} = t_i + e.$$

ここでは、局所類体論によって  $K$  に対応する  $norm$  の群  $N_{K|k} K^\times = M$  を具体的に 1 つ与えることによって上記定理の ( $K|k$  の) 存在証明の別証明を与える。これは、 $S_i \notin k$  の場合、及び  $S_i \in k$  かつ  $\text{ord}_k(S_i - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$  の場合に Murs が与えた証明の一般化である。

$M$  を  $k^\times$  の部分群、 $K$  を  $M$  に対応する  $k$  上の類体とする。このとき、 $K|k$  が完全分岐な  $p^m$  次巡回拡大で  $t_1, \dots, t_m$  を分岐定数にもつための必要十分条件は

$$d) k^\times / M \text{ は位数 } p^m \text{ の巡回群である。}$$

$$M_i = M k^{\times p^i} \quad (i=0, 1, \dots, m) \text{ とおく。}$$

$$e) M_i \not\supset \cup^{t_i}, M_i \supset \cup^{t_i+1} \quad (i=1, \dots, m).$$

をみたすことである。従って定理の条件 i), ii), iii) をみたす  $t_1, \dots, t_m$  に対して、d), e) をみたす  $M$  を構成すればよい。なお、条件 i), ii), iii) が必要であることは、d), e) および準同型  $\rho_t: \cup^t / \cup^{t+1} \rightarrow \cup^{p(t)} / \cup^{p(t)+1}$ ,  $\rho_t(u \cup^{t+1}) = u^p \cup^{p(t)+1}$  の性質を用いて証明できる。

$$F = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in f_k, y = 1, \dots, f\} & (S_1 \notin k) \\ \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in f_k, y = 1, \dots, f\} \cup \{(pe', 1)\} & (S_1 \in k) \end{cases}$$

とおく。  $\mathbb{Z}_p$ -module  $U'$  の生成元  $\{\eta_{xy}\}_{(x,y) \in F}$  を

$$\begin{cases} \text{ord}_k(\eta_{xy} - 1) = x & \text{for } \forall (x, y) \in F, \\ \eta_{\lambda_i, 1} = \xi_i & \text{for } \lambda_i \neq \infty \text{ if } S_1 \in k, \end{cases}$$

をみたすようにとれば、

$$U' = \begin{cases} \prod_{(x,y) \in F} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} & (\text{直積}) \quad (S_1 \notin k) \\ \prod_{(x,y) \in F - \{(pe', 1)\}} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} \times \langle S_5 \rangle & (\text{直積}) \quad (S_1 \in k) \end{cases}$$

である。

$$F_0 = \begin{cases} f_k & S_1 \notin k \\ f_k \cup \{pe'\} & S_1 \in k \end{cases}$$

$$F_1 = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_r}\} = \{t_i \mid p(t_{i-1}) \neq t_i\}, \quad i_1 < \dots < i_r$$

$$F_2 = \{\lambda_i \mid 0 \leq i \leq \ell, \lambda_i \neq \infty\}$$

とおく。  $\pi$  を  $k$  の一つの素元とする。

(I)  $f=1$  のとき

(A)  $S_1 \notin k$  又は  $S_1 \in k$  かつ  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  のとき

定理 1 今述べた条件の下で、

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z}, 1} \quad (z=1, \dots, r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{\alpha} \quad (\alpha \in F_0 - F_1), \beta_z \quad (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、  $M$  は条件 d), e) をみたす。

(B)  $S_i \in \mathcal{K}$  が  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$  のとき

$E = \{z \mid t_{iz} \in F_1 \cap F_2\}$  とおく。  $t_{iz} = \lambda_i$  のとき、  $i = i(z)$  とかく  
 $\min \{i_z - i(z) \mid z \in E\}$  を与える  $z$  を  $z_1 < \dots < z_\nu$  ( $\nu \geq 1$ ) とする。

補題 1  $\{t_1, \dots, t_m\} \cap F_2 = F_1 \cap F_2$ 。

補題 2 条件

$$C(j): \begin{cases} t_{j-i} \leq \lambda_{l-i} \text{ for } 0 \leq i \leq l \text{ s.t. } j-i \in \{i_z \mid z \in E\}, \\ \text{等号が少くとも 1 か所で成立する。} \end{cases}$$

をみたすような  $j' \leq l$  がただ 1 つ存在する。しかも上の等号の個数は  $\nu$  に等しく、  $j' = l - i(z) + i_z$ 、但し、  $z$  は  $z_1, \dots, z_\nu$  のいずれでもよい、で与えられる。

系 1 もし条件  $C(j)$  をみたす  $j$  が存在するなら  $j = j'$  で  $\nu = \text{odd}$  ( $p=2$ ) 又は  $1$  ( $p \neq 2$ )。

系 2 補題 2 の  $j'$  に対して  $C(j')$  が成り立たないならば、

$$0 \leq r \leq l \text{ s.t. } \begin{cases} j' - r \notin \{i_z \mid z \in E\}, l - r \notin \{i(z) \mid z \in E\} \\ t_{j'-r} > \lambda_{l-r} \end{cases}$$

定理 2 条件 (B) の下で

(B-1)  $\nu = \text{even} \geq 2$  ( $p=2$ )、  $\nu \geq 2$  ( $p \neq 2$ ) のとき、

$a_z \in \mathbb{Z}$  ( $z=1, \dots, r$ ) を

$$\begin{cases} a_z \not\equiv 0 \pmod{p}, a_1 = 1, a_z = 1 \text{ for } z \notin E, \\ \sum_{z \in E} a_z p^{i_z - 1 + l - i(z)} = 0 \end{cases}$$

をみたすようにとり、

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z}, 1} \quad (z=1, \dots, r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-a_z \cdot p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle \mathbb{k}^{\times p^m}, \pi, \eta_{x_1} (x \in F_0 - F_1), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(B-2)  $v = \text{odd}$  ( $p=2$ ),  $v=1$  ( $p \neq 2$ ) で条件  $C(\ell - i(z) + i_z)$  が成り

立っているとき、

仮定より、 $\ell - i(z) + i_z + s - 1 \geq m$  である。このとき、 $M$ を定理 1 と同様に定義すれば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(B-3)  $v = \text{odd}$  ( $p=2$ ),  $v=1$  ( $p \neq 2$ ) で条件  $C(\ell - i(z) + i_z)$  が成り

立たないとき、

$\alpha_z, \beta_z$  を定理 1 と同様に定義し、系 2 の  $h$  を用いて、

$$\eta = \eta_{\lambda_{e-h}, 1} \alpha_1^{\sum_{z \in E} p^{i_z-1} + \ell - i(z) - h}$$

$$M = \langle \mathbb{k}^{\times p^m}, \pi, \eta_{x_1} (x \in F_0 - F_1 - \{\lambda_{e-h}\}), \eta, \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(II)  $f > 1$  のとき

定理 3 (A')  $\lambda_r \neq pe'$  又は  $t_{ir} \neq pe'$  のとき、

$$F_3 = \begin{cases} \{(t_{i_z}, f) \mid z=1, \dots, r\} & (t_{ir} \neq pe') \\ \{(t_{i_z}, f) \mid z=1, \dots, r-1\} \cup \{(pe', 1)\} & (t_{ir} = pe') \end{cases}$$

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z}, f} \quad (z=1, \dots, r-1), \quad \alpha_r = \begin{cases} \eta_{t_{ir}, f} & (t_{ir} \neq pe') \\ \eta_{pe', 1} & (t_{ir} = pe') \end{cases}$$

$$\beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle k^{p^m}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_3), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(B')  $t_{ir} = pe' = \lambda_e$  のとき

$$F_4 = \{(t_{iz}, 1) \mid z=1, \dots, r\} \text{ とおく。}$$

(B'-1)  $1 \leq \forall i \leq l$  に対し、 $t_{i, i-1} \leq \lambda_{e-i}$  で等号の成り立つ  $i$  が少くとも 1 つあるとき

$E$  を  $f=1$  のときと同様に定義し、 $\alpha_z, \alpha_z, \beta_z$  を定理 2 (B-1) のときと同様にとり、

$$M = \langle k^{p^m}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(B'-2)  $1 \leq \forall i \leq l$  に対し、 $t_{i, i-1} < \lambda_{e-i}$  が成り立つとき

仮定より  $i_r + s - 1 \geq m$  が成り立つ。 $\alpha_z, \beta_z$  を定理 2 (B-2) のようにとり、

$$M = \langle k^{p^m}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。

(B'-3)  $1 \leq h \leq l$  で  $t_{i, i-h} > \lambda_{e-h}$  なる  $h$  が存在するとき

$\alpha_z, \beta_z, \eta$  を定理 2 (B-3) のようにとり、

$$M = \langle k^{p^m}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4 - \{(\lambda_{e-h}, 1)\}), \eta, \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 $M$ は条件 d), e) をみたす。



## 参 考 文 献

- [1] E. Maus , Existenz  $p$ -adischer Zahlkörper zu vorgegebenem Verzweigungsverhalten , Dissertation , Hamburg , 1965
- [2] H. Miki , 局所体の分岐定数について , 第25回代数学シンポジウム , 1979. 8. 27-30 , 北大.
- [3] H. Miki , On the ramification numbers of cyclic  $p$ -extensions over local fields , J. Reine Angew. Math. , to appear.