数理解析研究所講究録
第 441 巻 1981 年 43-50

Skolem-Mincの定理の一般化について

筑波大 数学系 本橋 信義
静岡大 理学部 白井古希男

§0. 関数記号をもつ1階の古典述語論理（等号を持っても．持たなくてもよい）において，次の定理は Skolem の定理として良く知られている：

Skolem の定理 f を n 変数の関数記号，C および $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y A(x_1,\cdots,x_n,y)$ を f を含まぬ論理式とする．このとき
$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y A(x_1,\cdots,x_n,y) \supset C$ が証明可能であることと
$\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n)) \supset C$ が証明可能であることとは同値である．

Skolem の定理は，公理系 Γ の無矛盾性を，新しい関数記号（Skolem function）を導入することによって quantifier を除去し，より簡単な universal sentence からなる公理系 Γ_0 の無矛盾性に帰着させる場合に用いられる（Hilbert-Bernays [3], Rasiowa [8]）．また，逆に，この定理は関数記号の除去に関する定理としてみることもでき，前原[4]は，Hilbert-Bernays

の第2 ε-定理の証明にこの定理を用いた．以後，この観点にたって考える．

さて，論理を直観主義述語論理にとったときは，話はもう少しめんどうになる。その原因は，直観主義の等号にある．事実，等号を持たない場合には Skolem の定理は成り立つけれども，等号を持つ場合には成立しない（反例については，Smorynski [9] 参照）．そこで，Minc と Smorynski とは等号を持つ直観主義述語論理の場合，関数記号の除去に関して次の定理が成り立つことを示し，Smorynski はこれを用いていくつかの直観主義の理論の公理化問題を研究した．

Minc の定理　f を n 変数の関数記号，$\vec{x}_i = \langle x_{i1}, \cdots, x_{in} \rangle$ を異なる n コの変数からなる列とし，さらに $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ にも共通の変数がないとする．C および $\forall\vec{x}\exists y A(\vec{x}, y)$ が f を含まぬ論理式ならば，

$\forall\vec{x}A(\vec{x}, f(\vec{x})) \supset C$ が証明可能となるための必要十分条件は，ある自然数 k があって，

$$\forall\vec{x}_1\exists y_1 \cdots \forall\vec{x}_k\exists y_k [\bigwedge_{i=1}^{k} A(\vec{x}_i, y_i) \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{k} (\vec{x}_i = \vec{x}_j \supset y_i = y_j)] \supset C$$

が証明可能となることである．

Minc の定理は，古典述語論理でも成り立ち，Skolem の定理の1つの一般化になっていることがわかる．Smorynski は [10] で，Minc の指摘したこの定理を Kripke モデルを用いて

証明した.

§1. 一方, Barwise [2] は, 弱い意味の2階の古典論理 Σ_1^1 における公理系を, 1階の古典論理体系の内部で表現することを考えた. Enderton [3], Walkoe [12] によれば, Σ_1^1 のどの論理式も Henkin quantifier $\begin{pmatrix} \forall \vec{x}_1 \exists y_1 \\ \vdots \\ \forall \vec{x}_n \exists y_n \end{pmatrix}$ (これは, y_i が $\vec{x}_i$ にのみ依存して定まることを表わす) を導入することによって, 適当な Henkin 論理式 (1階の論理式の一番外に, ただ一度 Henkin quantifier を作用させてできる論理式) に同値になるから, 結局は, Henkin 論理式を何等かの方法で1階の古典述語論理の体系で表現できるようにすればよい. しかし, 一般には, Henkin 論理式と同値な1階の論理式は作れない (Takeuti [11], P. 259) から, Barwise は,ここで1階の論理式の列で近似するということを考え, 次のような近似を定義した.

$1 \leqq i \leqq n$ とする. $\vec{x}_i^1, \cdots, \vec{x}_i^k$ は各々長さ m_i の相異なる変数の列とし, $y_i^1, \cdots, y_i^k$ は異なる変数であるとする. さらに, これらのいずれにも共通の変数は現われないものとする. A の $< \vec{x}_1, y_1, \cdots, \vec{x}_n, y_n >$ に関する k 次の Barwise 近似 $Bap(A, k)$ とは, 論理式

$$\forall \vec{x}_1^1 \cdots \forall \vec{x}_n^1 \exists y_1^1 \cdots \exists y_n^1 \cdots \cdots \forall \vec{x}_1^k \cdots \forall \vec{x}_n^k \exists y_1^k \cdots \exists y_n^k \left[\bigwedge_{i=1}^{k} A(\vec{x}_1^i, y_1^i, \cdots, \vec{x}_n^i, y_n^i) \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{k} \bigwedge_{l=1}^{n} (\vec{x}_l^i = \vec{x}_l^j \supset y_l^i = y_l^j) \right]$$

のことと定

義する．このとき，次の定理が成り立つ．

Barwiseの定理　$f_1, \cdots, f_n$ をそれぞれ m_1 変数，…，m_n 変数の相異なる関数記号とし，AおよびCには $f_1, \cdots, f_n$ は現われないものとする．論理式

$$\forall \vec{x}_1 \cdots \forall \vec{x}_n A(\vec{x}_1, f_1(\vec{x}_1), \cdots, \vec{x}_n, f_n(\vec{x}_n)) \supset C$$

が証明可能となるための必要十分条件は，ある自然数 k があって，

$$Bap(A, k) \supset C$$

が証明可能となることである．

Barwiseは上の定理を *resplendent* モデルの上の *Back and forth method* を用いて証明した．特に，$n=1$ の場合には，古典述語論理では $Bap(A, k)$ と $\forall \vec{x} \exists y A(\vec{x}, y)$ とが同値であるから，この定理は *Skolem* の定理そのものである．

§2.　本橋[6]は，一意性条件の存在条件による近似の理論を展開し，Aの $\langle \vec{x}_1, y_1, \cdots, \vec{x}_n, y_n \rangle$ に関する k 次の本橋近似 $Map(A, k)$ を論理式

$$\forall \vec{x}_1^1 \exists y_1^1 \cdots \forall \vec{x}_n^1 \exists y_n^1 \cdots\cdots \forall \vec{x}_1^k \exists y_1^k \cdots \forall \vec{x}_n^k \exists y_n^k \Big[\bigwedge_{1 \leqq i_1, \cdots, i_n \leqq k} A(\vec{x}_1^{i_1}, y_1^{i_1}, \cdots, \vec{x}_n^{i_n}, y_n^{i_n}) \wedge \bigwedge_{1 \leqq i,j \leqq k} \bigwedge_{1 \leqq l \leqq n} (\vec{x}_l^i = \vec{x}_l^j \supset y_l^i = y_l^j) \Big]$$

で定義した．そして，一意性条件の存在条件による近似の定理の *special case* として，次のBarwise型の定理を得た．

本橋の定理．　$f_1, \cdots, f_n$ をそれぞれ m_1 変数，…，m_n 変数の相異なる関数記号とし，AおよびCには，$f_1, \cdots, f_n$ は現われないものとする．このとき，論理式

$\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, f_1(x_1), \cdots, x_n, f_n(x_n)) \supset C$ が証明可能となるための必要十分条件は，ある自然数 k があって，

$Map(A, k) \supset C$ が証明可能となることである．

本橋の証明は，完全に syntactical な証明であり，本質的には，cut-elimination 定理が使われている．本橋の定理は，古典論理の場合だけでなく，直観主義論理の場合にも成り立ち，特に $n=1$ のときは，Mints の定理になっているのである．本橋は，この定理を，可算無限コの論理式についての $\wedge$, $\vee$ をゆるした $L_{\omega_1,\omega}$ の場合に拡張し，また，A がパラメータを含む場合の形をも与えている．

さらに，等号を含まぬ形の近似 $M^*ap(A, k)$ を

$\forall x_1^1 \exists y_1^1 \cdots \forall x_n^1 \exists y_n^1 \cdots\cdots \forall x_1^k \exists y_1^k \cdots \forall x_n^k \exists y_n^k [\bigwedge_{1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq k} A(x_1^{i_1}, y_1^{i_1}, \cdots,$

$x_n^{i_n}, y_n^{i_n})]$ で与え，やはり古典論理の場合に同様の定理が成り立つこと（のみならず，本質的には同じ定理であること）を示した．

§3. さて，上江洲-赤星は，赤星[1]において，本橋の定理を，$f_1, \cdots, f_n$ のなかに同じ関数記号が入ってもよい形に拡張した．

上江洲-赤星の定理　$f_1, \cdots, f_n$ をそれぞれ m_1 変数，$\cdots$，m_n 変数の関数記号とする．$f_1, \cdots, f_n$ のなかに同じものがあってもよい．$A(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ および C に $f_1, \cdots, f_n$ が

ないとき．論理式 $\forall \vec{x}_1 \cdots \forall \vec{x}_n A(\vec{x}_1, f_1(\vec{x}_1), \cdots, \vec{x}_n, f_n(\vec{x}_n)) \supset C$ が証明可能となるための必要十分条件は．ある自然数 k に対して $\forall \vec{x}^1_1 \cdots \forall \vec{x}^1_n \exists y^1_1 \cdots \exists y^1_n \cdots\cdots \forall \vec{x}^k_1 \cdots \forall \vec{x}^k_n \exists y^k_1 \cdots \exists y^k_n [\bigwedge_{1 \leqq i_1, \cdots, i_n \leqq k} A(\vec{x}^{i_1}_1, y^{i_1}_1, \cdots, \vec{x}^{i_n}_n, y^{i_n}_n) \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{k} \bigwedge_{(l,l') \in T} (\vec{x}^i_l = \vec{x}^j_{l'} \supset y^i_l = y^j_{l'})] \supset C$ が証明可能となることである．ここに，$T = \{(l, l') \mid f_l$ と $f_{l'}$ とは同じ関数記号，$1 \leqq l \leqq n, 1 \leqq l' \leqq n\}$ とする．

定理の証明は．やはり *syntactical* で．*cut-elimination* 定理が拡張された形で．本質的に使われている．この定理を用いて赤星[1] は．古典述語論理における本橋の公理化の問題（本橋[7]）に別証明を与え．また．次の前原の ε-定理の別証明を与えた（前原[5]）．

前原の ε-定理．　ε 記号を含まぬ論理式 C が．ε-公理 $\exists x F(x) \supset F(\varepsilon x F(x))$ および *Ackermann* の公理 $\forall x (F(x) \equiv G(x)) \supset \varepsilon x F(x) = \varepsilon x G(x)$ を用いて ε 記号を持った古典論理で証明可能ならば．実は ε-公理も *Ackermann* の公理も用いずに．古典論理で証明可能である．

§4.　最後に．*Barwise* の定理と本橋の定理との関連．および直観主義論理における *Barwise* の定理についてのべる．

古典述語論理においては．論理式 $Map(A, k) \supset Bap(A, k)$ および．k に対して十分大きな K をとるとき．論理式 $Bap(A, K) \supset Map(A, k)$ とがともに証明可能となるので．

古典論理では，Barwise の定理と本橋の定理とは同じ定理と考えうる．

次に，直観主義述語論理においても，Barwise の定理は，そのままの形で成り立つことを注意したい．証明は，十分条件であることは自明であるから，必要条件を示せばよいのであるが，例えば，上江洲・赤星の定理（赤星[1] においての定理11）の証明に，ほんの少し手を加えることによって得られるのである．

参考文献．

[1] 赤星順： 種々の除去定理， 九州大学理学研究科修士論文（1981）

[2] J.Barwise : Some applications of Henkin quantifiers, Israel J. of Math., vol. 25 (1976) pp. 47-63.

[3] D.Hilbert & P. Bernays : Grundlagen der Mathematik II, Springer (1939).

[4] S. Maehara : The predicate calculus with ε-symbol, J. of Math. Soc. Japan, vol.7 (1955) pp. 323-344.

[5] : Equality axiom on Hilbert's ε-symbol, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, vol.7 (1957) pp. 419-435.

[6] N. Motohashi : Approximation theory of uniqueness conditions

by existence conditions, 未公刊論文集: (1980).

[7] . : An axiomatization theorem, 未公刊論文集 (1980).

[8] H. Rasiowa : On the ε-theorems, F.M. vol 43 (1956) pp. 156-165.

[9] S. Smorynski : On axiomatizing fragments, J.S.L. vol 42 (1977) pp. 530-544.

[10] : The axiomatization problem for fragments, Ann. of Math. Logic vol. 14 (1978) pp. 193-221.

[11] G. Takeuti : Proof theory, North-Holland (1975).

[12] W.J. Walkoe : Finite partially-ordered quantification, J.S.L. vol 35 (1970), pp. 535-555.

[13] H.B. Enderton : Finite partially-ordered quantifiers, Z. Math. Logik Grundlagen Math. vol 16 (1970) pp. 393-397.