

$\mathbb{Q}_{ab}$  の不分岐拡大について

東大 理 朝田 衛

§. 1 問題の背景

複素数体或いは有限体の代数閉包上の一変数代数函数体上の不分岐 Galois 拡大体、特にその最大不分岐 Galois 拡大体の Galois 群については、幾何学的考察によってその様子をかなり記述することができることはよく知られている。しかしながら、同様のことを代数体について考えるとき類似の結果は今のまでのところ殆ど何も得られていないと言つてよいと思われる。ここで考察の対象を有限次代数体にすると、不分岐拡大をそれ自身以外には持たない体（有理数体や Gauss の数体など）や、その最大不分岐 Galois 拡大体が無限次になる体（類体塔の例）などいろいろであつて複雑である。函数体の場合には定数体が代数閉体であることにより簡明な結果が得られたこと、代数体（特に有理数体）において定数体の代数閉包の類似として有理数体に 1 の  $p$  中乗根を添加した体をとる

ことにより、 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の理論が成功していること、などを考  
 えばこの問題についても考察の対象を有限次代数体ではな  
 く、有理数体に1の中根をすべて添加した全円分体にすれば、  
 函数体と類似の結果が得られるのではないかと空想できる。  
 実際のところはそのようなことは何もできていないのである  
 が、この小文ではこのような立場に立って有理数体に1の中  
 根をすべて添加して得られる体  $\mathbb{Q}_{ab}$  の不分岐 Galois 拡大体に  
 ついて考察した結果を述べる。

### §.2 予備的な結果

$\mathbb{Q}$ : 有理数体

$\mathbb{Q}_{ab}$ :  $\mathbb{Q}$  の最大 Abel 拡大体、即ち  $\mathbb{Q}$  に1の中根をすべて添加  
 して得られる代数体

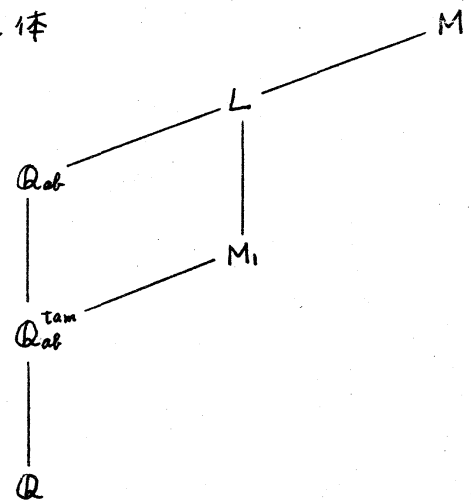
$\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$ :  $\mathbb{Q}$  に1の素数乗根をすべて添加して得られる代数体

$M$ :  $\mathbb{Q}_{ab}$  の最大不分岐 Galois 拡大体

$M_1$ :  $\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$  の最大不分岐 Galois 拡大体

$L$ :  $\mathbb{Q}_{ab}$  と  $M_1$  との合成体

とする。  $L$  は  $M$  の部分体である。  
 $M$  も  $M_1$  も  $\mathbb{Q}$  上の Galois 拡大体であ  
 り、従って  $L$  も  $\mathbb{Q}$  上の Galois 拡大  
 体である。又、容易にわかるよう  
 に  $\mathbb{Q}_{ab} \cap M_1 = \mathbb{Q}_{ab}^{tam}$  である。



$M$  の  $\mathbb{Q}_{ab}$  上の Galois 群、或いは  $M$  の  $L$  上の Galois 群等については今までのところ殆ど何もわかっていないと言っておくと思われる。そこでここでは  $M/L$  の中間体の実例を構成することにより、少しでも  $M$  の  $L$  上の Galois 群の性質を明らかにしようと試みる。 $M/L$  の中間体、即ち  $L$  の不分岐拡大体を実際に構成するには、ここではまず、 $\mathbb{Q}$  上の有限次 Galois 拡大体で  $\mathbb{Q}_{ab}$  と合成したときに  $M$  に含まれるものを構成する。その際には次の命題が基本的である。

#### 命題 1

$K$  を  $\mathbb{Q}$  上の有限次 Galois 拡大体とする。このとき、 $K\mathbb{Q}_{ab}$  が  $M$  に含まれるための必要十分条件は、 $K$  のすべての素因子について、その分解群が Abel 群となることである。

(証略)

そこで、この命題の条件を満たすような  $K$  を構成するのであるが、ここではそれをうまい形の  $\mathbb{Q}$  上の方程式の最小分解体として構成する。ここで注意すべきことは、目標とするところが  $L$  の (自明でない) 不分岐拡大体を構成することにあるのであるから、 $K\mathbb{Q}_{ab}$  が  $M$  に含まれ、しかも  $L$  に含まれないように  $K$  を構成しなければならない。このことを念頭におきつつ、ここでは  $f(x) = x^{\ell} + ax^2 + b$  ( $\ell$  は 5 以上の素数、 $a, b$  は有理整数) という形の方程式を採用する。 $a, b$  にいくつ

かの条件を満足させることにより、次の命題が証明される。

命題2

$l$  を5以上の奇素数、 $p$  を奇素数で  $p \neq l(l-2)$  なるものとする。このとき、次の条件を満たす  $K$  が存在する。

- (i)  $K$  は  $\mathbb{Q}$  上の有限次 Galois 拡大体でその Galois 群  $G(K/\mathbb{Q})$  は  $S_l$  ( $l$  次対称群) に同型である。更に  $K$  のすべての素因子について、その分解群は Abel 群となる。
- (ii)  $K$  に含まれる (唯一の) 2次体  $\mathbb{F}_2$  で2は分岐する。
- (iii)  $p$  は  $\mathbb{F}_2$  で分岐する。

(証略)

条件 (iii) を利用することにより、これより直ちに次の定理を得る。

定理1

$l$  を5以上の素数とする。このとき次の条件を満たす  $\mathbb{Q}$  上の Galois 拡大体の列  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する。

- (i)  $G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq S_l$  で  $K_n$  のすべての素因子についてその分解群は Abel 群となる ( $n \geq 1$ )。
- (ii) 2 は  $K_n$  に含まれる唯一の2次体で分岐する。
- (iii)  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\mathbb{Q}$  上 "独立" である、即ち
 
$$[K_1 \cdots K_m : \mathbb{Q}] = [K_1 : \mathbb{Q}] \cdots [K_m : \mathbb{Q}] \quad \forall m \geq 1$$
 が成り立つ。

(証略)

さて、このようにして得られた  $K_n$  たちが  $\mathbb{Q}_{ab}$  上の不分岐拡大体を生成することは命題 1 によりわかるが、次に問題となるのは、それらが  $L$  に含まれないか、即ち  $L$  上自明でない不分岐拡大体を生成するかということである。それは次に述べるように実際肯定的である。即ち、 $E_n = K_n L$  ( $n \geq 1$ ) とおくと

定理 2

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $A_\ell$  ( $\ell$  次交代群) を  $L$  上の Galois 群とするように互いに相異なる体の列である。

証明は省略するが次のことを注意しておく。それは  $E_n$  が  $L$  に含まれないのは  $K_n$  についての条件 (ii) が本質的である、ということである。即ち、 $K_n$  は  $\mathbb{Q}_{ab}$  と合成すれば 2 次体が  $\mathbb{Q}_{ab}$  に吸収されて  $\mathbb{Q}_{ab}$  上の Galois 群は  $A_\ell$  となるが、 $\mathbb{Q}_{ab}^{\text{tam}}$  と合成しても 2 次体は吸収されず  $\mathbb{Q}_{ab}^{\text{tam}}$  上の Galois 群は  $S_\ell$  のまみである。このことに留意すれば定理 2 は純体論的に証明される。

定理 2 を言い換えば、非可換単純群  $A_\ell$  が  $G(M/L)$  の商群として無限通りの現われかたをするということである。又、特に、 $G(M/L)$  は位相群として有限生成でないということもわかる。

以上で得られた結果の説明を終るが、最後に定理 1, 2 は、同様の方法を用いることによつて、 $\ell = 3, 4$  の場合にも全く

同じ結果が成り立つことが証明されることを一言付け加えておく。

### §.3 今後の展望など

今後の展望といってもあまりはっきりしたものはない。函数体の類似を狙って問題を設定してはみたものの、果たして  $G(M/L)$  或いは  $G(M/\mathbb{Q}_{ab})$  などの群が比較的わかりやすい構造を持っているのかどうか、定かではない。しかしながら思いつくままに問題をあげるならば

- $M/L$  の中間体をもっといろいろと構成することが出来るか。欲を言えば、その構成法として方程式の分解体といった代数的な方法ではなく、幾何学的或いは解析的なところから生じるような例を見つけられないか。
- $G(M/L)$  或いは  $G(M/\mathbb{Q}_{ab})$  が何か“自然な”表現を持たないか。などが考えられると思われる。その他にもいろいろと考えられるであろうが、いずれにせよ問題が発展することを期待する。

### 参考文献

[1] 藤崎源二郎 不分岐な Galois 拡大の例について

数学 9 (1957) 97

[2] Y. Yamamoto On unramified Galois extensions of quadratic number fields Osaka J. Math. 7 (1970) 57-76

尚、本文の内容は筆者の修士論文による。