

metacyclic 群の整数係数群環の Zeta 函数について

筑波大

広中由美子

60. 最近、Solomon [6] が、整環上の与えられた格子の部分格子を数えあげると Zeta 函数を導入した。次の如きものである。 Σ を有理数体 \mathbb{Q} 又は p 進数体 \mathbb{Q}_p 上の半単純多元環 (p は常に有理素数を表わす), Λ を Σ の (Σ に対応して) Σ -整環又は \mathbb{Z} -整環 (\mathbb{Z} は p 進整数環), V を有限生成左 Σ -加群, $L \in V$ の full Λ -格子とする。このとき,

$$Z_{\Lambda}(L; s) = \sum_N (L: N)^{-s},$$
 ここで和は L 内の full Λ -部分格子 N 全体を動く。 $(L: N)$ は指数を表わし、 s は複素変数である。 Λ が明らかならば略すこともある。 Σ が体 K で L が K の整数環のときは、Dedekind Zeta 函数と一致する。これを $Z_L(s)$ とかく。又、 Λ が極大整環で $L = \Lambda$ の場合は Hey によつて、Dedekind Zeta 函数を用いた記述が得られる。

有限群 G の整数係数群環 $\mathbb{Z}G$ についてこの Zeta 函数 $Z(\mathbb{Z}G; s)$ を調べることは、整数表現との関わりにおいて興味あること

とと思われる。極大整環との差を具体的に記述することは問題となる。

C_n の n 次巡回群を表わす。今まで知られていたのは、 $G = C_p$ または C_{p^2} のときの $\zeta_G(ZG; s)$ だけである ([6], [5])。こゝでは、次の形の群について具体的に記述することを目的とする。

q は素数、 m は平方因子なしの q と素な整数とする。

C_n の C_q による半直積 $C_n \cdot C_q$ で、 C_q は C_n の各 p -Sylow 部分群に忠実に作用しているもの。

証明の詳細などは [3] を参照されたい。

§1. 準備 ([1], [6] 参照)

$$(1.1) \Lambda \text{ が } \mathbb{Z}\text{-整環のとき } \zeta_\Lambda(L; s) = \prod_p \zeta_{\Lambda_p}(L_p; s)$$

こゝで p は全 \mathbb{Z} の有理素数を動き、添字 p は p -進完備化を表わす。

(1.2) $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ (整環として) ならば、 Λ -格子 L は自然にある $L_1 \oplus L_2$ と同型となり (L_i は Λ_i -格子),

$$\zeta_\Lambda(L; s) = \zeta_{\Lambda_1}(L_1; s) \zeta_{\Lambda_2}(L_2; s).$$

(1.3) Λ が極大整環のときは、Hey の公式 ([2] 参照) で与えられる。局所単純の場合を記しておく。 F を \mathbb{Q}_p の有限次拡大体とし、その整数環を R と書く。 D を中心 F の斜体、 $e^2 = [D:F]$ とし、 D の極大整環を Δ と書く。 $M_m(D)$ の極大整環 \mathcal{O} は $M_m(\Delta)$ と同型で、有限次左 $M_m(D)$ -加群は D^{km} の形で、こゝの full

m -格子は $L = \Delta^{km}$ に同型である。このとき

$$\zeta_{me}(L; s) = \prod_{i=0}^{k-1} \zeta_R(mes - ei).$$

特に $e = m = k = 1$ の場合が、普通の Dedekind Zeta 函数である。

(1.4) $\frac{\zeta_{\Lambda_p}(\Lambda_p; s)}{\zeta_{mp}(mp; s)}$ は p^{-s} の \mathbb{Z} -係数多項式である。これは Solomon

が予想 ([6]) し、Bushnell と Reiner が肯定的に解いた ([1])。

(1.5) Λ を \mathbb{Z}_p -整環とし、 $\mathbb{Q}_p L$ の full Λ -格子の同型類の代表系を \mathcal{P} とすると、

$$\zeta_{\Lambda}(L; s) = \sum_{M \in \mathcal{P}} \zeta_{\Lambda}(L, M; s)$$

$$\zeta_{\Lambda}(L, M; s) = \sum_N (L:N)^{-s}, \quad \text{ここで } N \text{ は } \mathbb{Q}_p L \text{ の } M \text{ と}$$

同型な Λ -格子 N 全体を動く。

(1.6) 環 R を Γ とし、 R^{\times} をその単数群を表わす。 Λ をある半単純 \mathbb{Q}_p -多元環 Σ の \mathbb{Z}_p -整環、 L と M を Σ の full Λ -格子とする。

このとき

$$\zeta_{\Lambda}(L, M; s) = \mu(\text{Aut}_{\Lambda}(M))^{-1} (M:L)^s \int_{\{M:L\} \cap \Sigma^{\times}} \|x\|_{\Sigma}^s d^{\times} x$$

と書ける。ここで、 $(M:L) = (M:M \cap L) / (L:M \cap L)$, $\{M:L\} = \{x \in \Sigma \mid Mx \subseteq L\}$, $x \in \Sigma^{\times}$ かつ $\|x\|_{\Sigma} = (Lx:L)$, $d^{\times} x$ は Σ^{\times} 上の Haar 測度、 d^{\times} は測度を $\mu(\quad)$ と書き、極大整環の測度 $\varepsilon 1$ としおく。

§2. 巡回群の場合.

$\varepsilon_d \in 1$ の原始 d 乗根, $\varphi(\cdot)$ は Euler 函数とする。

$$(2.1) \quad \zeta(\mathbb{Z}C_p; s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_p]}(s) \cdot (1 - p^{-s} + p^{1-2s}) \quad [6]$$

この式は [1] で、§1 の方法 (1.5), (1.6) に基づいて導出されており、この方法を用いると次の簡単な一般化が得られる。

命題 2.2. n を平方因子なしの整数, 各 $p|m$ と $d | \frac{n}{p} \neq 1$ として

$g_d \in \mathbb{Z}[\varepsilon_d]$ の (p) 上の相異なる素 ideal の個数, $f_d = \varphi(d)/g_d$ とすれば

$$\zeta(\mathbb{Z}C_n; s) = \prod_{m|m} \zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_m]}(s) \prod_{p|m} \prod_{d|\frac{n}{p}} (1 - p^{-f_d s} + p^{f_d(1-2s)})^{g_d}$$

証明. 各 $p|m \neq 1$ として

$$\mathbb{Z}_p C_n = \bigoplus_{d|\frac{n}{p}} (\mathbb{Z}_p[\varepsilon_d] C_p)^{g_d} \text{ と } \mathbb{Z}_p\text{-群環として分解可能なため.}$$

(1.2) から、 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\varepsilon_d] C_p \neq 1$ として決めればよい。(1.5) の \mathcal{M} と $\mathbb{Z}\{\Lambda, \mathbb{Z}_p[\varepsilon_d] \oplus \mathbb{Z}_p[\varepsilon_{dp}]\}$ を採ると \mathcal{M} が \mathbb{Z} となり、以下は [1] と同様の方法で

$$\zeta_{\Lambda}(\Lambda; s) = \frac{1 - p^{-f_d s} + p^{f_d(1-2s)}}{(1 - p^{-f_d s})^2} \text{ が得られ、これらを用いて}$$

は \mathcal{M} を \mathbb{Z} ((1.1) (1.3))、(2.2) を得る。

§3. $C_n \cdot C_q$ の場合

q は素数, n は平方因子なしの q と素な整数とする。 G は C_n の C_q による半直積 $C_n \cdot C_q$ であり, $H = C_q$ が C_n の各 p -Sylow 部分群に忠実に作用してなる群とする。

$$G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^q = 1, \tau\sigma = \sigma^r\tau \rangle,$$

ここで, r は n の各素因子 p について, p 進法として 1 の原始 q 乗根である。各 $d \mid n$ について, H は $\mathbb{Q}(\varepsilon_d)$ に, $\tau \cdot \varepsilon_d = \varepsilon_d^r$ で作用する。 $K_d = \mathbb{Q}(\varepsilon_d)^H$ (不変体), K_d の整数環を R_d とする。

(1.1), (1.3) から次の式を得る。

$$(3.1) \quad \zeta(\mathbb{Z}G; s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \zeta_{\mathbb{Z}[C_q]}(s) \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \prod_{i=0}^{q-1} \zeta_{R_d}(qs-i) \times \prod_{p \mid nq} \frac{\zeta(\mathbb{Z}_q G; s)}{\zeta(\mathbb{M}_p; s)}.$$

ここで, $\mathbb{M}_p = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[C_q] \oplus \bigoplus_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \mathbb{M}_q(R_d)$ は極大整数環である。
また,

$$\mathbb{Z}_q G = \bigoplus_{d \mid n} \left(\mathbb{Z}_q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[C_d] \circ H \right) = \mathbb{Z}_q H \oplus \left[\bigoplus_{\substack{d \mid n \\ d \neq 1}} \mathbb{Z}_q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[C_d] \circ C_q \right]$$

と, \mathbb{Z}_q -整数環として分解し, 後者の因子は極大整数環であるから,

$$(3.2) \quad \frac{\zeta(\mathbb{Z}_q G; s)}{\zeta(\mathbb{M}_q; s)} = 1 - q^{-s} + q^{1-2s}.$$

一方, $p \mid n$ については,

$$\mathbb{Z}_p G = \mathbb{Z}_p (C_p \cdot H) \oplus \bigoplus_{\substack{d|p \\ d \neq 1}}^n \left[\mathbb{Z}_p [\mathbb{Z}_d] \circ (C_p \cdot H) \right]^{\mathfrak{g}_d}$$

と \mathbb{Z}_p -整環として分解する。但し、 \mathfrak{g}_d は R_d の (p) 上の相異なる素 ideal の個数とし、 $\mathbb{Z}_p [\mathbb{Z}_d] = \mathbb{Z}_p [X] / (\Phi_d(X))$ とし、 $\Phi_d(X)$ は、 \mathbb{Z}_p 上の、最高次係数が 1 で、各 i ($1 \leq i \leq d$) について $\Phi_d(\varepsilon_d^{r_i}) = 0$ なる最小の多項式である。従って、

(3.3) $\zeta(\mathbb{Z}_p G; s)$ を求めるには、 $\zeta(\mathbb{Z}_p (C_p \cdot H); s)$ と $\zeta(\mathbb{Z}_p [\mathbb{Z}_d] \circ (C_p \cdot H); s)$ を扱えばよい。

以後、この節の終わりにまで $\Lambda = \mathbb{Z}_p (C_p \cdot H)$ とし、 $K = K_p$, $R = R_p$ と書き、 p -進完備化を \wedge をつけて表わす。

$q | p-1$ であるから、 $\mathbb{Z}_p H = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p e_q$ と、中等元 e_i によつて分解し、従つて

$$\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda e_q = \mathbb{Z}_p C_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p C_p e_q$$

と、 Λ -格子として分解する。

$$N_0 e_i = \mathbb{Z}_p e_i \oplus \mathbb{Z}_p [\varepsilon_p] e_i, \quad N_1 e_i = \mathbb{Z}_p C_p e_i$$

とあると、これは Λ -格子である。

$\mathbb{Q}_p \Lambda$ 内の、full Λ -格子の同型類は 2^q 個で、そのものを代表とせよ。

$$L(\delta_1, \dots, \delta_q) = N_{\delta_1} e_1 \oplus \cdots \oplus N_{\delta_q} e_q, \quad \delta_i = 0 \text{ また } 1.$$

こゝで、 $\Lambda = L(1, \dots, 1) \leq L(\delta_1, \dots, \delta_q) \leq L(0, \dots, 0)$ ($= N$ とおく) である。

従つて $\mathbb{Z}_p H \oplus \mathbb{Z}_p [\varepsilon_p] \cdot H$ と整環として分解し、 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p [\varepsilon_p] \cdot H$ は、

$M_q(\hat{R})$ の Hereditary 整環であるから、 $\pi \in \hat{R}$ の素元とすると、

$$\mathcal{O} = \{(x_{ij}) \in M_q(\hat{R}) \mid i < j \text{ ならば } x_{ij} \in \pi \hat{R}\} \text{ としよ。}$$

必要なら e_i を並べかえよ。

$$\Lambda = \{(x_1, \dots, x_q; (y_{ij})) \in \mathbb{Z}_p^q \oplus \mathcal{O} \mid x_i \equiv y_{ii} \pmod{\pi \hat{R}}, 1 \leq i \leq q\}$$

と同一視しよ。

補題 3.4. $L = L(\delta_1, \dots, \delta_q)$, $r = \sum_{i=1}^q \delta_i$ とすると、

i) $(L : \Lambda) = p^{q-r}$

ii) $\mu(\text{Aut}_\Lambda(L))^{-1} = \prod_{i=1}^q \left(\frac{p^i - 1}{p - 1} \right) \times (p - 1)^r$

証明. i) は $(N_0 e_i : N_1 e_i) = p$ より明らか。ii) は $\text{End}_\Lambda(L)$ の各元 f が、

$$(a_1, \dots, a_q; (b_{ij})) \in \mathbb{Z}_p^q \oplus M_q(\mathbb{Z}_p[\epsilon_p]), \quad b_{ij} \in \hat{R}, \quad i < j \text{ ならば } b_{ij} \in (\epsilon_p - 1)\mathbb{Z}_p[\epsilon_p]$$

$$\delta_i = 1 \text{ ならば } a_i \equiv b_{ii} \pmod{\pi \hat{R}}$$

による。一意的に与えられることからわかる。

$$F = \mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p \cong \hat{R} / \pi \hat{R} \text{ とし、 } a_i \in F \ (1 \leq i \leq q) \text{ としよ。}$$

$$\tilde{\Delta}(a_1, \dots, a_q) = \{(x_1, \dots, x_q; (y_{ij})) \in \Lambda \mid x_i \pmod{p\mathbb{Z}_p} = y_{ii} \pmod{\pi \hat{R}} = a_i, 1 \leq i \leq q\}$$

$$\Delta(a_1, \dots, a_q) = \{(y_{ij}) \in \mathcal{O} \mid y_{ii} \pmod{\pi \hat{R}} = a_i, 1 \leq i \leq q\}$$

とよ。

補題 3.5. i) $L = L(\delta_1, \dots, \delta_q)$, $r = \sum_{i=1}^q \delta_i$ とすると

$$\{L : \Lambda\} = \bigcup_{\substack{a_i \in F \text{ if } \delta_i = 1 \\ a_i = 0 \text{ if } \delta_i = 0 \\ 1 \leq i \leq q}} \tilde{\Delta}(a_1, \dots, a_q) \quad (\text{disjoint union})$$

$a_i \in F$ ($1 \leq i \leq q$) とし, $k = \#\{i \mid a_i = 0, 1 \leq i \leq q\}$ とする.

$$ii) \int_{\Delta(a_1, \dots, a_q) \cap GL_q(\hat{K})} \|x\|_{M_q(\hat{K})}^s d^x x = \int_{\Delta(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0) \cap GL_q(\hat{K})} \|x\|_{M_q(\hat{K})}^s d^x x$$

$$iii) \int_{\tilde{\Delta}(a_1, \dots, a_q) \cap \mathbb{Q}_p^\times} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^\times}^s d^x x = \frac{1}{(p^s - 1)^q - k (p - 1)^k} \int_{\Delta(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0) \cap GL_q(\hat{K})} \|x\|_{M_q(\hat{K})}^s d^x x$$

証明. i) は定義に従って計算する. ii) は, ある $A, B \in GL_q(\hat{K})$ が存在して $A \Delta(a_1, \dots, a_q) B = \Delta(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0)$ とする = とに基く.

iii) は, $Z(a_i) = \{z \in \mathbb{Z}_p \mid z \bmod p \mathbb{Z}_p = a_i\}$ とおくと,

$$\tilde{\Delta}(a_1, \dots, a_q) = Z(a_1) \oplus \dots \oplus Z(a_q) \oplus \Delta(a_1, \dots, a_q)$$

とすることからわかる.

次の記号を用いる.

$$\Sigma_n = M_n(\hat{K}), \quad \Gamma_n = \{(x_{ij}) \in M_n(\hat{K}) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ かつ } x_{ij} \in \pi \hat{K}\}$$

$$E_n = \Gamma_n^\times = \{(x_{ij}) \in \Gamma_n \mid x_{ii} \in \hat{K}^\times, 1 \leq i \leq n\}$$

$$d_n = \mu(E_n) = \prod_{i=1}^n \frac{p-1}{p^i-1}$$

$0 \leq k \leq n$ なる k について,

$$\Delta_n(k) = \left\{ (x_{ij}) \in \Gamma_n \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \text{ かつ } x_{ii} \in \hat{K}^\times \\ k+1 \leq i \leq n \text{ かつ } x_{ii} \in \pi \hat{K} \end{array} \right\}.$$

E_n は左乗法で $\Gamma_n \cap \Sigma_n^\times$ に作用する. その代表系として次の

もの \mathcal{M} とする. $T_m = \bigcup_{\sigma \in S_m} T_{m, \sigma}$ (S_m は m 次対称群), $T_{m, \sigma}$

は次の条件をみたす $(x_{ij}) \in \Sigma_n^\times$ の全体

i) $1 \leq j \leq m-1$ について $\chi_{\sigma(j)}, j = \pi^{m_j} \implies z_i, \sigma(j) \geq j$ ならば $m_j \geq 0$,
 $\sigma(j) < j$ ならば $m_j \geq 1$

ii) $j+1 < i < n$ について $\chi_{\sigma(i)}, j = 0$

iii) $1 \leq i \leq j-1$ について $\chi_{\sigma(i)}, j$ は下の剰余群の代表全体を動く

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi \hat{R} / \pi^{m_j+1} \hat{R} & \sigma(i) < j \text{ かつ } \sigma(i) < \sigma(j) \text{ のとき} \\ \hat{R} / \pi^{m_j+1} \hat{R} & j \leq \sigma(i) < \sigma(j) \text{ のとき} \\ \pi \hat{R} / \pi^{m_j} \hat{R} & \sigma(j) < \sigma(i) < j \text{ のとき} \\ \hat{R} / \pi^{m_j} \hat{R} & \sigma(i) \geq j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j) \text{ のとき} \end{array} \right.$$

$\implies z_i, m_j (1 \leq j \leq m)$ は i) のときがある。

上の (χ_{ij}) について $\det(\chi_{ij}) = \pm p^{\sum_{j=1}^m m_j}$ である。

補題 3.6. $n \geq 1$ は整数とする。

i) 最高次の項が $p^{\frac{n(n-1)}{2}} X^n$, 最低次の項が X である \mathbb{Z} 上の多項式 $E_n(X)$ があって、

$$\int_{\Delta_n(0) \cap \Sigma_n^x} \|x\|_{\Sigma_n}^s d^x x = \frac{d_n E_n(p^{-ns})}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 - p^{i-ns})}$$

ii) 各 $k (0 \leq k \leq n-1)$ について

$$\int_{\Delta_n(k) \cap \Sigma_n^x} \|x\|_{\Sigma_n}^s d^x x = \frac{d_n E_{n-k}(p^{k-ns})}{\prod_{i=k}^{n-1} (1 - p^{i-ns})}$$

証明. i) E_n は $\Delta_n(0) \cap \Sigma_n^x$ に作用し、 $T_n \cap \Delta_n(0)$ がその代表系をなすのである。

$$i) \text{ の左辺} = \mu(E_n) \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{M \in T_{n,\sigma} \cap \Delta_n(0)} \|\det M\|_{\hat{K}}^{-ns} \dots \quad (*)$$

とある。各 j ($1 \leq j \leq n$) に対し $2, \sigma(j) > j$ ならば $m_j \geq 0, \sigma(j) \leq j$ ならば $m_j \geq 1$ とする。更に, $t_j = \#\{i \mid 1 \leq i \leq j-1, j < \sigma(i) < \sigma(j)\}$
 $v_j = \#\{i \mid 1 \leq i \leq j-1, \sigma(j) < \sigma(i) \leq j\}$ とする。集合

$$\{(x_j) \in T_{m, \sigma} \cap \Delta_m(0) \mid x_{\sigma(j)}, j = \pi^{m_j} \ (1 \leq j \leq n)\}$$

の中を、異なる σ の列のとき方は, $p^{(j-1)m_j} p^{t_j - v_j}$ である。(*)
 に代入すると

$$i) \text{ の左辺} = d_m \sum_{\sigma \in S_m} \frac{p^{c_\sigma} (p^{-m})^{e_\sigma}}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 - p^{i-m})}$$

$= z_n \cdot e_\sigma = \#\{j \mid 1 \leq j \leq n, \sigma(j) \leq j\}, c_\sigma = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) > j}} t_j + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) \leq j}} (j-1-v_j)$

$\Delta_m(X) = \sum_{\sigma \in S_m} p^{c_\sigma} X^{e_\sigma}$ が求まるものがある。 $\sigma = \text{id}$ のとき,

$$e_\sigma = n, c_\sigma = \frac{n(n-1)}{2}, \sigma = (12 \dots n) \text{ のとき } e_\sigma = 1, c_\sigma = 0 \text{ であり}$$

これ以外の $\sigma \in S_n$ については, $2 \leq e_\sigma \leq n-1$ とあることは容易に
 確かめられる。ii) E_m は $\Delta_m(k) \cap \Sigma_n^*$ に作用し, $T_m \cap \Delta_m(k)$ は
 その代表系である。これは,

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \end{matrix} & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right), A \in T_{m-k} \cap \Delta_{m-k}(0) \text{ の形であり}$$

$\det A = \pm p^m$ のとき, B のとり方は, p^{km} 個あることから
 計算できる。

ル加与之られれば、 $G_m(X)$ は具体的に求められる。これは、 $T_{m,0}$ を求めるとに基づき、例之は次式を得る

$$G_1(X) = X, \quad G_2(X) = pX^2 + X,$$

$$G_3(X) = p^3X^3 + 2(p^2+p)X^2 + X.$$

以上をまとめると、

$$\text{命題 3.7. } \zeta(\mathbb{Z}_p(C_p \cdot H); s) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{q C_k (1+(p-1)p^{-s})^{q-k} G_{q-k}(p^k - q^s)}{\prod_{i=k}^{q-1} ((1-p^{-s})(1-p^i - q^s))}$$

ここで、 $q C_k$ は、 n 項係数、 $G_0(X) = 1$, $\prod_{i=0}^{q-1} ((1-p^{-s})(1-p^i - q^s)) = 1$ とす。

§4. $\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] \circ (C_p \cdot H)$ の場合.

(3.3)の残、213の方を扱う。この節では、 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] \circ (C_p \cdot H)$ とす。

$$N_\delta e_i = \begin{cases} \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] e_i \oplus \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d, \varepsilon_p] e_i & \delta=0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] C_p e_i & \delta=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると、やはり $\oplus_p \Lambda$ の full Λ -格子の同型類は 2^q 個。

$L(\delta_1, \dots, \delta_q) = N_{\delta_1} e_1 \oplus \dots \oplus N_{\delta_q} e_q$, $\delta_i = 0$ または 1 によって代表される。 $L(0, \dots, 0) = \mathcal{O} \oplus \mathcal{B}$ ($\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] \circ H$, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d, \varepsilon_p] \circ H$) と \mathbb{Z}_p -整環として分解する。 \mathcal{O}, \mathcal{B} はともに極大整環である ([4, §40] 参照) から、 $\mathcal{O} = M_q(\hat{R}_d)$, $\mathcal{B} = M_q(\hat{R}_{dp})$ と同一視できる。 $\pi \in \hat{R}_{dp}$ の素元とし、 $F = \hat{R}_d / p\hat{R}_d \cong \hat{R}_{dp} / \pi\hat{R}_{dp}$ とする。 F の位数は $p_d = p^{\varphi(d) / q} q^d$ である。

(3.4) と対応した次の補題を得る。

補題 4.1. $L = L(\delta_1, \dots, \delta_g)$, $r = \sum_{i=1}^g \delta_i$ とすると.

i) $(L : \wedge) = p_d^{g(g-r)}$

ii) $\mu(\text{Aut}_\wedge(L))^{-1} = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{(p_d^g - p_d^i)^2}{p_d^r - p_d^i}$

証明. i) は $(N_0 e_i : N_1 e_i) = p_d^{\delta_i}$ より明らか. ii) $\tau e_i = \omega^{i-1} e_i$ なる \mathbb{Z}_p 内の 1 の原始 g 乗根 ω をとり, $\gamma_k = \sum_{i=0}^{g-1} \omega^{-ki} \zeta_d^{ri}$ とおくと, $k \in \mathbb{Z}$ かつ $0 \leq k < g$, $\gamma_k \in \mathbb{Z}_p[\zeta_d]^*$ であり, $\tau \gamma_k = \omega^k \gamma_k \tau$ である.

次の同型対応がある

$$\left\{ ((a_{ij}), (b_{ij})) \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \mid \begin{array}{l} \delta_j = 1 \text{ のとき } a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{\pi \hat{R}_d} \\ \delta_j = 0 \text{ のとき } \delta_j = 1 \text{ ならば} \\ a_{ij}, b_{ij} \in \pi \hat{R}_d \end{array} \right\} \longrightarrow \text{End}_\wedge(L)$$

$$\begin{aligned} ((a_{ij}), (b_{ij})) &\longmapsto f: \\ f(e_i) &= \left(\sum_{j=1}^g \gamma_{i-j} a_{ij} e_j, \sum_{j=1}^g \gamma_{i-j} b_{ij} e_j \right) \\ &\in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \quad 1 \leq i \leq g. \end{aligned}$$

よって $\mu(\text{Aut}_\wedge(L))$ が計算できる。

$X \in M_g(F)$ をとり.

$$\Delta(X) = \{ A \in M_g(\hat{R}_d) \mid A \pmod{\pi} M_g(\hat{R}_d) = X \}$$

とする。記号の簡略化のため, $\int \Delta(X)$ であり, 積分

を表現す. $\int_{\Delta(X) \cap \text{GL}_g(\hat{R}_d)} \|x\|_{M_g(\hat{R}_d)}^s d^x x$

(3.5) と対応した次の補題を得る。

補題 4.2. $L = L(\delta_1, \dots, \delta_g)$, $r = \sum_{i=1}^g \delta_i$ とすると,

$$\int_{\{L: \Lambda\} \cap \mathbb{Q}_p \wedge^x} \|x\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^x x = \sum_{X \in \mathcal{X}_r} \left(\int_{\Delta(X)} \right)^2$$

但し, $\mathcal{X}_r = \{ (x_{ij}) \in M_g(F) \mid \forall 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g \text{ かつ } x_{ij} = 0 \}$ とする。

証明. $X \in M_g(F)$ かつ $\Delta'(X) = \{ B \in M_g(\hat{R}_p) \mid B \bmod \pi M_g(\hat{R}_p) = X \}$ とおくと, $\{L: \Lambda\}$ は $\bigcup_{X \in \mathcal{X}_r} \Delta(X) \oplus \Delta'(X)$ と同一視できる こと

が, $\{L: \Lambda\}$ の定義に従った計算でわかる。 \hat{R}_d と \hat{R}_{dp} は, 同じ剰余体を持つことから, $\Delta(X)$, $\Delta'(X)$ についての積分が等しいことがわかり結論を得る。

また, 各 $X \in M_g(F)$ は, 基本変形によつて, ある h ($0 \leq h \leq g$) についての標準形 $X_h = \begin{pmatrix} \overset{h}{\circ} & \\ & 0 \end{pmatrix}$ になる。これは $M_g(\hat{R}_d)$ に引き戻すと, ある $A, B \in GL_g(\hat{R}_d)$ が存在して

$$A \cdot \Delta(X) \cdot B = \Delta(X_h)$$

となることがわかる。従つて, このとき $\int_{\Delta(X)} = \int_{\Delta(X_h)}$ である。

補題 4.3.
$$\int_{\Delta(X_h)} = \frac{p_d^{-g(g-h)s}}{\prod_{i=0}^{h-1} (p_d^g - p_d^i) \prod_{i=h}^{g-1} (1 - p_d^{i-gs})}$$

証明. $E = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1+pR & PR \\ & \ddots \\ & 1+pR \end{matrix} & R \\ \hline PR & GL_{q-h}(R) \end{array} \right]_q$ は $\Delta(X_R) \cap GL_q(\hat{K}_d) =$
 $(R = \hat{R}_d)$

左乗法に作用し、その代表系として次の条件をみたす $(x_{ij}) \in GL_q(\hat{K}_d)$ 全体を採る。

- i) $1 \leq j \leq h$ かつ $i = j$ のとき $x_{ij} = 1$
- ii) $h+1 \leq j \leq q$ かつ $i = j$ のとき $x_{ij} = p^{m_j}$, $m_j \geq 1$
- iii) $1 \leq j \leq h$ かつ $i > j$ のとき $x_{ij} = 0$
- iv) $h+1 \leq j \leq q$ かつ $i < j$ のとき x_{ij} は剰余群 $p\hat{R}_d / p^{m_j}\hat{R}_d$ の代表全体を動く、但し m_j は ii) のもの。

m_j ($h+1 \leq j \leq q$) が与えられたとき、 $\begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & p^{m_{h+1}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & p^{m_q} \end{pmatrix}$ の形の行列

が、 $\prod_{j=h+1}^q p_d^{(m_j-1)(j-1)}$ 個存在する。この行列の行列式は $p_d^{\sum_{j=h+1}^q m_j}$

であるから、これから $\int \Delta(X_R)$ が計算できる。

以上より次の命題を得る。

命題 4.4.

$$\int_{\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_d] \times (G \times H) \times S} = \sum_{r=0}^q \sum_{h=0}^r q C_r \prod_{i=h}^{r-1} \frac{(p_d^q - p_d^i)^2}{p_d^r - p_d^i} \times \prod_{i=0}^{h-1} \frac{p_d^q - p_d^i}{p_d^h - p_d^i} \times \frac{p_d^{-q(q+r-2h)S}}{\prod_{i=h}^{q-1} (1 - p_d^{-i-q} s)^2}$$

2.2. (3.6) の $G_m(X) = \sum_{\sigma \in S_n} p^{C_\sigma} X^{e_\sigma}$ を p と X の q 項式とみ、

$G_m(p, X)$ と書く。又、 $G_0(p, X) = 1$ とおく。(3.1) (3.2) (3.7)

(4.4) を合わせ2次の定理を得る。

定理. q を素数, m を平方因子なしの q と素は整数とする。

$C_n \cdot C_q$ を C_n の C_q による半直積とし、 C_q が C_n の各 p -Sylow 部分群に忠実に作用し2つ群とする。 $n = q$ とす。

$$\zeta(Z(C_n \cdot C_q); s) = \zeta_Z(s) \zeta_{Z[C_q]}(s) \left(\prod_{\substack{d|m \\ d \neq 1}} \prod_{i=0}^{q-1} \zeta_{R_d}(qs-i) \right) (1 - q^{-s} + q^{1-2s}) \prod_{\substack{p|m \\ d \neq 1}} \left(F_{p,1}(s) \prod_{d \neq 1} F_{p,d}(s) \right)^{\frac{q_d}{d}}$$

$$F_{p,1}(s) = \sum_{k=0}^q \left[q C_k (1 + (p-1)p^{-s})^{q-k} \zeta_{q-k}(p, p^{k-qs}) \prod_{i=0}^{k-1} ((1-p^{-s})(1-p^{-i-qs})) \right].$$

$d \neq 1 \Rightarrow 1 \leq d \leq q$

$$F_{p,d}(s) = \sum_{r=0}^q \sum_{h=0}^r \left[q C_r \prod_{i=h}^{r-1} \frac{(p_d^q - p_d^i)^2}{p_d^r - p_d^i} \prod_{i=0}^{h-1} \left(\frac{p_d^q - p_d^i}{p_d^r - p_d^i} (1 - p_d^{i-qs})^2 \right) \times p_d^{-q(q+r-2h)s} \right]$$

\Rightarrow 正. 各 $p|m$ と $1 \neq d | \frac{m}{p} \Rightarrow 1 \leq d \leq q$. q_d は $R_d \cap (p)$ 上の相異なる素idealの個数で、 $p_d = p^{q(d)}/q^{q_d}$ とある。

参考文献

- [1] C. J. Bushnell and I. Reiner : Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures, Math. Zeit. 173 (1980), 135-161.
- [2] M. Deuring : Algebren, Springer, Berlin, 1935.
- [3] Y. Hironaka : Zeta functions of integral group rings of metacyclic groups, to appear in Tsukuba J. Math. 5(2).
- [4] I. Reiner : Maximal orders, Academic Press, London, 1975.
- [5] I. Reiner : Zeta functions of integral representations, Comm. algebra 8(10) (1980), 911-925.
- [6] L. Solomon : Zeta functions and integral representation theory, Advances in Math. 26(1977), 306-326.
- Haar 測度については
- [7] A. Weil : Basic number theory, Springer, Berlin, 1967.